

交通土建研究生工程计算实训系列教材

# 道路与铁道工程

## 数值计算及工程应用

王 平 任娟娟 易思蓉 蒋 鑫 蒋良潍 / 编著



Numerical Simulation and Practice  
for Road and Railway Engineering

交通土建研究生工程计算实训系列教材

# 道路与铁道工程 数值计算及工程应用

王平 任娟娟 易思蓉 蒋鑫 蒋良滩 / 编著

西南交通大学出版社

· 成都 ·

图书在版编目(CIP)数据

道路与铁道工程数值计算及工程应用 / 王平等编著.

—成都: 西南交通大学出版社, 2017.8

交通土建研究生工程计算实训系列教材

ISBN 978-7-5643-5522-7

I. ①道… II. ①王… III. ①道路工程—数值计算—研究生—教材②铁路工程—数值计算—研究生—教材  
IV. ①U41②U2

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第144997号

交通土建研究生工程计算实训系列教材

DAOLU YU TIEDAO GONGCHENG SHUZHI JISUAN JI GONGCHENG YINGYONG

道路与铁道工程数值计算及工程应用

王 平 任娟娟 易思蓉 / 编 著 责任编辑 / 杨 勇  
蒋 鑫 蒋良淮 封面设计 / 墨创文化

西南交通大学出版社出版发行

(四川省成都市二环路北一段111号西南交通大学创新大厦21楼 610031)

发行部电话: 028-87600564 028-87600533

网址: <http://www.xnjdcbs.com>

印刷: 四川煤田地质制图印刷厂

成品尺寸 185 mm × 260 mm

印张 12 字数 274 千

版次 2017年8月第1版

印次 2017年8月第1次

书号 ISBN 978-7-5643-5522-7

定价 38.00 元

课件咨询电话: 028-87600533

图书如有印装质量问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

# 前 言

当前,我国正处于铁路、公路等交通基础设施建设快速发展的时期,截至2015年年末,我国公路总里程为457.7万千米,公路密度为47.7千米每百平方千米,高速公路总里程数亦在逐年增加;而《中长期铁路网规划(2008年调整)》还明确提出2020年全国铁路营业里程将达到12万千米,其中客运专线为1.6万千米。作为铁路、公路交通运输系统的重要组成部分,路基、路面、轨道、支挡等结构物由土工、金属、圬工等不同性质的材料构建而成,暴露于恶劣的自然环境中,荷载条件复杂多变,其精细化计算分析愈显重要。而随着现代计算机软硬件的迅猛发展,道路与铁道工程学科数值计算领域进入了一个崭新的天地,有限元法、有限差分法、离散单元法等各种数值计算方法得以广泛应用,相应的计算分析软件亦如雨后春笋般涌现。

为适应时代发展的迫切需求,西南交通大学土木工程学院道路与铁道工程系组织相关教师,结合硕士研究生课程“工程计算实践”的建设,慎重选择典型案例,有机融合基础理论与实际操作,精心编撰了本书。全书共5篇,13章,涉及数值模拟基础理论、并行计算算法、路面结构分析、轨道结构分析、选线专业系统实训、路基结构分析等内容,其中第1篇数值模拟基础理论与并行计算、第5篇路基工程设计计算分析案例由蒋良滩老师编写,第2篇路面结构计算分析案例由蒋鑫老师编写,第3篇轨道结构计算分析案例由任娟娟老师编写,第4篇选线专业系统实训案例由易思蓉老师编写,全书由王平老师统筹。

本书主要供道路与铁道工程、建筑与土木工程、交通运输工程及其相关学科硕士研究生学习数值计算之需,希望对初学者了解、掌握典型计算分析软件,促进科研工作有所帮助。读者如有宝贵意见及建议,请致函:四川省成都市二环路北一段111号西南交通大学土木工程学院道路与铁道工程系,邮编610031。

编 者

2017年3月

## 第 1 篇 数值模拟基础理论与并行计算

## 01 第 1 章 数值模拟方法基础理论 /001

- 1.1 数值模拟的基本概念 /001
- 1.2 有限元法计算原理及 ABAQUS 软件 /002
- 1.3 数值模拟的基本方程与本构关系 /004
- 1.4 有限元分析基本步骤 /007
- 1.5 有限元计算收敛准则 /009

## 02 第 2 章 并行计算方法 /011

- 2.1 并行计算和云计算的基本概念 /011
- 2.2 理解并行计算的框架搭建 /012
- 2.3 多核并行计算操作流程 /014

## 第 2 篇 路面结构计算分析案例

## 03 第 3 章 基于弹性层状体系理论的沥青路面结构分析 /022

- 3.1 沥青路面结构计算分析技术难点 /022
- 3.2 Everstress 程序简介 /022
- 3.3 典型案例宏观描述 /023
- 3.4 基于 Everstress 程序的沥青路面结构弹性层状体系理论计算分析 /023

## 04 第 4 章 基于有限单元法的水泥混凝土路面结构分析 /029

- 4.1 水泥混凝土路面结构计算分析技术难点 /029
- 4.2 EverFE 程序简介 /029
- 4.3 典型案例宏观描述 /030
- 4.4 基于 EverFE 程序的水泥混凝土路面结构有限元计算分析 /031

## 第3篇 轨道结构计算分析案例

### 05 第5章 CRTS I型双块式无砟轨道结构设计算例 /039

- 5.1 CRTS I型双块式无砟轨道设计参数 /039
- 5.2 ANSYS 数值分析典型案例 /042
- 5.3 无砟轨道荷载组合 /050
- 5.4 路基上连续板主体结构设计荷载 /051
- 5.5 主体结构配筋 /062
- 5.6 配筋检算 /064

### 06 第6章 桥上无缝线路设计算例 /068

- 6.1 设计参数 /068
- 6.2 计算模型 /072
- 6.3 桥上无缝线路附加纵向力计算 /075
- 6.4 轨道强度和稳定性检算 /079
- 6.5 断缝和墩台稳定性检算 /081

### 07 第7章 钢弹簧浮置板轨道结构的模态分析 /082

- 7.1 钢弹簧浮置板轨道结构的有限元模型 /082
- 7.2 钢弹簧浮置板轨道有限元模型的参数及边界条件 /083
- 7.3 结构模态分析的有限元解法 /084
- 7.4 模态计算结果的统计与分析 /084
- 7.5 小结 /088

## 第4篇 选线专业系统实训案例

### 08 第8章 基于航测资料的数字地形数据采集 /089

- 8.1 全数字摄影测量系统原理简介 /089
- 8.2 Helava 全数字摄影测量系统简介 /089
- 8.3 数字地形数据采集实例 /091

### 09 第9章 铁路构造物与轨道设备基元模型建模 /104

- 9.1 基元模型建模技术简介 /104
- 9.2 基于 AutoCAD 和 3DSMAX 的基元模型建模 /104
- 9.3 基元模型库管理系统使用 /110

### 10 第10章 基于虚拟环境的铁路数字化选线设计 /115

- 10.1 铁路数字化选线设计系统原理 /115

- 10.2 铁路数字化选线设计系统功能简介 /115
- 10.3 铁路数字化选线设计实例 /116

## 第 5 篇 路基工程设计计算分析案例

- 11** 第 11 章 路堤工程计算案例 /132
  - 11.1 路堤 - 地基模型稳定性及沉降分析 /132
  - 11.2 分层土地基的应力扩散及沉降分析 /143
  
- 12** 第 12 章 路堑边滑坡工程计算案例 /167
  - 12.1 稳定性分析中的有限元强度折减法 /167
  - 12.2 开挖失稳边坡稳定性及支挡措施分析 /167
  
- 13** 第 13 章 路堤荷载作用下的地基处理设计计算案例简介 /179
  - 13.1 长短桩复合地基性状分析 /179
  - 13.2 高强度桩复合地基桩土相互作用及有效桩长的有限元分析 /180
  - 13.3 高速铁路标准梁桥桩基有限元分析及有效桩长探讨 /182
  
- 参考文献 /183

# 第1篇 数值模拟基础理论与并行计算

## 第1章 数值模拟方法基础理论

### 1.1 数值模拟的基本概念

面对各种复杂材料如岩土体、混凝土及复杂构件等的力学分析问题,通过基本的微分方程往往难以甚至无法直接求得精确解,只有寻求数值方法以获取近似解。常用的数值模拟方法包括有限元法、有限差分法、扩展有限元法及无网格法等。

有限元法是用有限个单元将连续体离散化,通过对有限个单元作分片插值,求解各种力学、物理问题的一种数值模拟方法。有限元法在早期是以变分原理为基础发展起来的,广泛地应用于以拉普拉斯方程和泊松方程所描述的各类物理场分析中(这类场与泛函的极值问题有着紧密的联系),其基本思想是将求解给定的微分方程化为求解泛函的极值问题。1969年,在流体力学中应用加权余数法中的迦辽金(Galerkin)法或最小二乘法等同样获得有限元方程,使得有限元法可应用于以任何微分方程所描述的各类物理场中,而不再要求这类物理场和泛函的极值问题相联系。

有限差分法是把连续的定解区域用有限个离散点构成的网格来代替,这些离散点称作网格的节点,把连续定解区域上的连续变量的函数用在网格上定义的离散变量函数来近似,把原方程和定解条件中的微分用差分来近似,积分用积分和来近似,于是原微分方程和定解条件就可近似地代之以代数方程组,即有限差分方程组。解此方程组就可以得到原问题在离散点上的近似解,然后再利用插值方法便可以从离散解得到定解问题在整个区域上的近似解。

扩展有限元法针对在考虑物体内部存在缺陷、裂纹扩展时,传统有限元法单元边界与几何界面一致造成局部网格加密、其余区域稀疏的非均匀网格分布,增加计算成本且裂纹扩展路径只能预定沿着单元边界发展的不足而提出。1999年,美国西北大学 Beleytachko 提出扩展有限元法,核心思想是用扩充带有不连续性质的形函数来代表计算区域内的间断,在计算过程中,不连续场的描述完全独立于网格边界,在处理断裂问题时有较好的优越性。利用扩展有限元,可以方便地模拟裂纹的任意路径,还可以模拟带有孔洞和夹杂的非均质材料。扩展有限元以标准有限元理论为框架,保留了传统有限元的优点。

无网格法在数值计算中不需要生成网格,而是按照一些任意分布的坐标点构造插值函数离散控制方程,就可方便地模拟各种复杂形状的场。无网格伽辽金法是目前影响最大、应用最广的无网格计算方法。

各种数值模拟方法中有限元法是一种高效能常用的计算方法是数值解法的一种重要手段。有限元法的基础是矩阵位移法,基本概念是用简单问题代替复杂问题的一种求解方式,其基本思路为“物体离散化”:将整个求解域剖分为多个可以具有不同形状的子域,称为有限元单元;单元之间以节点方式互连,通过求得每一个单元包含未知量函数的近似解而推导求解整个解析域的近似满足条件<sup>[46]</sup>。有限元法最后获得的是近似解,计算精度由单元精度控制。一般来讲,单元划分越精细、单元形状越合理,求解精度越高。有限元法离散化的计算思路既能适应各种复杂形状,又能通过提高单元划分技术获取整体模型的精确解,因而成为行之有效的现代工程分析手段。

有限元基本思想最早由 Courant 在 1943 年提出,通过单元连续函数与最小位能量在三角形区域上的结合应用,对 St.Venant 扭转问题进行研究;Levy 在 1947 年与 1953 年分别提出力法(柔度法)与刚度法(位移法),应用于飞机结构研究;Argyri 与 Kelsey (1954)建立了基于能量法则的矩阵结构法;Turner、Clough 等(1956)将刚架位移法推广至平面的弹性力学领域,以三角形单元求取关于机翼强度的平面应力问题,第一次实现有限元单元法成功应用,也成为在计算机上采用有限元算法的基础,Clough (1960)随后正式提出“有限元法”的概念。

随着 20 世纪 70 年代计算机技术的飞速发展,有限元法的理论研究与技术拓展都取得了巨大飞跃,主要包括:① 数学与力学基础计算理论的巨大进展;② 应用 Hellinger-Resissner 以及 Hu-Washizu 原理等的多场变量变分理论,在简单三角形单元、等参元等单元基础上发展出协调元、非协调元、混合单元等,为各类复杂问题提供了可选择的、更精细的解法;③ 建立了基于权余量法的表达方式,使有限元扩展到不完全的泛函数领域;④ 有限元求解器种类持续完善,提出迭代法、直接法、载荷增量法以及位移控制增量法等,特别对于非线性问题的计算研究取得了巨大发展。

随着现代科技,特别是计算机技术的高速发展,以有限元为基础,以数学计算、计算机科学、工程分析三者结合的 CAE(计算机辅助工程)技术取得了广泛的开发与应用,目前主要采用的有限元分析软件包括 ABAQUS、ANSYS、ADINA、MIDAS、SuperSAP 等。其应用由单纯的弹性平面问题拓展到复杂空间问题,由简单静力分析拓展到动力问题、波动问题以及稳定性问题,材料由理想弹性拓展到塑性、弹塑性甚至黏塑性等,为解决土木工程的各项科研与工程难题提供了强有力的工具。

## 1.2 有限元法计算原理及 ABAQUS 软件

具体来说,有限元方法是将具有无限个自由度的求解域离散为有限个子域,即单元,每个单元在节点处互相连接,分别求解有限个单元,然后将单元组合成整体,通过线性微分方程组得到问题的近似解。有限元方法通过这种结构离散化的方法能够计算任意几何形状及边界

条件的问题,将复杂问题简单化,可以通过不同的单元划分形式及单元大小来提高计算的精确度。

有限元分析方法以位移法和力法为主,其中应用最广泛的是以位移为基本未知量的有限元法。其基本思路概括如下:

(1) 确定所需解决的问题的求解域范围和几何边界。将求解域离散成有限个单元的集合,各单元之间通过节点连接,有限元计算中通常将这一步称为网格划分。单元越小,形状越规则,计算所得结果就越精确,但计算所占内存也越大。

(2) 以单元的节点位移作为未知量,通过位移函数确定单元内部点的位移情况。

(3) 根据几何方程和物理方程,确定应变、应力矩阵。

(4) 利用虚位移原理推导出单元刚度矩阵,是有限元计算的核心内容。

(5) 将有限个单元整合,建立平衡方程组,代入边界条件后求解,计算出单元节点位移的值,利用位移函数计算其余任意点的位移。

(6) 将计算出的节点位移代入应力矩阵,可以得到单元的应力。

ABAQUS 是一款基于 Python 语言内核的大型有限元分析软件,从简单的线性问题到几何非线性与材料非线性问题(特别对于复杂的高度非线性模型)都具有十分强健的模拟分析功能,是一个开放的多物理场仿真平台,涵盖了岩土、结构、电学、热力学、机械制造、海洋工程等多个领域。针对岩土工程方面,提供了丰富的岩土体本构模型库,能够进行土体的强度分析、渗流、应力耦合、固结、承载力计算,以及岩体开挖、动力响应、边坡稳定性分析等各类问题的分析处理。

ABAQUS 主要包括 2 个模块(图 1-1): CAE 可视化模块与分析计算模块。其中,前处理和后处理主要是在 ABAQUS/CAE(人机交互可视化模块)中进行,分析计算可通过选择 ABAQUS/Standard 或 ABAQUS/Explicit 两个求解器来完成。



图 1-1 ABAQUS 模块分类

图 1-2 为一个标准的 ABAQUS 数值分析流程。

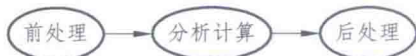


图 1-2 ABAQUS 数值模拟流程

详细说明如下:

### 1. CAE 的前处理模块

该模块包含若干个独立子模块,用于处理模型某一特定部分的工作,主要包括:

(1) Part(部件): 创建模型几何形状,确定各部分的尺寸;

- (2) Property (属性): 创建截面材料属性, 定义截面特征及其赋予部件;
- (3) Assembly (组装): 创建坐标, 装配部件, 定义部件在坐标中的位置;
- (4) Step (分析步): 定义计算完成的步数, 设置时长、增量步数目等属性;
- (5) Interaction (相互作用): 用于定义不同模型之间相互接触的类型与条件;
- (6) Load (荷载): 对模型施加荷载与边界条件, 并支持设置场变量;
- (7) Mesh (网格): 网格划分, 可根据网格精细化的要求先进行模型分区;
- (8) Job (任务): 用于将模型提交分析计算, 并支持运算过程的实时监控。

## 2. Standard/Explicit 分析计算模块

两个求解器的选取涉及模型自身特性以及多方面的要求。

## 3. CAE 后处理模块

即 Visualization (可视化), 此模块中得到计算完成后的 Job 文件, 并支持以云图、曲线和动画视频等多种形式、多个角度对计算结果进行分析处理。

此外, ABAQUS 还提供了各类支持 Fortran、Python 语言编写的用户子程序, 如 UMAT、DISP、UTRS 等, 用户可根据需要进行拓展功能的二次开发。

# 1.3 数值模拟的基本方程与本构关系

## 1.3.1 弹性问题

有限元法以弹性力学为基础。对于二维平面问题, 弹性力学微分方程为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{f}_x = 0 \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{f}_y = 0 \quad (1-2)$$

式中,  $\bar{f}_x$ 、 $\bar{f}_y$  分别为  $x$ 、 $y$  方向的体积力密度。

运动方程为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{f}_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{f}_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1-4)$$

对于正切值与角度相当的小变形线弹性模型, 工程应变的二维几何方程为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1-5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1-6)$$

各向同性的线弹性材料应变 - 应变表达式为

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\mu/E & 0 \\ -\mu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1-7)$$

式中,  $E$  为弹性模量,  $G$  为剪切模量,  $\mu$  为泊松比。三者的关系式为

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (1-8)$$

### 1.3.2 弹塑性问题

塑性力学是弹性力学的延伸,许多在弹性力学中关于应力、应变、材料性质等的假设都是塑性力学分析的基础。材料脱离胡克定律进入塑性屈服后,应力 - 应变关系不再具有统一的标准形式,只能通过应力增量与应变增量的关系来进行描述,称为流动理论或增量理论。根据塑性增量理论,各向同性材料的应力增量与应变增量有如下关系:

$$\{d\sigma\} = ([D]_e - [D]_p)\{d\varepsilon\} = [D]_{ep}\{d\varepsilon\} \quad (1-9)$$

$$[D]_{ep} = [D]_e - [D]_p \quad (1-10)$$

式中,  $[D]_e$  为弹性矩阵,  $[D]_p$  为塑性矩阵,  $[D]_{ep}$  为弹塑性矩阵。采用关联流动法则时,  $[D]_p$  与  $[D]_e$  的关系式为

$$[D]_p = \frac{[D]_e^2 \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D]_e \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} - A} \quad (1-11)$$

$$\lambda = \frac{[D]_e \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\varepsilon\}}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D]_e - A} \quad (1-12)$$

式中,  $G$  为塑性势函数;  $F$  为屈服函数;  $\lambda$  为待定系数;  $k$  值与塑性应变有关。在硬化材料中,  $k$  为塑性功,对于平面二维模型有

$$dk = \sigma_x d\varepsilon_x^p + \sigma_y d\varepsilon_y^p = \lambda \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \quad (1-13)$$

$$A = \frac{\partial F}{\partial k} dk \frac{1}{\lambda} = \frac{\partial F}{\partial k} \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \quad (1-14)$$

当  $A=0$  时, 材料为理想塑性。对于加载路径仅为或趋于一条单一路径的简单加载模型, 苏联力学家 JI.M.Kachanov 等证明可采用相对简化的增量理论——全量理论进行分析处理。

### 1.3.3 本构模型

本构模型是描述应力-应变关系的数学模型, 本构模型的正确选择对于数值计算的精确性有重要影响。岩土体本构模型的选择原则应符合两点要求: ① 能反映岩土体的特性; ② 便于参数的选取。ABAQUS 提供的弹性模型主要包括线弹性模型、多孔弹性模型等; 塑性模型有 Mohr-Coulomb 模型、扩展的 Drucker-Prager 模型、修正 Drucker-Prager 帽盖模型、修正剑桥模型等, 另外还有 Drucker-Prager 蠕变模型、节理材料模型以及用于用户自定义材料模型的多种子程序等。

Mohr-Coulomb 模型具有以下特性: ① 模拟服从经典 Mohr-Coulomb 屈服准则的材料; ② 允许材料各向同性硬化或软化; ③ 适于模拟单调荷载作用下材料的力学性状。

Mohr-Coulomb 模型的屈服面方程为

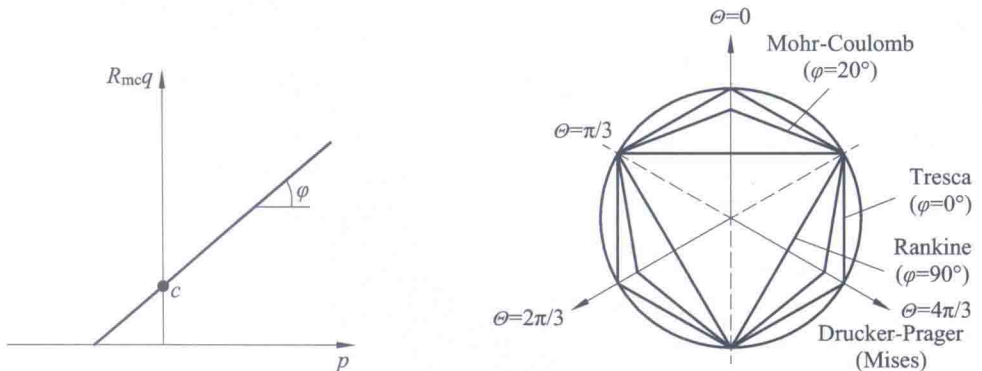
$$F = R_{mc} q - p \tan \varphi - c = 0 \quad (1-15)$$

式中,  $\varphi$  为材料内摩擦角,  $c$  为黏聚力,  $R_{mc}$  为偏应力系数, 按下式计算

$$R_{mc} = \frac{1}{\sqrt{3} \cos \varphi} \sin \left( \Theta + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{1}{3} \cos \left( \Theta + \frac{\pi}{3} \right) \tan \varphi \quad (1-16)$$

其中,  $\Theta$  为极偏角, 定义为  $\cos(3\Theta) = \frac{r^3}{q^3}$ ,  $r$  是第三偏应力不变量  $J_3$ 。  $R_{mc}$  控制了屈服面在  $\pi$  平面上的形状。

Mohr-Coulomb 屈服准则假设材料的破坏与中主应力无关, 对于大部分的应用具有足够的精度。在  $\pi$  平面上, 经典 Mohr-Coulomb 模型为等边不等角的六边形, 屈服面存在尖角, 如图 1-3 所示。



(a) 子午面上的经典 Mohr-Coulomb 模型屈服面

(b)  $\pi$  平面上的经典 Mohr-Coulomb 模型屈服面

图 1-3 经典 Mohr-Coulomb 屈服面

ABAQUS 中, 塑性模型采用修正 Mohr-Coulomb 模型。ABAQUS 将图 1-3 中经典 Mohr-Coulomb 模型的等边不等角六棱锥塑性势面修正为连续光滑的椭圆, 使  $\pi$  平面上的尖点变为弧形, 流动方向唯一, 有效避免数值计算不收敛。修正 Mohr-Coulomb 模型选取连续、光滑的流动势函数, 见式(1-17)、(1-18), 其形状在子午面上是双曲线, 在  $\pi$  平面上则是椭圆形(见图 1-4)

$$G = \sqrt{(\varepsilon c_0 \tan \psi)^2 + (R_{mw} q)^2} - p \tan \psi \quad (1-17)$$

$$R_{mw} = \frac{4(1-e^2)\cos^2 \Theta + (2e-1)^2}{2(1-e^2)\cos \Theta + (2e-1)\sqrt{4(1-e^2)(\cos \Theta)^2 + 5e^2 - 4e}} R_{mc} \left( \frac{\pi}{3}, \varphi \right) \quad (1-18)$$

式(1-17)中,  $\psi$  为子午面上有高围压作用下的剪胀角,  $c_0$  为材料的初始黏聚力,  $\varepsilon$  为子午面上的偏心率, 控制  $G$  函数在子午面上的形状以及与渐近线的相似程度; 式(1-18)中,  $e$  为  $\pi$  平面上的偏心率, 主要控制  $\pi$  平面上  $0 \sim \pi/3$  范围内塑性势面的扁平程度, 其默认值由公式

$e = \frac{3 - \sin \varphi}{3 + \sin \varphi}$  计算, 一般取值为  $e=0.1$ , 用户也可以按需求自行选取, 但必须保证  $e$  在  $0.5 \sim 1.0$  的范围内, 以满足光滑和外凸的要求。

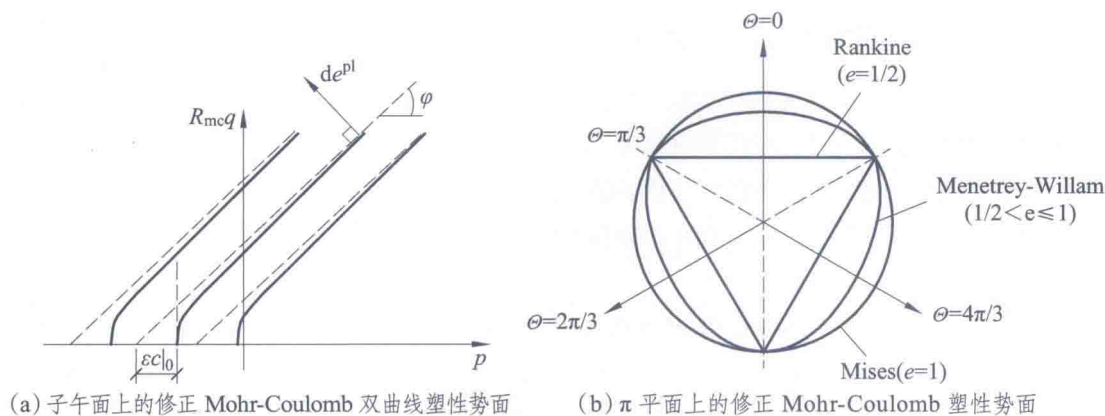


图 1-4 ABAQUS 中修正的 Mohr-Coulomb 塑性势面

## 1.4 有限元分析基本步骤

### 1. 体系离散化

采用假设的线或面将整体模型切割为有限个具有不同形状的单元, 单元之间通过节点进行相互连接。

### 2. 单元分析

选取单元节点的位移与应力中的一个或两个作为节点未知量, 构建单元的未知函数。根据不同的力学原理, 单元分析模式可分为以下三类:

(1) 基于最小势能原理的位移法, 选取节点位移为基本变量。

最小势能原理表述为: 同时满足边界条件与平衡条件的协调位移能够使势能取驻值。势能  $\Pi_p$  为应变能  $U$  与外力势能  $V$  的差:

$$\Pi_p = U - V \quad (1-19)$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dx dy dz \quad (1-20)$$

$$V = \sum F\delta + \iiint \{r\}^T \{q\} dz dy dz + \int_{S_\sigma} \{r_b\}^T \{\bar{p}\} ds \quad (1-21)$$

式(1-21)中,  $\sum F\delta$  为集中力的势能,  $\iiint \{r\}^T \{q\} dz dy dz$  为体积力的势能;  $\int_{S_\sigma} \{r_b\}^T \{\bar{p}\} ds$  为面力的势能;  $S_\sigma$  为面力的作用表面;  $\{r_b\}$  为  $S_\sigma$  上的位移。由最小势能原理得

$$\delta \Pi_p = \delta U - \delta V = 0 \quad (1-22)$$

势能对线弹性材料取最小值

$$\delta^2 \Pi_p = \delta^2 U - \delta^2 V = 0 \quad (1-23)$$

(2) 基于最小余能原理的应力法, 选取节点应力作为基本变量。

最小余能原理表述为: 在模型内部满足材料的应力 - 应变关系, 并在边界上满足规定的边界位移条件的应力状态, 使余能取驻值。如果在物体的一部分边界  $S_u$  上给定了位移  $\{r_b\} = [u_b, v_b, \omega_b]^T$ , 并设作用在  $S_u$  的边界反力为  $\{p\} = [p_x, p_y, p_z]^T$ , 那么边界反力的势能为

$$V^* = \int_{S_u} (p_x u_b + p_y v_b + p_z \omega_b) ds = \int_{S_u} \{p\}^T \{r_b\} ds \quad (1-24)$$

余能  $\Pi_c$  定义为余应变能与给定位移的那一部分边界  $S_u$  上边界反力的势能  $V^*$  之差, 即

$$\Pi_c = U^* - V^* \quad (1-25)$$

物体中的余应变能为

$$U^* = \frac{1}{2} \iiint \{\sigma\}^T [D]^{-1} \{\sigma\} dx dy dz \quad (1-26)$$

故物体的余能为

$$V^* = \int_{S_u} (p_x u_b + p_y v_b + p_z \omega_b) ds = \int_{S_u} \{p\}^T \{r_b\} ds \quad (1-27)$$

由最小余能原理得

$$\delta \Pi_c = \delta U^* - \delta V^* = 0 \quad (1-28)$$

余能对线弹性材料取最小值

$$\delta^2 \Pi_c = \delta^2 U^* - \delta^2 V^* = 0 \quad (1-29)$$

(3) 基于混合变分原理的混合法, 部分选取节点位移、部分选取节点应力作为基本变量。相对而言, 在大多数问题中位移法远比应力法简便。

### 3. 集合单元

集合所有单元的刚度方程, 得到整体刚度方程的一般表达式:

$$K\Delta = P_D + P_E = P \quad (1-30)$$

式中,  $K$  为整体刚度矩阵;  $\Delta$  为所有节点的位移列向量;  $P_D$  为荷载直接作用节点的位移列向量;  $P_E$  为等效荷载节点位移列向量;  $P$  为综合等效荷载节点位移列向量。

### 4. 处理约束条件

利用约束条件, 对没有唯一解的整体刚度方程进行处理;

### 5. 求解节点位移

通过求解约束处理后的式(1-30), 得到体系所有节点的位移  $\Delta$ 。

### 6. 求解单元的应力应变

将  $\Delta$  中的位移列向量  $\delta$  取出, 便可求解所有单元的应力与应变, 最后得到模型整体的应力应变计算结果, 完成计算过程。

## 1.5 有限元计算收敛准则

有限元法将一个具有无限个自由度的连续介质分割成若干有限自由度的单元集合, 使体系具有有限的自由度。理论上, 用有限个单元的近似解代替无限自由度的真解, 是永远无法完全对等的, 多个有限自由度单元计算结果的集合在多大程度上逼近于无限自由度的真解, 是 ABAQUS 计算收敛性的关键, 因此需要对某些情况进行有限化的定义。应用位移模式进行离散单元分析时, 需要满足以下几个条件:

(1) 位移函数应反映单元的常应变。即单元位移函数中须包含线性项, 使单元(网格)尺寸无限小时令单元应变趋于一个常量, 否则针对形状极度不规则的模型或追求高精度模拟而需要网格划分十分精细的情况, 计算量将过于庞大, 且可能因始终无法达到要求精度而进行数学意义上的无限计算、永不收敛。

(2) 单元的刚体运动不引起应变。这是条件(1)中位移常数等于零时的特例, 也是最为基本的条件, 否则体系在坐标轴上产生的任何微小平移或转动都会产生应变, 由此模型在较大荷载

作用下的简单静力计算都极可能不收敛,更是无法适用于动力分析等更高难度的问题。

(3) 位移函数仅对相邻单元接触面产生有限的应变。

ABAQUS 的计算收敛性通过网格的规则性、分析步的最大步长 Maximum Increment 以及最小步长 Minimum Increment 的设置来控制,且表现出很高的智能性:一次步长计算迭代最多有 16 次,在此之内未收敛,ABAQUS 将以 1/4 步长进入下一个步长计算;步长达到 Minimum Increment 而计算仍不收敛时分析终止;若连续两个步长都在少于 5 次迭代的情况下收敛,ABAQUS 会自动将下一个步长增大 1/2,在尽量保证收敛性的同时实现计算过程的自动加速。