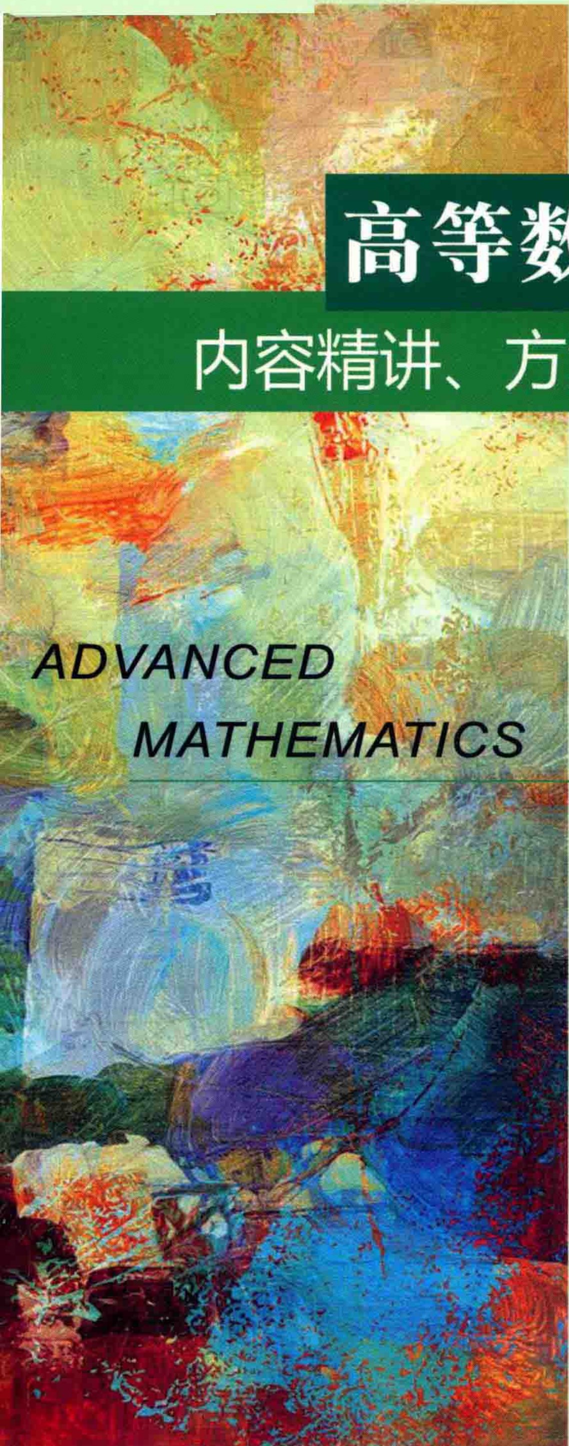
二维码更新

新考题、新题型、新解答



高等数学竞赛教程：

内容精讲、方法进阶、竞赛实战

ADVANCED
MATHEMATICS

◎ 主编 马儒宁 朱晓星

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等数学竞赛教程：
内容精讲、方法进阶、竞赛实战

主编　马儒宁　朱晓星
参编　肖光世　袁　泉

机械工业出版社

本书是为本科生参加各级别大学生数学竞赛（非数学专业）编写的辅导教材.

本文通过“内容总结与精讲”梳理高等数学中的关键内容、核心方法，通过“典型例题与方法进阶”对各类竞赛各种考试中的高频题、富有技巧性的难题进行重点解析，通过章节后练习巩固学习效果，同时分类整理和精选了历届全国大学生数学竞赛和江苏省高等数学竞赛的真题，供参加竞赛的读者实战演练.

本书内容详细、讲解透彻、例题丰富多层次，必能助学习高等数学、准备竞赛或考研的同学一臂之力.

本书可供读者自学或作为竞赛培训课程教材使用，同时也可作为学习高等数学（微积分、工科数学分析等）的参考资料或考研的复习资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学竞赛教程：内容精讲、方法进阶、竞赛实战/马儒宁，朱晓星主编．—北京：机械工业出版社，2019.2

ISBN 978-7-111-61998-7

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①马…②朱…　Ⅲ.①高等数学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第026889号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：汤　嘉　责任编辑：汤　嘉　韩效杰
责任校对：郑　婕　封面设计：张　静
责任印制：张　博
河北鑫兆源印刷有限公司印刷
2019年2月第1版第1次印刷
169mm×239mm·17印张·1插页·349千字
标准书号：ISBN 978-7-111-61998-7
定价：45.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：010－88379833
读者购书热线：010－88379649

网络服务
机工官网：www.cmpbook.com
机工官博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金书网：www.golden-book.com

前　言

开展大学生数学竞赛，主要目的是激发大学生学习数学的兴趣与热情，活跃思想，促使学生通过准备以及参加竞赛在抽象思维、逻辑推理、空间想象、科学计算以及综合运用数学知识分析和解决问题的能力方面有较大的提升；同时，也尝试推动大学数学的教学体系、教学内容和方法等方面的改革，提高教学质量.

中国数学会主办的全国大学生数学竞赛（包括每年十月份的预赛和次年三月份的决赛）已成为我国影响最大、参赛面最广的大学生基础学科竞赛，每年吸引了近千所高校、十余万名学生参加. 该竞赛始于2009年，其前身是1988年开始举办的北京市大学生数学竞赛. 除了国家级的竞赛，许多省、市、区也都组织了各自的大学生数学竞赛. 江苏省作为科技强省，组织的“江苏省普通高校高等数学竞赛”，是其中影响较大的一个. 其始于1991年，目前每年一届，每届参赛高校一百余所，参赛学生一万余名.

非数学专业的大学生数学竞赛内容均是以高等数学为主（全国大学生数学竞赛预赛和江苏省高等数学竞赛都限于高等数学内容），本书就是为参赛学生准备的高等数学竞赛辅导教材. 全书整合重组了高等数学的全部内容体系，共分为五章：“数列极限与数项级数”“一元函数极限、连续与微分”“积分及其应用与微分方程”“空间解析几何与多元函数微分”“多元函数积分及其应用”. 每章均根据内容分为若干节，每节包括以下四部分：

内容总结与精讲——融合梳理高等数学中的关键内容、核心方法，包括重要的公式、定理及其延伸；

典型例题与方法进阶——280余道典型例题，均为各类竞赛各种考试中的高频题、富有技巧性的难题等，对其进行重点解析；

章节后练习——300余道练习题，分为A组和B组两个层次，循序渐进，强化学习效果，同时帮助读者衡量已达到的水平和具有的能力；

竞赛实战——精选和分类整理了300余道历届全国大学生数学竞赛（非数学专业组预、决赛）和江苏省高等数学竞赛（本科一级）的真题，也分为A组和B组两个层次，供参加竞赛的学生实战演练.

相比其他的高等数学辅导教材，本书强调课本内容的整合与重组，注重思想和方法的提炼与扩充，以及知识点的串联与总结，对高等数学内容进行实质的提升，以符合大学生数学竞赛的需求，例题和习题丰富而层次分明，致力于促进学生高等数学能力的进阶.

本书另一个重要的特色是，通过扫描页码二维码，可在线获得与该页内容有关的丰富资料：本页内容的延伸、练习题、竞赛真题的详细解答、重点难点的语音讲解等. 而且内容会不断更新，例如逐渐加入新一届竞赛试题等.

本书的例题和习题部分为作者原创，其余部分则来源于研究生入学考试、国内外高等数学竞赛以及相关参考书，在此一一表示致谢！

由于时间仓促，编者水平有限，书中的缺点、错误和疏漏在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

目　录

第一章 数列极限与数项级数

第一节 数列极限

1 内容总结与精讲

◆ **数列的收敛与发散**

1. "$\varepsilon-N$"定义：$\{x_n\}$为数列，A为给定实数，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有$|x_n-A|<\varepsilon$，称数列$\{x_n\}$收敛于A，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.（等价于数列$\{x_n\}$中满足$|x_n-A|\geqslant\varepsilon$的只有有限项）

2. 无穷小：若上述的$A=0$，则称数列$\{x_n\}$为无穷小数列，简称为无穷小量或无穷小；

3. 无穷大：若$\forall M>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有$|x_n|\geqslant M$（$x_n\geqslant M$或$x_n\leqslant -M$），称数列$\{x_n\}$为无穷大数列（正无穷大或负无穷大数列），一般记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$（$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$或$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$）.

注：(1) 数列$\{x_n\}$收敛指收敛于某给定实数A，若数列$\{x_n\}$不收敛于任意实数，或$\{x_n\}$为无穷大（包括正无穷大或负无穷大），都称数列$\{x_n\}$发散；

(2) 定义中的不等式$|x_n-A|<\varepsilon$可以改为$|x_n-A|\leqslant\varepsilon$、$|x_n-A|<k\varepsilon$、$|x_n-A|\leqslant k\varepsilon$（$k$为给定正数）等；

(3) 定义中的正整数N依赖于ε但不唯一，$n>N$可以改为$n\geqslant N$；

(4) 定义提供了证明数列$\{x_n\}$收敛于给定数A的方法，但未提供如何求A的方法（当使用定义求极限时，一般先猜测极限值，然后用定义证明）；

(5) 否定说法：

(a) 数列$\{x_n\}$不收敛于$A\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N>0$，$\exists n_0>N$，使得$|x_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0$；

子列描述：数列$\{x_n\}$不收敛于$A\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$及$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$，使得$\forall k$，$|x_{n_k}-A|\geqslant\varepsilon_0$；

(b) 数列$\{x_n\}$发散$\Leftrightarrow$对$\forall A\in\mathbf{R}$，$\exists\varepsilon_0>0$，对$\forall N>0$，$\exists n_0>N$，使得$|x_{n_0}-A|\geqslant\varepsilon_0$；

子列描述：数列$\{x_n\}$发散$\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0$及$\{x_n\}$的两个子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$，$\{x_{n_k}^{(2)}\}$，使得$\forall k$，$|x_{n_k}^{(1)}-x_{n_k}^{(2)}|\geqslant\varepsilon_0$.

◆ **数列收敛的性质**

1. 唯一性：若数列$\{x_n\}$收敛，则具有唯一的极限.

2. 有界性：收敛数列必为有界数列（若数列$\{x_n\}$收敛，则存在正数M，使得$\forall n$，$|x_n|\leqslant M$）.

注：(1) 无界数列一定发散；

(2) 数列$\{x_n\}$无界$\Leftrightarrow\{x_n\}$存在子列$\{x_{n_k}\}$为无穷大量；特别地，若数列$\{x_n\}$无上界，则$\{x_n\}$一定存在以$+\infty$为极限的子列，若数列$\{x_n\}$无下界，则$\{x_n\}$一定存在以$-\infty$为极限的子列（为无穷大量的数列或以$+\infty$、$-\infty$为极限的数列仍为发散数列）.

3. 保号性与保序性（保不等式性）：

(1) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A>0$，则对任意的$0<p<A$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有
$$x_n>p>0;$$

(2) 若数列$\{x_n\}$收敛，且$\exists N>0$，当$n>N$时，$x_n\geqslant 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant 0$；

(3) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n>\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，则$\exists N>0$，当$n>N$时，有$x_n>y_n$；

(4) 若数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$收敛，且$\exists N>0$，当$n>N$时，$x_n\geqslant y_n$，则
$$\lim_{n\to\infty}x_n\geqslant\lim_{n\to\infty}y_n.$$

注：由极限的不等式得到数列的不等式（如 (1) 和 (3)），条件中极限的不等式必须为严格不等式（条件是强的）；由数列的不等式得到极限的不等式（如 (2) 和 (4)），无论条件中数列的不等式严格与否，结论中极限的不等式只能是非严格不等式（结论是弱的）.

4. 四则运算性：两个收敛数列的和、差、积、商仍然收敛，且和、差、积、商的极限为极限的和、差、积、商（作商时要求分母及其极限不为零）.

注：(1) 可以由两个收敛数列的运算推广到任意有限个（个数确定）收敛数列的运算；

(2) 两个数列中一个收敛，一个发散，其和与差一定发散，但积与商可能收敛，可能发散；

(3) 两个发散的数列，其四则运算后可能收敛，也可能发散；

(4) 提供了求数列极限的一种方法（将复杂数列分解为有限个简单数列的四则运算）.

5. 子列收敛性：若数列$\{x_n\}$收敛（于A）$\Leftrightarrow$对$\{x_n\}$的任意子列$\{x_{n_k}\}$，$\{x_{n_k}\}$均收敛（于A）.

注：(1) 若数列$\{x_n\}$收敛于$A\Leftrightarrow\{x_{2n}\}$，$\{x_{2n-1}\}$均收敛于$A$（利用奇偶数列极限相等是证明数列收敛或求数列极限的一种方法）；

(2) 若$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$发散，则$\{x_n\}$一定发散；

(3) 若$\{x_n\}$的两个子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$，$\{x_{n_k}^{(2)}\}$收敛于不同的极限，则$\{x_n\}$一定发散.

◆ **数列收敛的判定准则**

1. 迫敛性（夹逼准则、两边夹定理）：设数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足

（1）$\forall n$，$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，（2）$\{x_n\}$，$\{z_n\}$收敛且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，

则数列$\{y_n\}$也收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

注：本定理既给出了证明数列收敛的方法，也给出一种求数列极限的方法（关键是利用合适的放缩，建立不等式）.

2. 单调有界准则：单调有界数列一定收敛.

注：（1）一般分为单调递增有上界和单调递减有下界两种情况；

（2）单调数列的任意子列也单调；

（3）单调数列的某子列收敛，则单调数列一定收敛；

（4）单调数列的某子列有界，则单调数列一定收敛；

（5）证明数列单调的方法：（a）利用递推式或基本不等式直接证明，（b）数学归纳法，（c）将数列通项中的 n 视为 x，利用对 x 求导的方法来证明；

（6）利用单调收敛准则求递推数列极限的步骤：（i）证明数列单调且有界，（ii）在递推式两边同时求极限，得到极限满足的等式，从而求出极限值.

3. 柯西收敛准则：数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件为$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 n，$m > N$ 时，有$|x_n - x_m| < \varepsilon$.

注：（1）等价描述：数列$\{x_n\}$收敛$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，对$\forall p \in \mathbf{N}$，有$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$；

$\Leftrightarrow \exists$收敛于 0 的数列 $\{a_n\}$，对$\forall p \in \mathbf{N}$，有$|x_{n+p} - x_n| \leqslant a_n \to 0 \ (n\to\infty)$；

（2）否定说法：数列$\{x_n\}$发散$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$，$\forall N > 0$，$\exists n_1$，$n_2 > N$，使得$|x_{n_1} - x_{n_2}| \geqslant \varepsilon_0$；

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$及$\{x_n\}$的两个子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$，$\{x_{n_k}^{(2)}\}$，使得$\forall k$，$|x_{n_k}^{(1)} - x_{n_k}^{(2)}| \geqslant \varepsilon_0$；

（3）柯西收敛准则证明数列收敛，不需要知道数列的极限值；

（4）柯西收敛准则给出了证明数列收敛的方法，但没有给出求极限值的方法.

◆ **Stolz 公式与平均收敛定理**

1. Stolz 公式：设$\{y_n\}$是单调增加的正无穷大量，且$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$（$A$ 可以是有限数或 $+\infty$，$-\infty$），则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

注：Stolz 公式可以看成推广的“离散型洛必达法则”.

2. 平均收敛定理：

（1）算术平均收敛定理：若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = A$；

（2）几何平均收敛定理：若 $x_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A.$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}=A.$

注：平均收敛定理说明，只要某数列收敛，其前 n 项的算术平均值和几何平均值都收敛，但是逆命题不成立（请举反例）. 这说明数列前 n 项的平均值收敛，是比数列收敛弱的性质，在无法保证数列收敛时，利用平均值的极限代替数列极限，不失为实际应用中的一种方法.

◆ **和式的极限转化为定积分**

在定积分的定义 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ 中，选择 $[a,b]$ 特定的分割方式以及 ξ_k 特定的选取方式得到和式，其极限即为定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值.

一般使用将 $[a,b]$ n 等分的方式，并取 ξ_k 为小区间的右端点（或左端点），则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left[a+\frac{k}{n}(b-a)\right]=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地，若 $[a,b]=[0,1]$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2　典型例题与方法进阶

例 1. 证明：数列 $\sqrt{a}$，$\sqrt{a+\sqrt{a}}$，$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$，$\cdots(a>0)$ 极限存在，并求出它的极限.

解　设 $x_1=\sqrt{a}$，$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}=\sqrt{a+x_1}$，$x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}=\sqrt{a+x_2}$ 故数列的一般项为 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$.

因 $a>0$ 有 $x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a+\sqrt{a}}=\sqrt{a+x_1}=x_2$，设 $x_{n-1}<x_n$，则 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}<\sqrt{a+x_n}=x_{n+1}$，故数列 $\{x_n\}$ 为单调增加数列.

又因 $x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$，设 $x_{n-1}<\sqrt{a}+1$ 则

$$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}+1.$$

故 $\{x_n\}$ 有上界，因此数列 $\{x_n\}$ 极限存在，设 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=A$ 因 $x_n^2=a+x_{n-1}$ 取极限得 $A^2=a+A$ 解出得 $A=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$，舍去负值 $\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

例 2. 若存在 $0<r<1$ 使得数列 $\{x_n\}$ 满足 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant r|x_n-x_{n-1}|$，证明：$\{x_n\}$ 收敛.

证明　由于 $|x_n-x_{n-1}|\leqslant r|x_{n-1}-x_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant r^{n-2}|x_2-x_1|$，则

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\leqslant r^{n+p-2}|x_2-x_1|+\cdots+r^{n-1}|x_2-x_1|$$

$$\leqslant r^{n-1}\frac{|x_2-x_1|}{1-r}\to 0\ (n\to\infty).$$

由柯西收敛准则，数列$\{x_n\}$收敛.

例 3. 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n$ $(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求该极限；

(2) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解　(1) 因为$0<x_1<\pi$，则$0<x_2=\sin x_1\leqslant 1<\pi$，可得$0<x_{n+1}=\sin x_n\leqslant 1<\pi$，$n=1,2,\cdots$，则数列$\{x_n\}$有界.

又由于$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\sin x_n}{x_n}<1$，（因当$x>0$时，$\sin x<x$），则有$x_{n+1}<x_n$，可见数列$\{x_n\}$单调减少，故由单调减少有下界数列必有极限知极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，在$x_{n+1}=\sin x_n$两边令$n\to\infty$，得$l=\sin l$，解得$l=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) 因$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$，由（1）知该极限为$1^\infty$型，令$t=x_n$，则$n\to\infty$，$t\to 0$，故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to0}\exp\left[\frac{1}{t^2}(-1)\right]=\exp\left[\lim_{t\to0}\frac{\sin t-t}{t^3}\right],$$

又因为　$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t-t}{t^3}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\cos t-1}{3t^3}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{-\sin t}{6t}=-\dfrac{1}{6}$.

因此　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

例 4. 对于数列$\{x_n\}$，证明以下结论：

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|=l<1$，则$\{x_n\}$为无穷小数列；

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=l<1$，则$\{x_n\}$为无穷小数列；

(3) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$；

(4) 若$x_n\geqslant 0$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$.

证明 (1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|=l<1$，由数列极限的保号性，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，对$\forall n\geqslant N$都有

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\leqslant\frac{l+1}{2}=r<1\Rightarrow|x_n|=|x_N|\cdot\left|\frac{x_{N+1}}{x_N}\right|\cdot\left|\frac{x_{N+2}}{x_{N+1}}\right|\cdot\cdots\cdot\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right|\leqslant|x_N|\cdot r^{n-N}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}|x_N|\cdot r^{n-N}=0$，故$\{x_n\}$为无穷小数列.

（2）若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=l<1$，同上，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，对$\forall n\geqslant N$都有

$$\sqrt[n]{|x_n|}\leqslant\frac{l+1}{2}=r<1\Rightarrow|x_n|\leqslant r^n.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$，故$\{x_n\}$为无穷小数列.

（3）由于

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a=\frac{(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_n-a)}{n},$$

因此只需证$\{x_n\}$为无穷小数列的情形.

此时，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1>0$，当$n>N_1$时，有$|x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. 由于$x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}$为固定数，可取$N>N_1$，使得$\frac{|x_1+\cdots+x_{N_1}|}{N}<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是当$n>N$时，有

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right|\leqslant\frac{|x_1+\cdots+x_{N_1}|}{n}+\frac{|x_{N_1+1}+\cdots+x_n|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0.$$

（4）若$a=0$，由于$0\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，根据（3）的结论得证；

若$a>0$，知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}$，由（3）知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}=\frac{1}{a}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}=a$，由平均值不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

根据迫敛性可得证.

评注：利用定义证明数列极限收敛于给定值，关键是估计数列通项和极限值的差（使其可以任意小），经常使用分解的方法将复杂项分为若干简单、易估计项的和，然后“逐个击破”. 结论（3）和结论（4）即为平均值收敛定理，它们的逆命题不成立.（请举反例）

例5. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=AB$.

证明 记$a_n=x_n-A$，$b_n=y_n-B$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，$\exists M>0$，使得$|b_n|\leqslant M$. 由于

$$\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=AB+A\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}+B\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}+$$
$$\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}$$

根据算术平均值收敛定理可得：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$，并且

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}\right|\leqslant M\lim_{n\to\infty}\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}=0,$$

故得证.

评注：本题亦可直接利用定义来证明；将非零极限分解为常数和无穷小的和是简化问题的重要手段.

例 6. 若 $x_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$，证明：当 $p>1$ 时，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明　对任意的 $m>n$，设 $2^k\leqslant n<m\leqslant 2^{k+l}$，其中 k，$l\in\mathbf{N}_+$，注意到对任意的 $k\in\mathbf{N}_+$ 都有

$$\frac{1}{(2^k+1)^p}+\frac{1}{(2^k+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+1})^p}<\frac{2^k}{(2^k)^p}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$$

因此

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&=\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{m^p}\leqslant\frac{1}{(2^k+1)^p}+\frac{1}{(2^k+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+l})^p}\\&=\left[\frac{1}{(2^k+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+1})^p}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{(2^{k+l-1}+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+l})^p}\right]\\&<\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k+\cdots+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{k+l-1}<\frac{1}{2^{p-1}-1}\cdot\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，取 $k=[\log_2 n]\to\infty$，由于 $p>1$ 时，$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{2^{p-1}-1}\cdot\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{k-1}=0$，故由柯西收敛准则，$\{x_n\}$ 收敛.

例 7. 设 $x_1=2$，$x_2=2+\frac{1}{x_1}$，…，$x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

证明　（证法一）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由于 $x_n\geqslant 2$，可知 $A\geqslant 2$. 在递推式 $x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$ 两边同时求极限，可得

$$A=2+\frac{1}{A}\Rightarrow A=1+\sqrt{2}.$$

下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=1+\sqrt{2}$. 由于：

$$|x_n-A|=\left|\left(2+\frac{1}{x_{n-1}}\right)-\left(2+\frac{1}{A}\right)\right|=\left|\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{A}\right|=\frac{|A-x_{n-1}|}{x_{n-1}A}$$

$$\leqslant\frac{|x_{n-1}-A|}{4}\leqslant\frac{|x_{n-2}-A|}{4^2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{|x_1-A|}{4^{n-1}}=\frac{|2-(1+\sqrt{2})|}{4^{n-1}}=\frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}},$$

以及$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}}=0$，可得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=1+\sqrt{2}$.

评注：由于数列不具有单调性，本题不能用单调收敛准则证明极限的存在性；先在数列收敛的前提下得到极限值，然后通过极限定义证明数列的确收敛于该极限，这是处理非单调递推数列的一种方法；此外，可以注意到该数列的奇子列和偶子列分别具有单调性，因此也可以通过奇偶子列收敛于同一极限值来证明.

（证法二）由于

$$|x_n-x_{n-1}|=\left|\left(2+\frac{1}{x_{n-1}}\right)-\left(2+\frac{1}{x_{n-2}}\right)\right|=\frac{|x_{n-1}-x_{n-2}|}{x_{n-1}x_{n-2}}\leqslant\frac{|x_{n-1}-x_{n-2}|}{4}\leqslant\cdots\leqslant\frac{|x_2-x_1|}{4^{n-2}},$$

则$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\leqslant\frac{|x_2-x_1|}{4^{n+p-2}}+\cdots+\frac{|x_2-x_1|}{4^{n-1}}\leqslant$

$\frac{4}{3}\frac{|x_2-x_1|}{4^{n-1}}\to 0\ (n\to\infty)$

由柯西收敛准则，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由于$x_n\geqslant 2$，可知$A\geqslant 2$. 在递推式$x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$两边同时求极限，可得$A=2+\frac{1}{A}\Rightarrow A=1+\sqrt{2}$.

评注：若数列$\{x_n\}$满足$|x_{n+1}-x_n|\leqslant r|x_n-x_{n-1}|$（常数$r$满足$0<r<1$），则称其为**压缩数列**. 由柯西收敛准则（例2）可知，**压缩数列一定收敛**. 本题中的数列$\{x_n\}$满足了压缩数列的条件.（若$x_{n+1}=f(x_n)$，且$|f'|\leqslant r<1$，则由拉格朗日中值定理可知数列$\{x_n\}$为压缩数列）

例8. 设$x_0=a$，$0<a<\frac{\pi}{2}$，$x_n=\sin x_{n-1}$（$n=1,2,\cdots$），求证：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n=\sqrt{3}$.

证明 （1）由于$0\leqslant x_n\leqslant 1$且$x_n=\sin x_{n-1}\leqslant x_{n-1}$（$n=1,2,\cdots$），故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$x_n=\sin x_{n-1}$两边取极限，可知$A=\sin A\Rightarrow A=0$，得证；

（2）只需证$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2=3$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，知$\left\{\frac{1}{x_n^2}\right\}$为正无穷大量，根据 Stolz 公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\dfrac{1}{x_n^{\ 2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\dfrac{1}{x_n^{\ 2}}-\dfrac{1}{x_{n-1}^{\ 2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2\cdot x_n^2}{x_{n-1}^2-x_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2\cdot\sin^2x_{n-1}}{x_{n-1}^2-\sin^2x_{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^{\ 2}\cdot\sin^2x_{n-1}}{(x_{n-1}+\sin x_{n-1})(x_{n-1}-\sin x_{n-1})}$$

由于$\{x_n\}$为无穷小量，根据 $\sin x\sim x$，$x+\sin x\sim 2x$，$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3\,(x\to 0)$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_n^2}}=3.$

例 9. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{n}}\right).$

解　$\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\dfrac{1}{n}}<\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n},$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

另一方面，$\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\dfrac{1}{n}}>\dfrac{1}{n+1}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)=$ $\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

所以由夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\dfrac{1}{n}}\right)=\dfrac{2}{\pi}.$

例 10. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n-1}}{n}+\dfrac{\sqrt{2n-1}}{2n}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n\cdot n-1}}{n\cdot n}\right).$

解　对任意的 $k=1,\cdots,n$，$\dfrac{\sqrt{kn-1}}{kn}<\dfrac{1}{\sqrt{nk}}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{k}{n}}}$，同时

$$\frac{\sqrt{kn-1}}{kn}>\frac{\sqrt{kn-k}}{kn}=\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{k}{n}}},$$

于是有 $\sqrt{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\leqslant\frac{\sqrt{n-1}}{n}+\frac{\sqrt{2n-1}}{2n}+\cdots+\frac{\sqrt{n\cdot n-1}}{n\cdot n}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n-1}{n}}=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n}+\frac{\sqrt{2n-1}}{2n}+\cdots+\frac{\sqrt{n\cdot n-1}}{n\cdot n}\right)=2.$$

评注：使用定积分求和式极限，关键要将和式化为积分和的形式，和式中的每一项必须为分割后的小区间长度乘上被积函数在小区间中某点的值；在上述例题中，对和式的通项适当放缩，可以化为积分和的形式.

例 11. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin(\sqrt{n^2+i}\cdot\pi)$.

解 由于 $\sin(\sqrt{n^2+i}\cdot\pi)=(-1)^n\cdot\sin(\sqrt{n^2+i}\cdot\pi-n\pi)=$
$(-1)^n\cdot\sin\left(\frac{i}{\sqrt{n^2+i}+n}\pi\right)$，注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{i}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin(\sqrt{n^2+i}\cdot\pi)=\frac{2}{\pi}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{i}{\sqrt{n^2+i}+n}\pi\right)-\sin\left(\frac{i}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

对任意的 $i=1,\cdots,n$，由于

$$\left|\sin\left(\frac{i}{\sqrt{n^2+i}+n}\pi\right)-\sin\left(\frac{i}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant\left|\frac{i}{\sqrt{n^2+i}+n}\pi-\frac{i}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right|$$
$$=i\pi\frac{i}{2n(\sqrt{n^2+i}+n)^2}\leqslant\frac{\pi}{8}\cdot\frac{i^2}{n^3}\leqslant\frac{1}{n}$$

故 $\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{i}{\sqrt{n^2+i}+n}\pi\right)-\sin\left(\frac{i}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]\right|\leqslant\frac{1}{n}\to0$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin(\sqrt{n^2+i}\cdot\pi)=\frac{2}{\pi}.$$

评注：对于不能直接化为积分的和式，可考虑其与可化为积分和式的差异，只要保证差异累积之后仍为无穷小即可.

例 12. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\int_0^1f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}[f(1)-f(0)].$$

证明 记 $A_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$，根据定积分定义，有 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\int_0^1f(x)\mathrm{d}x$. 显然

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - A_n\right) = 0$，下面需要求$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - A_n\right]$.

记 $x_k = \frac{k}{n}$，则 $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\mathrm{d}x$，记 $J_n = n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$，则

$$J_n = n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x) - f(x_k)]\mathrm{d}x.$$

由于$f(x)$连续可导，则$\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}$连续，同时 $x-x_k$ 在区间(x_{k-1},x_k)上恒负，由积分中值定理，存在 $\xi_k\in(x_{k-1},x_k)$使得

$$\begin{aligned} J_n &= n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}(x-x_k)\mathrm{d}x = n\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k - x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k - x_k}. \end{aligned}$$

对函数$f(x)$在区间$[\xi_k,x_k]$上使用拉格朗日中值定理，存在 $\eta_k\in(\xi_k,x_k)\subset(x_{k-1},x_k)$使得

$$J_n = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k - x_k} = -\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}f'(\eta_k).$$

由于$f'(x)$可积，根据定积分定义可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f'(\eta_k) = \int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = f(1)-f(0),$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}J_n = -\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]$.

评注：在定积分定义中，当对区间$[0,1]$ n等分时，无论ξ_k取区间$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$的左端点、右端点或其他点，都有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 本题考虑了$\xi_k$取右端点时，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$和$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)$的差（一个无穷小）与$n$（无穷大）乘积的极限，其值为$-\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]$. 若$\xi_k$取左端点时，这个极限是多少？若取区间中点时，情况又如何呢？

3　本节练习

（A 组）

1. 利用夹逼准则求下列数列的极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 2n}$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$.

2. 利用单调有界准则证明下列数列的极限存在并求其值：

（1）设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$，$n=1,2,\cdots$；

（2）设 $0<x_1<1$，$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$，$n=1,2,\cdots$；

（3）设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$，$n=1,2,\cdots$；

（4）设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{4}{x_n}\right)$，$n=1,2,\cdots$.

3. 设对于数列 $\{x_n\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

4. 设数列 $\{x_n\}$ 满足压缩性条件：$|x_{n+1}-x_n|\leqslant k|x_n-x_{n-1}|$，$n=2,3,\cdots$，其中，$0<k<1$，证明：$\{x_n\}$ 收敛.

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

6.（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p]^{q+1}}{[2^p+4^p+\cdots+(2n)^q]^{p+1}}$ $(p,q>0)$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$.

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}\prod\limits_{i=1}^{2n}(n^2+i^2)^{\frac{1}{n}}$.

（B 组）

1. 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{2(1+x_n)}{2+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

2. 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{a+x_n}{1+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，讨论数列 $\{x_n\}$ 的收敛性，并在收敛时求出其极限.

3. 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

4. 设 $x_0=a$，$x_1=b$，$x_n=\dfrac{1}{2}$ $(x_{n-1}+x_{n-2})$ $(n=2,3,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

5. 设 $\alpha>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}$.

6. 设 $0<x_1<1$，$x_{n+1}=x_n$ $(1-x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n$.

7. 给定两正数 a_1 与 b_1 $(a_1<b_1)$，

（1）令 $a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$，$b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$，$n=1,2,\cdots$；（2）令 $a_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$，