



全国硕士研究生农学门类入学

2015

数 学

历年真题与全真模拟题解析

王来生 主编

第8版

立足实战 把握规律


模拟演练 预测指导

考前练兵 查缺补漏



中国农业大学出版社

ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE



全国硕士研究生农学门类入学考试辅导丛书

2019

数 学

历年真题与全真模拟题解析

王来生 ◎ 主编

第8版

立足实战 把握规律

模拟演练 预测指导

考前练兵 查缺补漏



中国农业大学出版社

ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

数学历年真题与全真模拟题解析/王来生主编. —8版. —北京:中国农业大学出版社, 2018.8

ISBN 978-7-5655-2071-6

I. ①数… II. ①王… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 171023 号

书 名 数学历年真题与全真模拟题解析 第 8 版

作 者 王来生 主编

策划编辑 张 蕊

责任编辑 张 蕊

封面设计 郑 川

出版发行 中国农业大学出版社

社 址 北京市海淀区圆明园西路 2 号

邮政编码 100193

电 话 发行部 010-62818525,8625

读者服务部 010-62732336

编辑部 010-62732617,2618

出版部 010-62733440

网 址 <http://www.cau.edu.cn/caup>

e-mail cbsszs@cau.edu.cn

经 销 新华书店

印 刷 涿州市星河印刷有限公司

版 次 2018 年 8 月第 8 版 2018 年 8 月第 1 次印刷

规 格 787×1 092 16 开本 15.75 印张 385 千字

定 价 42.00 元

封面图片出处:© IMAGEMORE Co.,Ltd.

读者反馈邮箱 zhangrui973@126.com

图书如有质量问题本社发行部负责调换

主 编 王来生(中国农业大学)
副主编 王云诚(山东农业大学)
张良云(南京农业大学)
介跃建(中国农业大学)
陈 静(中国农业大学)
周志坚(中国农业大学)
杨丽明(中国农业大学)
徐义田(中国农业大学)
甄 苓(中国农业大学)
曾善玉(中国农业大学)
梁 玥(甘肃农业大学)

前 言

为帮助农学门类考研学生系统地复习和备考,在分析历年真题及有关课程教材、吸纳各有关高校辅导老师教学经验的基础上,我们精心组织编写了《数学复习指南暨习题解析》,同时配套编写了《数学历年真题与全真模拟题解析》,希望考生能通过这套书的学习和引导,温习贯通考试内容,巩固和掌握所学知识,提高解题能力和应试技巧。

《数学历年真题与全真模拟题解析》由两部分内容组成。第一部分是 19 套考研模拟试题,同时附有详细参考答案,并进行了详解,建议考生先做模拟试题,然后再看参考答案;第二部分给出历年考研真题及参考答案,供同学复习时参考。

尽管本着为考生着想、对教学负责的态度,反复斟酌拿捏内容的广度和深度,把握例题、习题和模拟题的代表性,尽心尽力编写好这套书,但仍不免有疏漏之处,恳请各位同学及老师们批评指正,以利我们今后不断地改进和提高。

预祝各位考生取得好成绩!

编 者

2018 年 8 月

目 录

全真模拟试题及解析

模拟试题一	3
模拟试题二	6
模拟试题三	9
模拟试题四	12
模拟试题五	15
模拟试题六	18
模拟试题七	21
模拟试题八	24
模拟试题九	26
模拟试题十	29
模拟试题十一	32
模拟试题十二	35
模拟试题十三	38
模拟试题十四	41
模拟试题十五	44
模拟试题十六	47
模拟试题十七	50
模拟试题十八	53
模拟试题十九	56
模拟试题一参考答案及解析	53
模拟试题二参考答案及解析	59
模拟试题三参考答案及解析	65
模拟试题四参考答案及解析	70
模拟试题五参考答案及解析	75
模拟试题六参考答案及解析	80
模拟试题七参考答案及解析	84
模拟试题八参考答案及解析	88
模拟试题九参考答案及解析	93
模拟试题十参考答案及解析	98
模拟试题十一参考答案及解析	103

模拟试题十二参考答案及解析	109
模拟试题十三参考答案及解析	115
模拟试题十四参考答案及解析	119
模拟试题十五参考答案及解析	124
模拟试题十六参考答案及解析	129
模拟试题十七参考答案及解析	134
模拟试题十八参考答案及解析	144
模拟试题十九参考答案及解析	150

历年真题及解析

2008 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题	141
2008 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题参考答案及解析	144
2009 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题	148
2009 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题参考答案及解析	151
2010 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题	157
2010 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题参考答案及解析	160
2011 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题	166
2011 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题参考答案及解析	169
2012 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题	175
2012 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题参考答案及解析	178
2013 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题	184
2013 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题参考答案及解析	187
2014 年全国硕士研究生招生考试农学门类联考数学试题	193
2014 年全国硕士研究生招生考试农学门类联考数学试题参考答案及解析	196
2015 年全国硕士研究生招生考试农学门类联考数学试题	202
2015 年全国硕士研究生招生考试农学门类联考数学试题参考答案及解析	205
2016 年全国硕士研究生招生考试农学门类联考数学试题	210
2016 年全国硕士研究生招生考试农学门类联考数学试题参考答案及解析	213
2017 年全国硕士研究生招生考试农学门类联考数学试题	235
2017 年全国硕士研究生招生考试农学门类联考数学试题参考答案及解析	238

模拟试题一

全真模拟试题及解析

模拟试题一

一、选择题:1~8 小 题,每小 题 4 分,共 32 分.下列每 题 给 出 的 四 个 选 项 中,只 有 一 个 选 项 是 符 合 题 目 要 求 的.请 将 所 选 项 前 的 字 母 填 在 括 号 内.

(1) 设 $a_n = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1} \sqrt{1+x^n} dx$, 则 极 限 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ 等 于 ().

(A) $(1+e)^{\frac{3}{2}} + 1$.

(B) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} - 1$.

(C) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} + 1$.

(D) $(1+e)^{\frac{3}{2}} - 1$.

(2) 设 函 数 $f(x) = |x^3 - 1| \varphi(x)$, 其 中 $\varphi(x)$ 在 $x = 1$ 处 连 续, 则 $\varphi(1) = 0$ 是 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处 可 导 的 ().

(A) 充 分 必 要 条 件.

(B) 必 要 但 非 充 分 条 件.

(C) 充 分 但 非 必 要 条 件.

(D) 既 非 充 分 也 非 必 要 条 件.

(3) 设 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, 则 当 $x \rightarrow 0^+$ 时 ().

(A) α 是 β 的 高 阶 无 穷 小.

(B) β 是 α 的 高 阶 无 穷 小.

(C) α 与 β 为 同 阶 无 穷 小, 但 不 等 价.

(D) α 与 β 为 等 价 无 穷 小.

(4) 设 $f(x)$ 为 连 续 函 数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$ 且 $t > 1$, 则 $F'(2)$ 等 于 ().

(A) $2f(2)$.

(B) $f(2)$.

(C) $-f(2)$.

(D) 0.

(5) 设 行 列 式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & a & 3 & b \end{vmatrix}$, 则 行 列 式 $D = ()$.

(A) $-a-b-5$.

(B) $a-b-5$.

(C) $a-b+5$.

(D) $a+b+5$.

(6) 设 三 阶 矩 阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 三 维 列 向 量 $\alpha = (a, 1, 1)^T$, 已 知 $A\alpha, \alpha$ 线 性 相 关, 则 $a = ()$.

(A) -1.

(B) 1.

(C) -2.

(D) 2.

(7) 下 列 各 函 数 中 是 随 机 变 量 分 布 函 数 的 为 ().

(A) $F_1(x) = \frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < +\infty$.

(B) $F_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

(C) $F_3(x) = e^{-x}, -\infty < x < +\infty$.

(D) $F_4(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan x, -\infty < x < +\infty$.

(8) 设 X 是 一 随 机 变 量, x_0 为 任 意 实 数, $E(X)$ 是 X 的 数 学 期 望, 则 ().

(A) $E(X - x_0)^2 = E(X - E(X))^2$.

(B) $E(X - x_0)^2 \geq E(X - E(X))^2$.

(C) $E(X - x_0)^2 < E(X - E(X))^2$.

(D) $E(X - x_0)^2 = E(X - E(X))^2$.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在题目中的横线上.

(9) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2+1}$, 则 $f(x)$ 的间断点为_____.

(10) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z = e^{2x-3z} + 2y$ 确定, 则 $3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

(11) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$, 则二重积分 $\iint_D x(x+y) dx dy =$ _____.

(12) 已知函数 $f(x)$ 是微分方程 $xf'(x) - f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ 满足初始条件 $f(1) = 0$ 的解, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____.

(13) 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 矩阵 A 的秩 $R(A) = 3$, 且 $\alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4, \beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$, 则方程 $Ax = \beta$ 的通解为_____.

(14) 设两两独立的三个随机事件 A, B, C 满足 $ABC = \phi, P(A) = P(B) = P(C) = x$, 则当 $x =$ _____时, $P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{4}$.

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.请将解答写在指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 计算积分 $I = \int_1^4 \frac{1}{x(1+\sqrt{x})} dx$.

(16) (本题满分 10 分) 设二元函数 $z = xy + f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$, 其中函数 f 具有二阶连续的偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(17) (本题满分 11 分) 求微分方程 $x \frac{dy}{dx} - 2y = 5x$ 的通解.

(18) (本题满分 11 分) 计算二重积分 $\iint_D \ln(xy) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

(19) (本题满分 10 分) 求不定积分 $I_n = \int \frac{1}{\sin^n x} dx$ 的递推公式 ($n \geq 2$, 正整数).

(20) (本题满分 10 分) 设 E 为 3 阶单位阵, $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 满足 $AB + E = A^2 + B$, 求矩阵 B .

(21) (本题满分 12 分) 设 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & x & 3 \end{pmatrix}$, 问当 x 取何值时, 方阵 A 有 3 个线性无关的特征

向量.

(22) (本题满 10 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} ax^2 + 2xy^2, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}$$

- 试求：(1) 常数 a ；
- (2) 分布函数 $F(x, y)$ ；
- (3) 边缘概率密度 $f_x(x), f_Y(y)$ 。
- (23) (本题满 11 分) 已知随机向量 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$ ，令 $Y = X^3$ ，求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} 。

模拟试题二

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在括号内.

- (1) 设 a 为常数且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)+a}{x} = 6$, 则 a 为().
(A) -1. (B) 1. (C) 0. (D) $-\frac{1}{2}$.
- (2) 设函数 $f(x)$ 可导,且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1)-f(1-x)}{2x} = 3$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 的切线斜率为().
(A) -1. (B) 6. (C) -2. (D) 1.
- (3) 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解,若 $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 ().
(A) 取得极大值. (B) 取得极小值.
(C) 在某邻域内单调增加. (D) 在某邻域内单调减少.
- (4) 设 $f(x) = \int_{\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt$, 求 $\int_0^{\pi} f(x) dx =$ ().
(A) 2. (B) 6. (C) -2. (D) 1.
- (5) 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 是 n 阶方阵, \mathbf{E} 为 n 阶单位矩阵. 若 $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{E}$, 则().
(A) $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ 或 $\mathbf{AB} = -\mathbf{E}$. (B) $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = 1$.
(C) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. (D) $(\mathbf{BA})^2 = \mathbf{E}$.
- (6) 若 2 阶方阵 \mathbf{A} 相似于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, \mathbf{E} 为 2 阶单位矩阵, 则 $\mathbf{A} - \mathbf{E}$ 相似于().
(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
- (7) 已知离散型随机变量 X 服从参数为 p 的两点分布, 即 $P(X=1) = p, P(X=0) = 1-p$, 当参数 $p =$ () 时方差 $D(X)$ 最大.
(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{2}{5}$. (C) 0. (D) 1.
- (8) 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $\varphi(x) = \begin{cases} a+bx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$. 已知数学期望 $E(X) = 0.6$, 则常数 a 与 b 的值为().
(A) $a = \frac{3}{5}, b = \frac{2}{5}$. (B) $a = \frac{2}{5}, b = \frac{6}{5}$.
(C) $a = \frac{1}{5}, b = \frac{6}{5}$. (D) $a = \frac{3}{5}, b = \frac{6}{5}$.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在题目中的横线上.

(9) 改变积分次序 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{y}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{y}} dx =$ _____.

(10) $x = 1$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{1 - e^{1-\frac{x}{1-x}}}$ 的第 _____ 类间断点.

(11) 设二元函数 $z = e^{\sin^2(x+y)}$, 则全微分 $dz =$ _____.

(12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1 - \sin 2t) dt}{x^2} =$ _____.

(13) 已知 3 阶矩阵 A 与向量 x 满足 $A^3 x = 3Ax - A^2 x$, 且向量组 $x, Ax, A^2 x$ 线性无关.

$P = (x, 2Ax + x, A^2 x), AP = PB$, 则 3 阶方阵 $B =$ _____.

(14) 一民航大巴载有 50 位旅客从机场开出, 旅客有 10 个车站可以下车, 如到达一车站没有人下车就不停车, 以 X 表示停车的次数, 则 $E(X) =$ _____.

三、解答题:15~23 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

证明: 当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$.

(16) (本题满分 10 分)

设 $z = xf\left(x, \frac{y}{x}\right)$ 且 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(17) (本题满分 10 分)

设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 通过点 $(0, 0)$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $y \geq 0$. 试确定 a, b, c 的值, 使得抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $x = 1, y = 0$ 所围图形的面积为 $\frac{4}{9}$, 且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有连续导数, 且满足

$$f(t) = 2 \iint_{x^2 + y^2 \leq t^2} (x^2 + y^2) f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy + t^4, \text{ 求 } f(x).$$

(19) (本题满分 10 分)

设 $F(x) = f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足以下条件: $f'(x) = g(x), g'(x) = f(x), f(0) = 0, f(x) + g(x) = 2e^x$.

(1) 求 $F(x)$ 满足的一阶微分方程.

(2) 求出 $F(x)$ 的表达式.

(20) (本题满分 11 分)

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

(21)(本题满分 11 分)

$$\text{设 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = (a\mathbf{E} + \mathbf{A})^2, a \text{ 为实数.}$$

(1) 求正交矩阵 \mathbf{C} , 使得 $\mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{C}$ 为对角形.

(2) a 为何值时, \mathbf{B} 为正定矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

已知每箱产品有 10 件, 其中次品数为 0、1、2 等可能, 从中任取 1 件, 若检验为次品, 则拒绝接收, 假设检验有误, 正品被误认为次品的概率为 2%, 1 件次品被漏查的概率为 5%, 求该产品通过验收的概率.

(23)(本题满分 11 分)

已知二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = a e^{-x^2 + bxy - y^2} \quad (a > 0), x, y \in (-\infty, +\infty).$$

问当 a, b 取何值时, X, Y 相互独立?

模拟试题三

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在括号内.

- (1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是().
(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln(1 + \sqrt{x})$.
(C) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$. (D) $1 - \cos \sqrt{x}$.
- (2) 函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调增区间是().
(A) $(-\infty, +\infty)$. (B) $[0, +\infty)$.
(C) $(-\infty, 0]$. (D) 不存在单调区间.
- (3) 设 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f'''(x_0) > 0$, 则下列选项中正确的是().
(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值. (B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.
(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值. (D) 点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
- (4) 积分 $I_1 = \iint_D \ln(x+y) d\sigma, I_2 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, I_3 = \iint_D (x+y) d\sigma$ 的大小是(), 其中 D 是由直线 $x = 0, y = 0, x + y = \frac{1}{2}$ 和 $x + y = 1$ 所围成的区域.
(A) $I_1 \leq I_2 \leq I_3$. (B) $I_1 \leq I_3 \leq I_2$.
(C) $I_2 \leq I_1 \leq I_3$. (D) $I_3 \leq I_2 \leq I_1$.
- (5) 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 满足 $AB = \mathbf{0}$, 若 $R(A) = n - 1$, 则().
(A) $R(B) = 1$. (B) $R(B) < 1$.
(C) $R(B) \leq 1$. (D) $R(B) \geq 1$.
- (6) 设 A 为 n 阶方阵, 则下列() 不成立.
(A) 若 A 可逆, 则矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量也是矩阵 A^{-1} 的属于特征值 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征值.
(B) A 的全部特征向量为方程 $(\lambda E - A)x = \mathbf{0}$ 的全部解.
(C) 若 A 存在属于特征值 λ 的 n 个线性无关的特征向量, 则 $A = \lambda E$.
(D) A 与其转置矩阵 A^T 有相同的特征值.
- (7) 设有二维随机变量 (X, Y) , 已知 $D(X) = 9, D(Y) = 4, X, Y$ 的相关系数为 $\rho_{XY} = \frac{1}{3}$, 则 $D(X - Y) = ()$.
(A) 15. (B) 9. (C) 13. (D) 5.
- (8) 设 $X \sim N(1, 2^2), X_1, X_2, \dots, X_n$ 为 X 的样本, 则().
(A) $\frac{\bar{X} - 1}{2} \sim N(0, 1)$. (B) $\frac{\bar{X} - 1}{4} \sim N(0, 1)$.

$$(C) \frac{\bar{X}-1}{\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

$$(D) \frac{\bar{X}-1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1).$$

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在题目中的横线上.

$$(9) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(a^{\frac{1}{x}} - b^{\frac{1}{x}}) (a, b > 0) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(10) y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \text{ 的水平渐近线的方程为 } y = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(11) 设有长为 12 厘米的非均匀杆 AB , AM 部分的质量与动点 M 到端点 A 的距离 x 的平方成正比, 杆的全部质量为 360 克. 则杆的质量表达式 $m(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, 杆在任一点 M 处的线密度 $\rho(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$(12) \text{ 设 } z = a^{\sqrt{x^2 - y^2}}, \text{ 其中 } a > 0, a \neq 1, \text{ 则全微分 } dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(13) \text{ 设 } \mathbf{A} \text{ 为 } 3 \text{ 阶矩阵, } \mathbf{A}^* \text{ 为其伴随矩阵, } |\mathbf{A}| = 2, \text{ 则 } |2\mathbf{A}|\mathbf{A}^*| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(14) \text{ 设事件 } A, B \text{ 的概率分别为 } \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \text{ 当 } A \text{ 与 } B \text{ 独立时, } P(B\bar{A}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、解答题:15~23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{已知 } y = \int_1^{1+\sin t} (1 + e^{\frac{1}{u}}) du, \text{ 其中 } t = t(x) \text{ 由 } \begin{cases} x = \cos 2v \\ t = \sin v \end{cases} \text{ 确定, 求 } \frac{dy}{dx}.$$

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足 $f(x) = f(x - \pi) + \sin x$, 且 $f(x) = x, x \in [0, \pi)$,

$$\text{计算定积分 } I = \int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx.$$

(17) (本题满分 11 分)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y \ln y - x + y = 0$ 确定, 试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近的凹凸性.

(18) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}, \text{ 计算二重积分 } I = \iint_D (x + |y|) dx dy.$$

(19) (本题满分 10 分)

$$\text{设 } x \in (-\infty, +\infty), \text{ 证明: } 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}.$$

(20) (本题满分 10 分)

设 3 阶方阵 \mathbf{A} 的特征值为 $1, 0, -1$, 对应的特征向量为

$$\alpha_1 = (1, 2, 2)^T, \alpha_2 = (2, -2, 1)^T, \alpha_3 = (-2, -1, 2)^T.$$

(I) 求方阵 \mathbf{A} ;

(II) 令 $\mathbf{P} = [-2\alpha_2, 3\alpha_3, \alpha_1]$, 求 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

(21) (本题满分 11 分)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为 3 阶方阵 \mathbf{A} 的 3 个不同的特征值, 相应的特征向量依次为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 令 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 试证 $\beta, \mathbf{A}\beta, \mathbf{A}^2\beta$ 线性无关.