刘小河 管萍 编著

先进控制理论

清华大学出版社

刘小河 管萍 编著

先进控制理论



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要阐述了目前在工程技术领域备受关注的先进控制理论分支，如最优控制、自适应控制、非线性控制初步、模糊控制、神经网络控制等。在分析各种控制理论各自特点的同时重点着眼于对它们的理解与应用，力求浅显易懂，避免深奥枯燥的纯理论证明与论述。突出实践应用，以实例给出各控制理论在工程领域的应用效果，以体现应用中最先进的理论与技术前沿。

本书可作为高等学校自动化、电气工程及其自动化等专业的教材，也可作为测控技术与仪器、机电一体化等相关专业的教学参考书。对从事控制工程领域研究、设计和开发的工程技术人员，本书也具有较好的参考价值。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。
版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

先进控制理论/刘小河，管萍编著. —北京：清华大学出版社，2019
ISBN 978-7-302-52634-6

Ⅰ. ①先…　Ⅱ. ①刘… ②管…　Ⅲ. ①自动控制理论－高等学校－教材　Ⅳ. ①TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 047087 号

责任编辑：王一玲　赵　凯
封面设计：常雪影
责任校对：李建庄
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn,010-62795954

印 刷 者：北京鑫丰华彩印有限公司
装 订 者：三河市溧源装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：175mm×245mm　　**印　　张**：12.25　　**字　　数**：271 千字
版　　次：2019 年 7 月第 1 版　　**印　　次**：2019 年 7 月第1 次印刷
定　　价：69.00 元

产品编号：057162-01

作者简介

刘小河，博士，教授,北京交通大学兼职博士生导师。北京市教学名师（2012），北京市创新拔尖人才（2006）。2006.5-2013.4年任教育部教学指导委员会自动化分委员会委员；曾任北京信息科技大学自动化学院院长，校学术委员会、学位委员会委员，控制科学与工程一级学科、控制理论与控制工程学科带头人；现兼任中国自动化学会应用专业委员会委员，北京人工智能学会常务理事；《冶金自动化》《北京信息科技大学学报》编委。 研究方向：非线性系统分析与控制，自适应控制。多年从事自动化、电气工程领域教学与研究；出版著作5部，在控制理论及应用、系统仿真学报、电子科学学刊、应用科学学报、中国电机工程学报、电工技术学报等学术刊物上及国内外学术会议发表论文80余篇，其中EI检索40余篇，核心刊物近30篇；主持国家自然科学基金项目、北京市自然科学基金项目、北京市教委创新拔尖人才等项目等10余项 。

管萍，博士，副教授。1989年于郑州工学院工业自动化专业获得学士学位，1997年于洛阳工学院电气工程系获得硕士学位，2004年于北京理工大学自动控制系获得工学博士学位。现为北京信息科技大学自动化学院教师。主要从事智能控制理论的研究及在工业和航空航天领域中的应用。主持过教育部科学技术研究重点项目、北京市优秀人才培养资助项目，参加过北京市教委科技发展计划重点项目、国家自然科学基金项目、北京市教委科技发展计划项目等研究工作。发表论文40余篇，参编专著、教材3部。

前言

先进控制理论内容广泛，一般包含线性系统理论、最优控制、最优估计、系统辨识、自适应控制、非线性系统控制、神经元网络、模糊控制、专家系统与专家系统控制、大系统理论等多个学科分支，是现代控制理论在深度和广度上的拓展。其中多个学科分支不但在理论上涌现出新的方法和研究成果，而且在现代控制系统与控制工程中的应用呈现出蓬勃发展的特点。随着现代科学技术的发展，高技术机电一体化设备的广泛应用，以经典控制理论为基础的传统控制技术已经无法满足现代工程技术人员的需要，电气工程、控制工程、航空航天工程、化工及机械工程等领域的工程技术人员需要对先进控制理论及应用有一定的了解，因此需要对相关专业的大学生在知识结构上增加先进控制理论的基本内容。近年来，不但自动化专业已经把先进控制理论作为高年级的重要专业课之一，而且越来越多的电气工程及其自动化、机电控制、测控技术等专业的高年级大学生及相关学科的研究生开设了相关课程。本书就是在这样的背景下产生的。

本书是在作者数次进行先进控制理论课程教学实践的基础上，根据相关专业大学生学习和工程创新的需要编写的。本书共分5章，除第1章介绍状态变量法分析与最优控制等现代控制理论的基础知识外，其余各章重点介绍了先进控制理论中近年来得到较多应用的学科分支，包括自适应控制、非线性系统控制初步、模糊控制和神经网络控制等领域的基本理论和基本分析设计方法。本书在分析各种控制理论各自特点的同时，重点着眼于对它们的理解与应用，力求浅显易懂，避免深奥枯燥的纯理论证明与论述。突出实践应用，以实例给出各控制理论在工程领域的应用效果，引导读者灵活应用书中理论进一步实现自己的应用目标。

本书具有如下特点：

(1) 注重理论体系的完整性，注意基本概念和基本方法的介绍，内容突出重点，力

求深入浅出，易于理解。通过合适的例题引入概念或帮助学生掌握主要分析和设计方法。

(2) 言简意赅，尽量以简洁的语言介绍各先进控制理论的发展过程、目前的研究状况、存在的主要问题、学科前沿、发展趋势以及应用概况。

(3) 注重联系实际，突出实践应用，并在相关章节介绍了包括作者在内的相关领域专家的研究成果及应用实例，以体现先进理论的前沿应用方法。

先进控制理论各个学科分支内容广泛，研究深入，常常应用现代数学工具论证相关结论。为了减少学生学习的难度，本书尽量采用比较浅显的表述方式来说明问题。对于某些定理(例如李雅普诺夫稳定性定理和极小值原理)及控制方法省略了证明或论证过程，主要通过例子理解定理相关条件的意义及应用条件。对相关理论感兴趣的读者可以参阅书末给出的参考文献，以获得更为系统、深入的知识。如果学生学习过现代控制理论的课程，教师在讲授中对第 1 章中的前两节可以略过或简要复习。全书内容可供 2 学分 32 学时的课程讲授。每章后的习题供教师选用，教师也可根据实际工程提炼出相关问题，采用相关理论的主要方法进行仿真作为大作业，这样的方式有助于帮助学生理解先进控制理论的各种方法的核心知识。

本书主要面向高等学校自动化专业的高年级学生，兼顾电气工程及其自动化、机电控制、测控技术等专业高年级大学生的学习需要，为他们提供合适的先进控制理论的教材，使他们全面了解、掌握当前在工程应用中成功或颇具前景的控制方法。对于需要先进控制理论知识的相关学科(例如电气工程学科、机械工程学科、测试技术学科及航空航天工程学科等)专业的研究生，本书也可以作为简明的入门参考书，为进一步掌握先进控制理论和方法提供基础。

本书由刘小河教授、管萍副教授编著。刘小河教授负责起草本书编写大纲，制定编写体例，并编写第 1 章至第 3 章，管萍副教授编写第 4 章和第 5 章。全书由刘小河统稿。在编写过程中，作者参阅了多部相关参考文献，引用了一些研究成果，同时也参考了作者及其学科团队成员以前编写的相关专著，参考了团队相关教师的研究成果。在此向相关文献作者及作者所在团队的相关教师表示衷心的感谢。

本书的出版得到北京市教学名师专项资金的资助，在此向北京市教委表示由衷的感谢。

在本书的立项、编写和出版过程中，得到了清华大学出版社的指导和大力支持，在此表示诚挚的感谢。

限于作者的能力和水平，书中谬误之处在所难免，恳请各位专家、学者及读者给予批评指正。

作　者

2019 年 4 月

目 录

第 1 章　状态空间方法基础与最优控制 …… 1

1.1　控制系统的状态变量描述及求解 …… 2
1.1.1　控制系统的状态变量描述 …… 2
1.1.2　状态空间描述与传递函数阵的相互转换 …… 4
1.1.3　线性定常连续系统状态方程的求解 …… 8
1.2　线性系统的可控性和可观测性 …… 15
1.2.1　可控性和可观测性的概念 …… 15
1.2.2　线性连续系统的可控性和可观测性判据 …… 16
1.3　李雅普诺夫稳定性分析 …… 24
1.3.1　李雅普诺夫稳定性的基本概念 …… 25
1.3.2　李雅普诺夫直接法的基本定理 …… 32
1.3.3　线性定常系统的稳定性判据 …… 34
1.3.4　按首次近似决定非线性系统稳定性 …… 36
1.4　最优控制 …… 38
1.4.1　最优控制问题 …… 38
1.4.2　利用变分法求解最优控制问题的方法 …… 42
1.4.3　极小值原理 …… 49
1.4.4　基于二次型性能指标的线性系统最优控制 …… 52
习题 …… 57

第 2 章　自适应控制 …… 60

2.1　自适应控制的基本概念 …… 60

2.1.1 自适应控制系统 …… 60
2.1.2 自适应控制系统的分类 …… 62
2.2 模型参考自适应控制 …… 65
2.2.1 模型参考自适应系统的数学描述 …… 65
2.2.2 梯度法 …… 66
2.2.3 基于稳定性理论的自适应控制系统设计方法 …… 70
2.3 自校正控制 …… 73
2.3.1 实时参数辨识 …… 74
2.3.2 最小方差控制 …… 77
2.3.3 广义最小方差自校正控制 …… 82
2.3.4 极点配置自校正技术 …… 85
习题 …… 93

第 3 章 非线性系统控制初步 …… 95

3.1 概述 …… 95
3.2 非线性控制系统的反馈线性化 …… 98
3.2.1 反馈线性化的基本概念 …… 99
3.2.2 状态空间的坐标变换 …… 101
3.2.3 非线性系统的反馈线性化 …… 107
3.3 非线性控制系统的渐近输出跟踪控制 …… 112
3.3.1 基于反馈线性化的非线性系统渐近模型跟踪控制 …… 112
3.3.2 仿真实例 …… 115
习题 …… 119

第 4 章 模糊控制 …… 121

4.1 模糊数学基础 …… 122
4.1.1 模糊集合 …… 122
4.1.2 模糊关系与模糊推理 …… 125
4.2 模糊控制基本原理 …… 128
4.2.1 模糊控制器的基本结构 …… 128
4.2.2 精确量的模糊化 …… 130
4.2.3 模糊规则设计 …… 132
4.2.4 输出信息的模糊判决 …… 132
4.2.5 基本模糊控制器的设计 …… 133
4.3 改进型模糊控制器 …… 135
4.3.1 参数自寻优模糊控制 …… 135

4.3.2 改善精度的模糊控制 …… 137
4.3.3 模糊 PID 控制 …… 138
4.3.4 T-S 模糊模型 …… 141
4.4 自适应模糊控制 …… 142
4.4.1 模糊推理系统 …… 142
4.4.2 间接自适应模糊控制 …… 143
4.4.3 直接自适应模糊控制 …… 146
4.5 模糊控制的应用及发展方向 …… 149
4.5.1 模糊控制的应用 …… 149
4.5.2 模糊控制的发展方向 …… 150
习题 …… 150

第 5 章 神经网络控制 …… 152

5.1 神经网络理论基础 …… 152
5.1.1 神经网络发展简史 …… 152
5.1.2 神经网络原理 …… 153
5.1.3 神经网络的学习算法 …… 155
5.2 典型神经网络 …… 157
5.2.1 BP 神经网络的模型 …… 157
5.2.2 径向基函数神经网络 …… 160
5.2.3 小脑模型神经网络 …… 162
5.3 神经网络控制 …… 165
5.3.1 神经网络控制的结构 …… 165
5.3.2 单神经元自适应控制 …… 167
5.3.3 神经网络模型参考自适应控制 …… 168
5.3.4 神经网络自校正控制 …… 171
5.3.5 PID 神经网络控制 …… 177
5.3.6 神经网络控制系统的实现 …… 183
5.4 神经网络控制的展望 …… 184
习题 …… 185

参考文献 …… 187

第1章

状态空间方法基础与最优控制

在经典控制理论中，通常采用输入输出描述法，即用微分方程或传递函数作为描述系统动态特性的数学模型。一般地说，输入输出描述是对系统的一种不完全的描述。

在现代控制理论中，主要采用状态空间表达式作为系统的数学模型。状态空间描述法是以系统内部状态变量为基础的描述方法，也称内部法。它既表征了输入和输出对于系统内部状态的因果关系，又反映了内部状态和输入对外部输出的影响，状态空间表达式是对系统的一种完全描述。

状态空间方法将对系统的分析与综合直接置于时域中进行，既可适用于单输入单输出系统，也可适用于多输入多输出系统，大大扩展了处理问题的领域。更为重要的是，在状态空间描述的基础上引入的可控性和可观测性的概念，使得现代控制理论建立在非常严格的理论基础之上，形成了与传统控制理论完全不同的一整套分析方法。

现代控制理论的描述是基于系统的“状态”，输入控制系统状态，系统状态影响系统输出，控制结果的变化可看成系统状态的转移。在状态空间里这种转移路径是无限多的，这就为寻求最优控制提供了空间，为按某种定义前提下选择最优的路径（或时间最短，花费最省，能量消耗最小等）提供了可能。

本章简要介绍控制系统的状态变量分析与设计的基础知识，在此基础上概要介绍最优控制的主要内容。

1.1 控制系统的状态变量描述及求解

1.1.1 控制系统的状态变量描述

一个系统的动态行为由系统的一组合适的变量随时间的变化过程来描述，通常，可以把系统的数学描述区分为“外部描述”和“内部描述”两种基本类型。

系统的外部描述通常称为输入输出描述，其特点是涉及的变量总是物理上可以测量的，对于集中参数的单输入单输出(SISO)系统，其数学描述通常为一个单变量高阶常微分方程。一般地，典型单输入单输出线性控制系统的微分方程可以表示为

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b_m \frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} u}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + b_0 u \tag{1-1}$$

其中，y 为系统输出信号；u 为系统输出信号。或者采用传递函数描述

$$\Phi(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{1-2}$$

但对于非线性系统，由于叠加定理不再有效，基于传递函数的描述方式对非线性系统不再适用，只能采用常微分方程来描述系统，此时系统的数学描述可以写为

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + f\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}}, \frac{\mathrm{d}^{n-2} y}{\mathrm{d}t^{n-2}}, \cdots, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, y, \frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}t^m}, \frac{\mathrm{d}^{m-1} u}{\mathrm{d}t^{m-1}}, \cdots, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, u\right) = 0 \tag{1-3}$$

对于多输入多输出(MIMO)的高阶系统，一般多采用内部描述的方式。

状态变量描述是系统的内部描述的基本形式，对于多输入多输出控制系统来说，状态变量法是最重要的分析方法之一。事实上，控制系统的许多重要性质，只有通过状态变量的概念才能准确描述。其次，在求状态方程的数值解时，可以利用已有丰富的数值算法，适合计算机求解。

所谓状态变量，就是系统中一组独立的、最少且充分的动态变量，当已知状态变量及系统输入时，系统所有变量的变化规律都可以用纯代数的方式得到。但是，状态变量之间的关系只能通过微分方程组来联系。关于状态变量的联立的一阶微分方程组称为状态方程。

应当注意，在状态方程中，每一式的左端要求表示成为状态变量的一阶导数，而右端要表示成为状态变量及输入的函数。

需要说明的是，一个系统可以有多组可以选择的状态变量，这些不同组的状态变量相互之间是线性相关的。

对于非线性系统，采用状态变量的数学描述一般可以写为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \end{cases} \tag{1-4}$$

式中第一式称为系统的状态方程，第二式称为系统的输出方程。其中，$\boldsymbol{x}\in R^n$ 为状态向量；$\boldsymbol{u}\in R^m$ 为输入向量；$\boldsymbol{y}\in R^p$ 为输出向量；$t\in R$ 为时间变量；$\boldsymbol{f}(\cdot)\in R^n$ 为 n 维向量函数；$\boldsymbol{h}(\cdot)\in R^p$ 为 p 维向量函数。如果式(1-4)右端函数不显含 t，则称为自治系统，否则称为非自治系统。对于非线性系统，自治系统的分析要比非自治系统的分析容易得多。

对于线性系统，其状态变量的数学描述一般为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t)\end{cases}\tag{1-5}$$

式中，$\boldsymbol{u}\in R^m$，$\boldsymbol{x}\in R^n$，$\boldsymbol{y}\in R^p$，$\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$，$\boldsymbol{C}(t)$，$\boldsymbol{D}(t)$分别称为 $n\times n$ 维状态矩阵，$n\times m$ 维输入(控制)矩阵，$p\times n$ 维输出矩阵和 $p\times m$ 维直接传递矩阵。其元素都是时间 t 的函数。如果这些矩阵的所有元素都是与 t 无关的常数，则称为线性时不变或线性定常系统。线性定常系统的状态空间描述可以写为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\end{cases}\tag{1-6}$$

在工程实际中，通常 $n>m$，且传递矩阵 $\boldsymbol{D}$ 常为零；时间变量 $\boldsymbol{u}(t)$、$\boldsymbol{x}(t)$和 $\boldsymbol{y}(t)$可以简写成 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，因此，线性定常系统可用 $\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 表示，也可简写成如下形式

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\end{cases}\tag{1-7}$$

如果是单输入单输出线性定常系统，则 $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times 1$ 维输入矩阵；$\boldsymbol{C}$ 为 $1\times n$ 维输出矩阵。

线性定常系统的数学特性相对简单，因此对线性定常系统的讨论结果更加完整。线性定常系统的分析也是进一步分析更复杂的控制系统的基础。对于线性定常系统式(1-6)、式(1-7)，$n\times n$ 维矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值定义为

$$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0\tag{1-8}$$

的根。$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 称为系统的特征方程，$\boldsymbol{A}$ 的特征值也称为特征根。

根据矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的不同类型，可以把状态方程化为不同的标准形式，下面分别讨论。

1. 对角线标准型

若系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互异，则存在非奇异变换阵 $\boldsymbol{P}$，经过变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{x}}$，将系统变换为

$$\begin{cases}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\,\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{A}}\,\bar{\boldsymbol{x}}+\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}=\bar{\boldsymbol{C}}\,\bar{\boldsymbol{x}}\end{cases}\tag{1-9}$$

式中

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}\tag{1-10}$$

$$\overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} \tag{1-11}$$

$$\overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{P} \tag{1-12}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相异特征值。

2. 约当标准型

若系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有重特征值时，经线性变换，可将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为约当标准型 $\boldsymbol{J}$。

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{J}_l \end{bmatrix} \tag{1-13}$$

其中，$\boldsymbol{J}_i$ 为主对角线上元素为 m_i 重特征值 λ_i，次对角线上的元素均为 1，而其余为零的 m_i 阶约当块，即

$$\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i \times m_i} \tag{1-14}$$

所有约当块的阶数之和满足

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_l = n \tag{1-15}$$

1.1.2 状态空间描述与传递函数阵的相互转换

1. 由状态空间表达式转换成传递函数阵

在工程设计中，一个系统通常要用多种方法分析。比如，把现代控制理论设计的系统用经典控制理论的方法进行分析或验证，而传递函数又是经典控制理论中主要的数学模型之一，这就提出了把状态空间模型转换成传递函数阵问题。对于 SISO 系统，传递函数阵就退化成传递函数。

状态空间表达式实际上是对 MIMO 系统的时域描述，而传递函数阵则是对系统的复频域描述，把时域的数学模型转换成复频域的数学模型，其基本方法是在零初始条件下求取拉普拉斯变换（简称拉氏变换）。因此，对式(1-6)在零初始条件下求取拉氏变换，则有传递函数阵描述

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{U}(s) = [\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]\boldsymbol{U}(s) \tag{1-16}$$

例 1-1 已知 SISO 系统的状态空间表达式，试求其传递函数阵。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

解：显然此系统中 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$，根据式(1-16)，可得

$$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\frac{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{*}}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{B}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\frac{\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 4 & 3 & s+2\end{bmatrix}^{*}}{\begin{vmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 4 & 3 & s+2\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -6\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}(s^2+2s+3) & s+2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & -6\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}}{s^3+2s^2+3s+4}$$

$$=\frac{s^2+5s+3}{s^3+2s^2+3s+4}$$

□

例 1-2 已知 MIMO 系统的状态空间表达式如下，试求其传递函数阵。

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

解：根据式(1-16)，可得

$$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\frac{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{*}}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{B}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\frac{\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 6 & 11 & s+6\end{bmatrix}^{*}}{\begin{vmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 6 & 11 & s+6\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

即有

$$\boldsymbol{G}(s)=\frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s^2+6s+11 & s+6 & 1\\ -6 & s(s+6) & s\\ -6s & -11s-6 & s^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}\begin{bmatrix}-s^2-4s+29 & s^2+3s-4\\ 4s^2+56s+52 & -3s^2-17s-14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{bmatrix}$$

式中，该系统的传递函数矩阵包括四个元素，它们均是 s 的有理真分式，即 g_{11}，g_{12}，g_{21}，g_{22}，它们代表 MIMO 系统的子系统的传递函数，如图 1-1 所示。

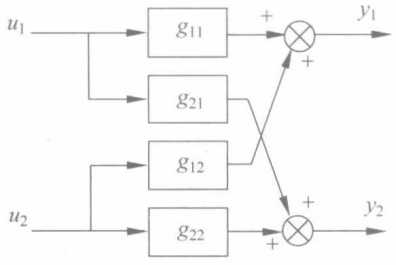


图 1-1 多输入多输出系统示意图

该系统的传递函数矩阵还可以写成

$$\boldsymbol{G}(s)=\frac{\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 4 & -3\end{bmatrix}s^2+\begin{bmatrix}-4 & 3\\ 56 & -17\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}29 & -4\\ 52 & -14\end{bmatrix}}{s^3+6s^2+11s+6}$$ □

显然，MIMO 系统的这种表述形式和 SISO 系统的传递函数相类似，其区别仅在于分子多项式的系数是 $p\times m$ 矩阵，而不是标量。

2. 由传递函数转换为状态变量描述

由系统的传递函数转换为状态空间描述，被称为系统的实现问题，这是控制工程中的一个基本问题。对于机理复杂的系统，往往难于直接建立状态变量模型，这时可采用实验建模的方式，先建立传递函数描述的输入输出模型，再将其转换为状态空间的描述方式。本小节仅以单输入单输出系统的传递函数转换为状态方程为例，介绍两种基本转换方法。

1) 直接转换法

设单输入单输出系统传递函数为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \tag{1-17}$$

设 $n\geqslant m$，将 $G(s)$ 记为 $G(s)=\dfrac{Y(s)}{\overline{X}(s)}\cdot\dfrac{\overline{X}(s)}{U(s)}$，其中

$$\frac{Y(s)}{\overline{X}(s)}=b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0$$

$$\frac{\overline{X}(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

将上述两式转换为时域形式有

$$y(t)=b_m\frac{\mathrm{d}^m\bar{x}}{\mathrm{d}t^m}+b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}\bar{x}}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}+b_0\bar{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}^n\bar{x}}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}\bar{x}}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}+a_0\bar{x}=u(t)$$

令 $x_1=\bar{x}$，$x_2=\dfrac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}$，$\cdots$，$x_n=\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}\bar{x}}{\mathrm{d}t^{n-1}}$，$\boldsymbol{x}=[x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_n]^{\mathrm{T}}$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & 0 & & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}\tag{1-18}$$

式(1-18)所表示的状态方程描述称为可控标准型。后面还要对此进行进一步讨论。

2) 极点分解法

设传递函数式(1-17)为真有理分式，且所有极点各不相同时，应用部分分式分解可以将传递函数展开为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-\lambda_i}$$

或

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s-\lambda_i}U(s)=\sum_{i=1}^{n}k_iX_i$$

其中 $X_i(s)=\dfrac{U(s)}{s-\lambda_i}$。转换为时域形式有

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\lambda_i x_i+u\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i(t)$$

整理为矩阵形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}u\\ y(t)=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases}\tag{1-19}$$

此种状态方程称为对角线规范型。如果传递函数具有重极点，不妨设 λ_1 为二重根，而其余的极点均为单根，则传递函数可以展开为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k_{11}}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{k_{12}}{s-\lambda_1}+\sum_{i=3}^{n}\frac{k_i}{s-\lambda_i}=\frac{1}{s-\lambda_1}\left(k_{11}+\frac{k_{12}}{s-\lambda_1}\right)+\sum_{i=3}^{n}\frac{k_i}{s-\lambda_i}$$

根据前述分析，可以写出时域表达式为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\lambda_1x_1+x_2,\quad\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\lambda_1x_2+u$$

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\lambda_ix_i+u\quad(i=3,\cdots,n)$$

$$y(t)=k_{11}x_1+k_{12}x_2+\sum_{i=3}^{n}k_ix_i(t)$$

整理为矩阵形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & & 0\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}u\\ y(t)=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_3 & \cdots & k_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\end{cases} \tag{1-20}$$

这种状态方程描述方式称为约当标准型。约当标准型在系统分析与综合中得到广泛的应用。

1.1.3 线性定常连续系统状态方程的求解

1. 齐次状态方程的求解

考虑线性定常系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}\quad t\geqslant t_0 \tag{1-21}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)\in R^n$，$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$。

考虑仅由初始状态引起的自由运动，即 $\boldsymbol{u}(t)\equiv\boldsymbol{0}$，则上式变为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t_0)=x_0\end{cases}\quad t\geqslant t_0 \tag{1-22}$$

式(1-22)即为齐次状态方程。为求解齐次状态方程，首先考察标量齐次微分方程

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=ax(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\quad t\geqslant t_0$$

式中，$x(t)\in R$。上式的解答为

$$x(t)=\mathrm{e}^{-a(t-t_0)}x_0$$

对比向量齐次微分方程，可以很自然地设想其解答具有

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0$$

的形式，其中 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 称为矩阵指数函数。这里需要对矩阵指数函数进行定义，使其具有一些特定的性质并满足齐次状态方程式(1-22)，从而得到齐次状态方程的解答。

定义矩阵指数函数为

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\cdots==\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k \tag{1-23}$$

由定义可见，$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 也是 n 阶方阵。矩阵指数函数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 也称为系统的状态转移矩阵，记为 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。矩阵指数函数具有如下性质：

(1) $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{I}$；

(2) $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 总是非奇异的，且其逆为 $(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})^{-1}=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}$，即 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\boldsymbol{\Phi}(-t)$。