经 济 数 学 基 础 丛 书

丛书主编 陶前功

概率论与数理统计习题课教程

■ 王玉宝 徐建豪 主编

科 学 出 版 社

经济数学基础丛书

丛书主编　陶前功

概率论与数理统计习题课教程

王玉宝　徐建豪　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是依据教育部《经济管理类数学课程教学基本要求》，针对高等学校经济类、管理类各本科专业的教学实际编写的概率论与数理统计习题课教程. 全书内容包括随机事件及概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基础知识与参数估计. 每章内容分六部分编写: 知识点小结、考研数学大纲要求、典型例题、A 组练习题、复习题、B 组练习题(其中第 5 章不设置复习题部分).

本书适合经济、管理、部分理工科(非数学)、人文、医学等各专业本科学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题课教程 / 王玉宝, 徐建豪主编. —北京: 科学出版社, 2019. 8

(经济数学基础丛书 / 陶前功主编)

ISBN 978-7-03-062023-1

Ⅰ. ① 概… Ⅱ. ① 王… ② 徐… Ⅲ. ① 概率论-高等学校-习题集 ② 数理统计-高等学校-习题集 Ⅳ. ① O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 162568 号

责任编辑: 谭耀文 范培培 / 责任校对: 杨 赛

责任印制: 彭 超 / 封面设计: 苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 8 月第 一 版 开本: 787 × 1092 1/16

2019 年 8 月第一次印刷 印张: 10 3/4

字数: 250 000

定价: 36.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的数学分支学科，在自然科学与社会科学等学科领域都有着十分广泛的应用，其重要性随着计算机、大数据、人工智能等技术的日益普及和发展而更加突出.

为了满足我国高等教育培养“实用、实干、实践”人才的需要，我们组织了一批有丰富教学经验的教师编写了普通高等教育“十三五”规划教材《概率论与数理统计教程》(徐建豪、王玉宝主编，科学出版社出版)，该教材结构严谨，逻辑清晰，层次分明，行文流畅，在讲授概率论与数理统计基础知识的同时，又注意提炼和渗透数理逻辑思维方法. 为帮助读者更好地学习该教材，我们根据教学过程中学生对该教材反馈的信息和历届本科毕业生考研的深刻体会，编写了与该教材配套的《概率论与数理统计习题课教程》.

本书包括随机事件及概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基础知识与参数估计七章内容. 每章内容分六部分编写：知识点小结、考研数学大纲要求、典型例题、A 组练习题、复习题、B 组练习题(其中第 5 章不设置复习题部分). 本书的最后我们还提供了两个综合测试题和参考答案.

本书分别由王玉宝(第 1 章)、游丽霞(第 2 章)、徐建豪(第 3 章)、蒋凌云(第 4, 5 章)、郑昌红(第 6, 7 章)编写，王玉宝负责全书的框架结构制定，王玉宝、徐建豪任主编并统稿、定稿，游丽霞、蒋凌云、郑昌红任副主编，黄振东、徐勇、陆健华教授参与了部分习题编写与整理工作，陶前功教授、刘行军为本书的编写提出了很多指导性意见. 本书在编写过程中，参考了众多国内外教材；科学出版社的领导和编辑对本书的编审与出版给予了极大的帮助和支持，在此一并致谢.

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏之处，敬请广大专家、同行和读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善.

编　者

2019 年 5 月

目　　录

第 1 章　随机事件及概率

1.1　知识点小结

1.1.1　随机试验与随机事件

1. 随机试验(记为 E)

满足如下三个条件的试验(对随机现象的观察称为试验)称为随机试验.

(1) 可重复性: 可以在相同条件下重复观察;

(2) 可知性: 试验的所有可能结果是确定的;

(3) 随机性: 某次试验之前不确定具体会发生哪一个结果.

2. 随机事件

随机试验中可能出现的结果称为随机事件, 记为 $A,B,\cdots$.

注　随机事件包括基本事件(不可再分割的基本结果)和复合事件(可以拆分成若干个基本事件的组合).

3. 样本空间

一个随机试验的所有基本事件组成的全集, 记为 Ω.

4. 随机事件(补充)

有了样本空间之后, 样本空间的一个子集即为一个随机事件.

注　不可能事件($\varnothing$)与必然事件(Ω)是两个特殊的事件.

1.1.2　随机事件的运算与关系

1. 事件的运算

(1) 事件的积: 事件 A 与事件 B 同时发生, 称为 A, B 的积事件, 记为 AB.

(2) 事件的和: 事件 A 发生或者事件 B 发生, 称为 A, B 的和事件, 记为 $A\cup B$.

(3) 事件的差: 事件 A 发生且事件 B 不发生, 称为 A, B 的差事件, 记为 $A-B$.

2. 事件的关系

(1) 包含: 若 A 发生导致 B 一定发生, 称为 A 包含于 B (B 包含 A), 或称 A 是 B 的子事件, 记为 $A\subset B$.

(2) 相等: 若 A 包含于 B, 且 B 也包含于 A, 称 A, B 相等, 记为 $A=B$.

(3) 互斥(互不相容): 若 A, B 不能同时发生, 即 $AB=\varnothing$, 称事件 A, B 互不相容或互斥.

(4) 对立(逆事件): 若 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$, 称 A, B 互为对立事件, 或称事件 A 是 B 的对立事件(逆事件), 记为 $\overline{A}=B$.

注 (1) $A=(A-B)\cup AB$, 且 $A-B$, AB 互斥.

(2) $A\cup B=(A-B)\cup(B-A)\cup AB$, 且 $A-B$, $B-A$, AB 两两互斥.

(3) 德摩根律: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(4) 差补律: $A-B=A\overline{B}$.

1.1.3 概率的公理化定义与性质

1. 概率的公理化定义

定义于随机试验的样本空间为 Ω 上的函数 $P(A)$ 满足如下条件.

(1) 非负性: 对任意事件 A, $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) 规范性: 对必然事件 Ω, $P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性: 对互斥的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$, $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)$, 则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率.

2. 概率的性质

性质一: $P(\varnothing)=0$.

性质二: $P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质三(单调性): 若 $B\subset A$, 则 $P(B)\leqslant P(A)$.

性质四(减法公式): $P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$.

特别地, 若 $B\subset A$, 则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

性质五(加法公式): 对任意事件 A, B, C, 有

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;

(2) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

特别地, 若 A,B 互斥, 则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

1.1.4 古典概型与几何概型

1. 古典概型

满足如下两个条件的试验称为古典概型.

(1) 有限性: 试验的结果只有有限多个;

(2) 等可能性: 每个结果发生的可能性相等.

古典概型中计算概率的公式为 $P(A)=\dfrac{A\text{中包含的样本点的个数}}{\text{样本空间中包含的样本点的总个数}}$.

2. 几何概型

一个随机试验对应于几何体(线段或平面区域)上的随机落点问题.

几何概型中计算概率的公式为

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)},$$

其中 $S(A),S(\Omega)$ 分别为几何体 A,Ω 的度量值(长度或面积).

1.1.5 条件概率与全概率公式

1. 条件概率

设 A,B 是两个事件, 且 $P(A)>0$,则$P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

2. 乘法公式

(1) 设 $P(A)>0$, 则 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$.

(2) $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$.

3. 完备事件组

若事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足:

(1) $A_iA_j=\varnothing\ (i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j)$;

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$,

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一个完备事件组.

4. 全概率公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组, 设 $P(A_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$, 则对任意事件 B 有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

5. 贝叶斯公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个完备事件组, 设 $P(A_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$,则对任意事件 B 有

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A_j)P(B\mid A_j)}.$$

1.1.6 事件的独立性

1. 两个事件的独立

设 A,B 是两个事件, 如果 $P(AB)=P(A)P(B)$, 称事件 A,B 相互独立.

2. 三个事件的独立

如果三个事件 A, B, C 满足

$$P(AB)=P(A)P(B), \quad P(AC)=P(A)P(C), \quad P(BC)=P(B)P(C),$$

且 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，则称这三个事件相互独立.

注 (1) 若 A, B 相互独立，则 $A,\overline{B};\overline{A},B;\overline{A},\overline{B}$ 这三对事件也分别相互独立.

(2) 若 $P(A)=0$ 或者 $P(A)=1$，则事件 A 与任意事件 B 独立.

(3) 独立的等价条件:

当 $P(A)>0$ 时, A, B 相互独立的等价条件为 $P(B)=P(B|A)$.

当 $P(B)>0$ 时, A, B 相互独立的等价条件为 $P(A)=P(A|B)$.

(4) 三个事件 A, B, C 相互独立则两两独立，反之不成立.

(5) 当 $P(A)>0, P(B)>0$，且 A, B 互斥时, A, B 一定不独立. 当 $P(A)>0, P(B)>0$，且 A, B 独立时, A, B 一定不互斥.

1.2 考研数学大纲要求

1.2.1 考试内容

随机事件与样本空间，事件的关系与运算，完备事件组，概率的概念，概率的基本性质，古典概型，几何概型，条件概率，概率的基本公式，事件的独立性，独立重复试验.

1.2.2 考试要求

(1) 了解样本空间(基本事件空间)的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算.

(2) 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典概型和几何概型，掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式.

(3) 理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

1.3 典型例题

1.3.1 随机事件及其运算与关系

例 1 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 记录一个班级一次数学考试的平均分数(百分制、整数记分);

(2) 生产产品直到得到 10 件正品，记录生产产品的总件数;

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查，合格的盖上“正品”，不合格的盖上“次品”，如连续查出两件次品就停止检查，或检查 4 件产品停止检查，记录检查的结果(查出正品记为“1”，查出次品记为“0”，连续出现两个“0”就停止检查，或查满 4 次才停止检查).

解　(1) $\Omega=\left\{\frac{0}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{n\times 100}{n}\right\}$, n 表示班级人数;

(2) $\Omega=\{10, 11, 12,\cdots,n,\cdots\}$;

(3) $\Omega=\{00, 100, 0100, 0101, 1010, 0110, 1100, 0111, 1011, 1101, 1110, 1111\}$.

例 2　设 A, B, C 为三个事件, 用 A, B, C 的运算关系表示下列事件:

(1) A 发生, B 与 C 不发生;

(2) A, B 都发生, 而 C 不发生;

(3) A, B, C 中至少有一个发生;

(4) A, B, C 都发生;

(5) A, B, C 都不发生;

(6) A, B, C 至多一个发生, 即 A, B, C 中至少有两个同时不发生;

(7) A, B, C 中至多两个发生;

(8) A, B, C 中至少有两个发生.

解　(1) $A\overline{B}\overline{C}$;　(2) $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$;　(3) $A\cup B\cup C$;

(4) ABC;　(5) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$;　(6) $\overline{A}\overline{B}\cup\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(7) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$;　(8) $AB\cup BC\cup AC$.

1.3.2　概率的公理化定义与性质

例 3　设 A,B,C 是三个事件, 且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}, P(AB)=P(BC)=\frac{1}{6}$, $P(AC)=0$. 求 A, B, C 至少有一个发生的概率.

解　因为 $ABC\subset AC$, 且 $P(AC)=0$, 所以 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AC)=0$, 故 $P(ABC)=0$. 由加法公式得

$$
\begin{aligned}
P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\
&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-0+0=\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

例 4　设 A, B 为随机事件, 且 $P(A)=0.7, P(A-B)=0.3$, 求 $P(\overline{AB})$.

解
$$
\begin{aligned}
P(\overline{AB})&=1-P(AB)=1-[P(A)-P(A-B)]\\
&=1-(0.7-0.3)=0.6.
\end{aligned}
$$

1.3.3　古典概型与几何概型

例 5　在某英语字典中有 55 个双字母单词, 若从 26 个英文字母中任取两个字母予以排列, 问能排成上述单词的概率是多少?

解　记 A = "能排成上述单词".

因为从 26 个中任选两个来排列, 排法有 P_{26}^{2} 种, 每种排法等可能; 字典中的两个不同字母组成的单词有 55 个. 所以

$$P(A)=\frac{55}{\mathrm{P}_{26}^{2}}=\frac{11}{130}.$$

例 6　某油漆公司发出 17 桶油漆, 其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶、红漆 3 桶. 在搬运中标签脱落, 交货人随意将这些标签重新贴上, 问一个订货 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客, 按所定的颜色如数得到订货的概率是多少?

解　记 $A=$“顾客按所定的颜色如数得到订货”.

在 17 桶中任取 9 桶的取法有 C_{17}^{9} 种, 且每种取法等可能, 取得 4 白 3 黑 2 红的取法有 $\mathrm{C}_{10}^{4}\times\mathrm{C}_{4}^{3}\times\mathrm{C}_{3}^{2}$ 种, 故

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_{10}^{4}\times\mathrm{C}_{4}^{3}\times\mathrm{C}_{3}^{2}}{\mathrm{C}_{17}^{9}}=\frac{252}{2431}.$$

例 7　从 5 双不同鞋子中任取 4 只, 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率是多少?

解　记 $A=$“4 只鞋中至少有 2 只配成一双”, $\bar{A}=$“4 只全不配对”.

因为从 10 只中任取 4 只, 取法有 C_{10}^{4} 种, 每种取法等可能. 要 4 只都不配对, 可在 5 双中任取 4 双, 再在 4 双的每一双里任取一只, 有 $\mathrm{C}_{5}^{4}\times 2^{4}$ 种, 所以

$$P(\bar{A})=\frac{\mathrm{C}_{5}^{4}\cdot 2^{4}}{\mathrm{C}_{10}^{4}}=\frac{8}{21},$$

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}.$$

例 8　从 $(0,1)$ 中随机地取两个数 x, y, 求:

(1) 事件 $A=\left\{\text{两个数之和小于}\frac{6}{5}\right\}$ 发生的概率;

(2) 事件 $B=\left\{\text{两个数之积小于}\frac{1}{4}\right\}$ 发生的概率.

解　由题可知 (x, y) 是区域: $0<x<1, 0<y<1$ 上的几何概型.

(1) 如图 1.1, 可得 $P(A)=1-\dfrac{\frac{1}{2}\,\frac{4}{5}\,\frac{4}{5}}{1}=\dfrac{17}{25}=0.68$.

(2) 如图 1.2, 可得 $P(B)=1-\left(\int_{\frac{1}{4}}^{1}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{4x}}^{1}\mathrm{d}y\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

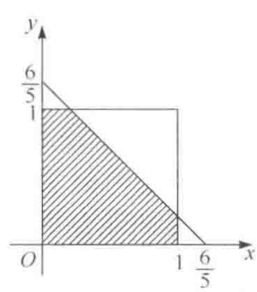

图1.1

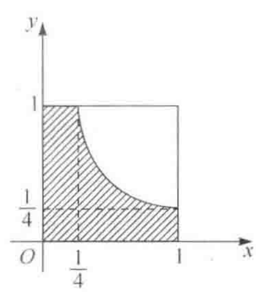

图1.2

1.3.4　条件概率与全概率公式

例 9　已知 $P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.5$, 求 $P(B\mid A\cup\overline{B})$.

解法一　$P(A)=1-P(\overline{A})=0.7, P(\overline{B})=1-P(B)=0.6$,

$$A=A\Omega=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}.$$

注意 $(AB)(A\overline{B})=\varnothing$, 故有

$$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.5=0.2.$$

再由加法定理, $P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.7+0.6-0.5=0.8$, 于是

$$P(B\mid A\cup\overline{B})=\frac{P[B(A\cup\overline{B})]}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{0.2}{0.8}=0.25.$$

解法二　$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B}\mid A)$, 即 $0.5=0.7\times P(\overline{B}\mid A)$.

因此 $P(\overline{B}\mid A)=\dfrac{0.5}{0.7}=\dfrac{5}{7}\Rightarrow P(B\mid A)=\dfrac{2}{7}$, 故 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\dfrac{1}{5}$,

$$P(B\mid A\cup\overline{B})\triangleq\frac{P(BA\cup B\overline{B})}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(BA)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}=\frac{\frac{1}{5}}{0.7+0.6-0.5}=0.25.$$

例 10　$P(A)=\dfrac{1}{4}$, $P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$, $P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$, 求 $P(A\cup B)$.

解　由 $P(A\mid B)\triangleq\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}\xrightarrow{\text{由已知条件}}\dfrac{1}{2}=\dfrac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}{P(B)}\Rightarrow P(B)=\dfrac{1}{6}$.

由乘法公式, 得

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{12},$$

由加法公式, 得 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}$.

例 11　第一个盒子装有 5 个红球, 4 个白球; 第二个盒子装有 4 个红球, 5 个白球. 先从第一个盒子中任取 2 个球放入第二个盒子中去, 然后从第二个盒子中任取一个球, 求取到白球的概率.

解　记 C_i 为“从第一个盒子中取得 i 个白球”, $i=0, 1, 2$.

D 为“从第二个盒子中取得白球”, 显然 C_0, C_1, C_2 两两互斥, $C_0\cup C_1\cup C_2=\Omega$, 由全概率公式, 有

$$\begin{aligned}P(D)&=P(C_0)P(D|C_0)+P(C_1)P(D|C_1)+P(C_2)P(D|C_2)\\&=\frac{C_5^2}{C_9^2}\cdot\frac{5}{11}+\frac{C_5^1\cdot C_4^1}{C_9^2}\cdot\frac{6}{11}+\frac{C_4^2}{C_9^2}\cdot\frac{7}{11}=\frac{53}{99}.\end{aligned}$$

例 12　已知男人中有 5%是色盲患者, 女人中有 0.25%是色盲患者. 今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人, 恰好是色盲患者, 问此人是男性的概率是多少?

解　$A_1=\{男人\}, A_2=\{女人\}, B=\{色盲\}$, 显然 $A_1\cup A_2=\Omega, A_1A_2=\varnothing$.

由已知条件知 $P(A_1)=P(A_2)=\dfrac{1}{2}, P(B\mid A_1)=5\%, P(B\mid A_2)=0.25\%.$

由贝叶斯公式, 有

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{10000}}=\frac{20}{21}.$$

例 13 一学生接连参加同一课程的两次考试. 第一次及格的概率为 P, 若第一次及格, 则第二次及格的概率也为 P; 若第一次不及格, 则第二次及格的概率为 $\dfrac{P}{2}$. (1) 若至少有一次及格则他能取得某种资格, 求他取得该资格的概率. (2) 若已知他第二次已经及格, 求他第一次及格的概率.

解 $A_i=\{$他第 i 次及格$\}, i=1, 2.$

已知 $P(A_1)=P(A_2|A_1)=P,\ P(A_2\mid\overline{A}_1)=\dfrac{P}{2}.$

(1) $B=\{$至少有一次及格$\}$, 所以 $\overline{B}=\{$两次均不及格$\}=\overline{A}_1\overline{A}_2$, 因此

$$\begin{aligned}P(B)&=1-P(\overline{B})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)\\&=1-[1-P(A_1)][1-P(A_2\mid\overline{A}_1)]\\&=1-(1-P)\left(1-\frac{P}{2}\right)=\frac{3}{2}P-\frac{1}{2}P^2.\end{aligned}$$

(2) 由乘法公式, 有 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=P^2$, 由全概率公式, 有

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)\\&=P\cdot P+(1-P)\cdot\frac{P}{2}=\frac{P^2}{2}+\frac{P}{2},\end{aligned}$$

故

$$P(A_1\mid A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{P^2}{\frac{P^2}{2}+\frac{P}{2}}=\frac{2P}{P+1}.$$

1.3.5 事件的独立性

例 14 设 $P(A)>0,\ P(B)>0$, 证明: A,B 互不相容与 A,B 相互独立不能同时成立.

证明 若 A,B 互不相容, 则 $AB=\varnothing$, 于是 $P(AB)=0\neq P(A)P(B)>0$, 所以 A,B 不相互独立.

若 A,B 相互独立, 则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$, 于是 $AB\neq\varnothing$, 即 A,B 不是互不相容的.

例 15 设有 4 个独立工作的元件 1, 2, 3, 4. 它们的可靠性分别为 P_1, P_2, P_3, P_4, 将它们按图 1.3 的方式联结, 求系统的可靠性.

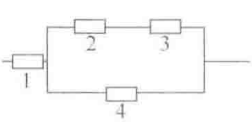

图1.3

解 记 A_i 表示第 i 个元件正常工作, $i=1, 2, 3, 4$, A 表示系统正常. 因为 $A=A_1A_2A_3\cup A_1A_4$, 所以

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_4)-P(A_1A_2A_3A_4) \quad \text{(加法公式)} \\
&= P(A_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(A_4)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\
&= P_1P_2P_3+P_1P_4-P_1P_2P_3P_4 \qquad (A_1, A_2, A_3, A_4\text{独立}).
\end{aligned}
$$

例 16　甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7. 飞机被一人击中而被击落的概率为 0.2，被两人击中而被击落的概率为 0.6，若三人都击中，飞机必定被击落. 求飞机被击落的概率.

解　设 A 表示飞机被击落, H_i 表示飞机被 i 个人击中, $i=1, 2, 3$.

设 B_1, B_2, B_3 分别表示甲、乙、丙击中飞机.

因为

$$
\begin{aligned}
H_1 &= B_1\overline{B}_2\overline{B}_3+\overline{B}_1B_2\overline{B}_3+\overline{B}_1\overline{B}_2B_3, \\
H_2 &= B_1B_2\overline{B}_3+B_1\overline{B}_2B_3+\overline{B}_1B_2B_3, \\
H_3 &= B_1B_2B_3.
\end{aligned}
$$

又 B_1, B_2, B_3 独立.所以

$$
\begin{aligned}
P(H_1) &= P(B_1)P(\overline{B}_2)P(\overline{B}_3)+P(\overline{B}_1)P(B_2)P(\overline{B}_3)+P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2)P(B_3) \\
&= 0.4\times 0.5\times 0.3+0.6\times 0.5\times 0.3+0.6\times 0.5\times 0.7=0.36, \\
P(H_2) &= P(B_1)P(B_2)P(\overline{B}_3)+P(B_1)P(\overline{B}_2)P(B_3)+P(\overline{B}_1)P(B_2)P(B_3) \\
&= 0.4\times 0.5\times 0.3+0.4\times 0.5\times 0.7+0.6\times 0.5\times 0.7=0.41, \\
P(H_3) &= P(B_1)P(B_2)P(B_3)=0.4\times 0.5\times 0.7=0.14.
\end{aligned}
$$

故由全概率公式，有

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(H_1)P(A\mid H_1)+P(H_2)P(A\mid H_2)+P(H_3)P(A\mid H_3) \\
&= 0.36\times 0.2+0.41\times 0.6+0.14\times 1=0.458.
\end{aligned}
$$

1.4　A 组练习题

1.4.1　随机事件的运算与关系

1. 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 同时掷两颗骰子，记录两颗骰子的点数之和;

(2) 取单位圆内任意一点，记录它的坐标;

(3) 10 件产品中有三件是次品，每次从其中取一件，取后不放回，直到三件次品都取出为止，记录抽取的次数;

(4) 测量一辆汽车通过某点的速度.

2. 在某小学的学生中任选一名，若事件 A 表示被选学生是男生，事件 B 表示该学生是三年级学生，事件 C 表示该学生是运动员，则:

(1) 事件 AB 表示什么?

(2) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立?

(3) 在什么条件下关系式 $C\subset B$ 是正确的?

(4) 在什么条件下 $\overline{A}=B$ 成立?

3. 已知 A, B, C 为三个随机事件, 则 A, B, C 都不发生的事件为(　　).

A. $\overline{ABC}$　　B. $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$　　C. $A\cup B\cup C$　　D. ABC

4. 下列事件运算关系正确的是(　　).

A. $B=BA+B\overline{A}$　　B. $B=\overline{BA}+\overline{B}A$

C. $B=BA+\overline{B}A$　　D. $B=1-\overline{B}$

1.4.2 概率的公理化定义与性质

1. 设 A, B 为两个随机事件, $P(A)=0.8$, $P(AB)=0.4$, 则 $P(A-B)=$___________.

2. 设 A, B 为两个独立随机事件, 且 $P(A)=0.6$, $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$, 则 $P(B)=$___________.

3. 设随机事件 A, B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4, 0.3 和 0.6. 若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件, 求事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$___________.

4. 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A)=0.6$, $P(B)=0.7$, 求:

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值?

(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值?

5. 设 A, B, C 为三个事件, 且 $P(A)=P(B)=1/4$, $P(C)=1/3$ 且 $P(AB)=P(BC)=0$, $P(AC)=1/12$, 求 A, B, C 至少有一个事件发生的概率.

6. 设 A, B 是任意两个随机事件, 求 $P\{(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}$的值.

1.4.3 古典概型与几何概型

1. 从 52 张扑克牌(不含大、小王)中任意取出 13 张, 问有 5 张黑桃、3 张红心、3 张方块、2 张梅花的概率是多少?

2. 若 10 件产品中有 7 件正品, 3 件次品,

(1) 不放回地每次从中任取一件, 共取三次, 求取到三件次品的概率;

(2) 每次从中任取一件, 有放回地取三次, 求取到三件次品的概率.

3. 一批产品共 N 件, 其中 M 件正品, 按下述三种方式从中随机地取出 n 件($n<N$). 试求其中恰有 m 件($m\leqslant M$)正品(记为 A)的概率.

(1) n 件是同时取出的;

(2) n 件是无放回逐件取出的;

(3) n 件是有放回逐件取出的.

4. 对一个五人学习小组考虑生日问题:

(1) 求五个人的生日都在星期日的概率;

(2) 求五个人的生日都不在星期日的概率;

(3) 求五个人的生日不都在星期日的概率.

5. 取 50 个铆钉随机地用在 10 个部件上, 其中有 3 个铆钉强度太弱, 每个部件用 3 个铆钉. 若将 3 个强度太弱的铆钉都装在一个部件上, 则这个部件强度就太弱. 求发生一个部件强度太弱的概率是多少?

6. 罐中有 12 颗围棋子, 其中 8 颗白子、4 颗黑子, 若从中任取 3 颗, 求:

(1) 取到的都是白子的概率;

(2) 取到 2 颗白子、1 颗黑子的概率;

(3) 取到 3 颗围棋子中至少有 1 颗黑子的概率;

(4) 取到 3 颗围棋子颜色相同的概率.

7. 从 5 副不同的手套中任取 4 只, 求这 4 只都不配对的概率.

8. 某旅行社 100 名导游中有 43 人会讲英语, 35 人会讲日语, 32 人会讲日语和英语, 9 人会讲法语、英语和日语, 且每人至少会讲英、日、法三种语言中的一种, 任选一名导游, 求:

(1) 此人会讲英语和日语, 但不会讲法语的概率;

(2) 此人只会讲法语的概率.

9. 掷一枚均匀硬币直到出现 3 次正面才停止.

(1) 问正好在第 6 次停止的概率;

(2) 问正好在第 6 次停止的情况下, 第 5 次也是出现正面的概率.

10. 一列火车共有 n 节车厢, 有 $k\,(k \geqslant n)$ 个旅客上火车并随意地选择车厢, 求每一节车厢内至少有一个旅客的概率.

11. 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去, 求杯中球的最大个数分别为 1, 2, 3 的概率.

12. 两人约定 9：00～10：00 在公园会面, 求一人要等另一人半个小时以上的概率.

13. 在区间 (0,1) 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为 ________.

14. 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ (a 为正常数)内掷一点, 点落在半圆内的任何区域的概率与区域的面积成正比, 则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率为 ________.

1.4.4　条件概率与全概率公式

1. 设 A, B 为随机事件, 且 $P(B)>0$, $P(A|B)=1$, 则必有(　　).

A. $P(A \cup B) > P(A)$　　　B. $P(A \cup B) > P(B)$

C. $P(A \cup B) = P(A)$　　　D. $P(A \cup B) = P(B)$

2. 设 A, B 是两个随机事件, 且 $0<P(A)<1$, $P(B)>0$, $P(B|A)=P(B|\overline{A})$, 则必有(　　).

A. $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$　　　B. $P(A|B) \neq P(\overline{A}|B)$

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　　D. $P(AB) \neq P(A)P(B)$

3. 已知 A, B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$, 且 $P(A)=p$, 则 $P(B)=$ ________.

4. 从 1, 2, 3, 4 中任取一个数, 记为 X, 再从 $1, 2, \cdots, X$ 中任取一个数, 记为 Y, 则 $P(Y=2)=$ ________.

5. 三个箱子, 第一个箱子中有 4 个黑球、1 个白球, 第二个箱子中有 3 个黑球、3 个白球, 第三个箱子有 3 个黑球、5 个白球. 现随机地取一个箱子, 再从这个箱子中取出一