数学分析解题思想与方法

Thought and Method
of Solving Mathematical Analysis Problems

（第二版）

杨传林 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高等院校本科生考研辅导教材

数学分析解题思想与方法

（第二版）

杨传林　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析解题思想与方法 / 杨传林编著. —2 版
.—杭州：浙江大学出版社,2019.7
ISBN 978-7-308-19308-5

Ⅰ.①数… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①数学分析—高等学校—解题 Ⅳ.017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 140734 号

数学分析解题思想与方法(第二版)
杨传林 **编著**

责任编辑 杜希武
责任校对 陈静毅 陈 宇
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排 版 浙江时代出版服务有限公司
印 刷 绍兴市越生彩印有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 25
字 数 592 千
版 印 次 2019 年 7 月第 2 版 2019 年 7 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-19308-5
定 价 69.00 元

浙江大学出版社市场运营中心联系方式:0571-88925591;http://zjdxcbs.tmall.com

内容提要

本书是大学数学分析课程的辅导用书，可用于数学分析课程的同步配套学习，也可作为报考硕士研究生的读者的数学分析复习指导用书.

全书分为八章，内容涉及极限、连续性、导数与微分、定积分、无穷级数与无穷乘积、多元微分学、多元积分学以及含参变量积分. 内容的编排顺序基本上和通用的数学分析教材吻合. 在素材选取的深度、难度和宽泛度上，比一般的数学分析基础教材有明显的提升. 对较基础性的知识点，只是简要地加以介绍，而将重点放在解题思路的挖掘与提炼上. 本书选取了较多有代表性的考研真题，最大限度地适应考研读者的需要. 每节配备的习题难度梯度明显，旨在拓宽基础、启发思维、熟练方法.

本书是作者十余年数学分析选论课程教学实践的结晶，其中不乏许多具有创新性的见解，同时也参考了大量的参考文献，尽力形成自己独特的风格.

本书还可供从事数学分析、高等数学教学的教师以及其他的数学爱好者参考阅读.

再版前言

本书自2008年出版以来，受到了读者朋友的普遍好评. 连续多年作为本人教授课程“数学分析思想与方法”的指定教材，教学效果显著；作为长期从事数学分析教学与研究的教师，能为广大读者朋友在学习数学分析过程中释疑解惑，提供哪怕只有一点点思维的火花，激发些许的灵感，我都感到由衷的欣慰.

此次修订，第一方面，添加了部分在数学分析理论构筑上极其重要的内容，如上极限与下极限、含参变量无穷积分一致收敛性的应用；第二方面，对于第一版中出现的印刷错误做了尽可能到位的修正；第三方面，调整了部分习题的配置，添加了所有习题的解答或提示，有些题目的思路点到为止，有些题目则给出了较完整的解题过程. 但对于读者而言，希望在做练习题甚至阅读书本的例题时都能先予独立地思考，不依赖或尽可能少地依赖习题解答，百思不得其解后再去参考解答提示，这样才能真正领悟到数学解题思想的奥妙之处和蕴含其中的美感. 登山之乐更多在于攀登的过程而非结果，仅仅坐缆车上到山顶虽然省事省力也能带给人们一览众山小的美感，但这和登山者大汗淋漓、气喘吁吁、竭尽全力地攀登上去所获得的成就感是截然不同的. 希望读者朋友能够在钻研数学问题的过程中收获那种攀登的成就感. 世上无难事，只要肯登攀.

那么面对数学问题，面对浩如烟海的解题方法，我们怎么样才能提纲挈领地掌握核心要领，达到通透的效果呢？首先我们要培养解题的渴望或动机，视学习、钻研为一件富有意义的乐事，而非苦差事，论语云：“学不至于乐，不可谓之学.”我经常跟学生讲一句话“动机决定技巧”，这是学好任何一门课程和技术的意识基础. 其次要学会转化思路，把一个问题改头换面成另外一个容易理解和运算的模式，如积分的变量代换，不等式问题化为函数极值问题，某类极限问题化为 Riemann 和数的极限即定积分，曲线积分化为二重积分(Green 公式)，曲面积分化为三重积分(Gauss 公式)等等；还需要把复杂的问题分解为几个较为简单的小问题，逐个击破. “学而不思则罔，思而不学则殆”，还是以孔子的这句名言与读者共勉.

本书所有选例和习题的配置都紧密联系数学分析的教学大纲和近几年考研的实战要求，题量适中，崇尚一题多解的发散性思维，适合于作为数学分析课程同步配套的提高训练用书，也可以作为考研阶段的参考辅导教材，对数学思想方法解题技巧感兴趣的读者也是很好的阅读素材.

在本书第二版编辑过程中，数学系的领导给予了极大的关注与支持，陈文集、张子建、郑威、张沁宇、高麒、赵琦、顾丹萍、张钰仙等同志都为文稿的整理定稿付出了大量的辛勤劳动，浙江大学出版社的责任编辑杜希武老师为本书的出版尤其做出了非常细致而到位的帮助与指点. 在此作者向他们表示真挚的谢意.

本书出版承蒙浙江师范大学重点教材建设项目、浙江省一流学科——浙江师范大学数学学科建设经费的资助,在此作者一并表示感谢.

由于作者水平所限,本书若有不当和谬误之处,敬请读者朋友们指正.

浙江师范大学数学与计算机科学院 杨传林

2019 年 1 月

对数学的初浅感悟(代序)

“数学分析”是数学和应用数学、概率论与数理统计、信息与计算科学等专业的基础课程，是上述各专业的考研必考课，其重要性不言而喻. 但是学生在学习的过程中，会遇到形形色色的困难. 主要的困难是难以熟练地掌握数学分析的思想、方法和技巧. 一方面，数学分析基础教材里往往只涉及最基础和最核心的知识点；另一方面，教学课时不断受到压缩，使得这门课程的整个长达三至四个学期的教学过程显得行色匆匆，学生疲于应付，做了大量的题目却可能仍不得要领.

如何从更高的视角纵览数学分析的概貌，梳理其间各个知识板块的关联与区别，如何去领悟有较高难度的解题思想，最终转化为学者自身的数学素养？这是笔者在多年数学分析以及续论课程中百思而欲慢慢得其解的难题.

就以求极限这个数学分析的入门课题说起吧. 求极限怎么求是第一层问题；极限本质的 ε-N 语言的理解是第二层问题，然后才说得上求极限的高级、非常规技巧，比如从定积分去求和式极限，以及无穷级数和数列极限的关联性；最后还要上升到函数项级数、含参变量广义积分的一致收敛性. 仅凭数学分析课程一晃而过的教学模式，学生往往学了后面忘了前面，更谈不上知识的有机融汇. 慢慢地，学习数学分析就蜕化为机械地记忆解题方法、被动地应试，而其中最为核心的对数学思维前因后果、来龙去脉之整体的了解和领悟反而淡化了，更无暇去欣赏数学的美.

依笔者拙见，数学即是关于数量的美学. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，是怎么得出的，为什么是这样的，有多少种不同的解决途径？都可以从审美的角度去理解、去欣赏. 而令人奇怪的是，有限和式 $\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$ 的和值当 N 充分大时反而难以精确计算，从这个意义上讲，有限形式只是从理念上比无限形式容易理解，涉及具体的计算时反而未必如此. 更令人诧异的是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ 当 k 为偶数时和值可以求得，但当 k 为奇数时，哪怕 $k=3$ 时和值之精确值也无人知晓. 数学的世界为什么会有如此令人费解的奥妙？此真可谓“道可道，非常道”了.

从这个角度上讲，学习数学并非纯粹是解题方法的累积，首先必须是对数学奇妙世界的好奇，然后是执着的探索，末之才是方法的积累. 有古语曰：“舍本逐末。”恰似置身股海热衷追涨杀跌，而忘乎价值投资之本. 所以股票市场有句统计意义上的名言：“一赢二平七个亏.”逐末者皆因不知本源何在之故. 那么学习数学之本或狭而言之学习数学分析之本何在？这也是一个“道可道，非常道”的难题. 老子在《道德经》第四十一章又云：明道若昧，进道若退；大方无隅，大器晚成；大音希声；大象无形；道隐无名. 夫唯道，善贷且成. 既然本之

难求,先逐末也不失为一个良策.在数学的学习过程中,看很多的参考书,“拿来”了许多其他人的解法、囫囵吞枣而不化、终被题海淹没,何也?初看乃法之不当,实乃境界之未达也!作者在课堂上经常跟学生言及“动机高于技巧”,动机是本,技巧是末.尤其是不加消化的“拿来”之技巧,对提升数学之境界,裨益不大.

作者编撰本书,以领悟数学的美,培养数学探索的动机为最高准则,力争寓求索的乐趣于解题的过程之中.更不希望作为“拿来拿去”的样本.数学思想犹如种子,萌发于心才能昭华于外.

亲爱的读者朋友,当你读本书时,也请像裴礼文先生所告诫的“先做再看”,哪怕是对于解答完备的例题,亦不要急于求成.作者不仅关注数学解题方法和技巧的积累,更崇尚数学思维和数学审美情趣的提升.若如斯,则吾心愿足矣!

记住,数学是人类理性精神的伊甸园.

当然,路漫漫其修远,让我们一起去求索吧!

在本书的编辑出版过程中,文字编辑黄勤女士和责任编辑杜希武先生对书稿提出了许多宝贵的修改建议并作了大量校正工作,他们一丝不苟的工作态度和高度的敬业精神令笔者深受感动,在此笔者对他们致以诚挚的感谢.

杨传林

2008年冬于浙江师范大学

目　　录

第一章　极限论

极限理论是数学分析的入门和基础，是人们把握无限的金钥匙．不论是函数连续性、导数、定积分还是无穷级数这些数学分析的核心内容，无一例外地都通过极限来定义和推演．鉴于其在高等数学中的特殊重要地位，极限亦成为数学考研的必考内容之一．

求极限或证明极限的方法众多，灵活性强，题型也千变万化．中心问题无外乎两个：一是证明极限存在，二是求极限的值．人们在初学数学分析阶段却往往不易掌握各种解题方法的思想实质，而难以融会贯通地处理形形色色不同的问题．本章我们将着重介绍求证极限的各种思想方法和解题技巧，使读者在解决和分析极限题目时有一个宏观把握和灵活的策略．

§1.1　求证极限的基本方法

在求极限时，一些常用的方法如变量代换、等价无穷小代换、有理化方法、柯西收敛准则以及无穷小量析出法等，我们不在此单独介绍，而是有机地穿插于相关的解题中．极限理论的核心和基本出发点是极限的 ε-N，ε-δ 语言定义．尤其是涉及极限的证明题时，从定义出发去分析和论证无疑是首要的路径．

一、利用极限的定义

例 1　设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$.

分析　欲证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$，考虑

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right|=\left|\frac{x_1-a+x_2-a+\cdots+x_n-a}{n}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{n}(|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_n-a|)$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，当 n 充分大时，$|x_n-a|$ 就充分小，上述和式的构成项 $|x_1-a|$，$|x_2-a|,\cdots,|x_n-a|$ 中后面的绝大部分项充分小，而前面仅有少数几项不充分小的项，被分母 n 除后亦会充分小．

证明　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\{x_n\}$ 是有界数列，$\{x_n-a\}$ 也是有界数列，即存在正数 $M>0$，使

得 $\forall n=1,2,\cdots$，皆有 $|x_n-a|\leqslant M$.

又 $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ $N_1>0$，s. t. $n>N_1$ 时，$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是当 $n>N_1$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|x_k-a| &= \sum_{k=1}^{N_1}|x_k-a|+\sum_{k=N_1+1}^{n}|x_k-a| \\ &< N_1M+(n-N_1)\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k-a\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-a|<\frac{N_1M}{n}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

只要取 $N=\max\left\{\frac{2N_1M}{\varepsilon},N_1\right\}$，$n>N$ 时，必有 $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k-a\right|<\varepsilon$.

此即证得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$.

注 1. 证明过程中其实采用了一种分段技术，性质不同的对象以不同的方法处理.

2. 为了简化证明的书写，不妨先设 $a=0$，而对一般情形，可以作平移变换 $x_n^*=x_n-a$，即等价转换为 $a=0$ 的命题. 虽然对本题而言，此技巧显得无足轻重，但在下面例 2 中读者就不难发现其化简的威力.

3. $a=+\infty$ 或 $-\infty$ 时相应结论仍成立，但证明须作一定修改，主要体现在对 $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right|$ 应作反向的缩小. 留给读者练习.

4. 逆命题显然不成立，大家不妨举出简单反例. 但我们却有如下结论：若数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$. 证明留待读者思考.

例 2 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=ab$.

分析 若依照例 1 的常规思路，直接考虑

$$\begin{aligned}&\left|\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}-ab\right| \\ &\leqslant\frac{1}{n}(|x_1y_n-ab|+|x_2y_{n-1}-ab|+\cdots+|x_ny_1-ab|)\end{aligned}\tag{1}$$

分子中的构成项 $|x_ky_{n-k+1}-ab|$ 仅当 k 和 $n-k+1$ 都充分大时才会充分小，而在两端出现的若干项如 $|x_1y_n-ab|$，$|x_ny_1-ab|$ 并不小，但显然有界为 $M^2+|ab|$，于是分段时应将其分作三段. 据此我们简要叙述一下证明概要.

证法一 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ 知，$\exists M>0$，s. t. $|x_n|\leqslant M$，$|y_n|\leqslant M$，且 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，同时有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 和 $|y_n-b|<\varepsilon$. 对项 $|x_ky_{n-k+1}-ab|$，只有 k 和 $n-k+1$ 皆大于 N_1 时才能充分小. 严格地，即当 $n>2N_1$，$N_1<k<n-N_1+1$ 时，

$$\begin{aligned}|x_ky_{n-k+1}-ab| &= |x_ky_{n-k+1}-x_kb+x_kb-ab| \\ &\leqslant|x_k||y_{n-k+1}-b|+|b||x_k-a|<(M+|b|)\varepsilon.\end{aligned}$$

当 $n>2N_1$ 时，可将(1)式分成如下三段：

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_ky_{n-k+1}-ab\right|\leqslant\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{N_1}+\sum_{k=N_1+1}^{n-N_1}+\sum_{k=n-N_1+1}^{n}|x_ky_{n-k+1}-ab|\right\}$$

$$< \frac{1}{n}[2N_1(M^2+|ab|)+(n-2N_1)(M+|b|)\varepsilon]$$

$$< \frac{2N_1(M^2+|ab|)}{n}+(M+|b|)\varepsilon$$

当 n 充分大时，上式右端第一项可以小于 ε. 若为了最后得到的是简洁的 $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k y_{n-k+1}-ab\right|<\varepsilon$ 不等式，不妨将上述 ε 置换成 $\frac{\varepsilon}{2(M+|b|)}$，$\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时，有 $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2(M+|b|)}$，$|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2(M+|b|)}$. 再令 $N=\max\{\frac{4N_1}{\varepsilon}(M^2+|ab|),2N_1\}$ 或 $N=\frac{4N_1(M^2+|ab|)}{\varepsilon}+2N_1$，则当 $n>N$ 时，必有 $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k y_{n-k+1}-ab\right|<\varepsilon$. 需要补充说明的是，这些外在的修修补补并非本质的. 读者在学习过程中千万不要让这些形式上的繁琐掩盖问题的本质. 只有这样，才能提纲契领地把握住主要矛盾，抓住解题的关键点.

上述证明方法体现了从极限 ε-N 定义出发证题必须具备的基本功. 但证完了以后我们还应该深入想一想：难道只有这么麻烦的证明了吗？有没有别的捷径？下面提供一个简单得多的证明，请读者细心加以比较.

证法二　先设 $a=0$，据例 1 证得结论，因为 $\{y_n\}$ 有界为 M，故有

$$\left|\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}-0\right|\leqslant\frac{M}{n}(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)\to 0.$$

一般 $a\neq 0$ 情形，令平移变换 $x_n^*=x_n-a$，则 $x_n^*\to 0\ (n\to+\infty)$. 已证得 $\frac{x_1^*y_n+x_2^*y_{n-1}+x_n^*y_1}{n}\to 0$. 即

$$\frac{(x_1-a)y_n+(x_2-a)y_{n-1}+\cdots+(x_n-a)y_1}{n}$$

$$=\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}-a\,\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\to 0.$$

仍据例 1 结论

$$\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\to b,$$

于是得证

$$\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}\to ab\quad(n\to+\infty).$$

从证二可以发现，例 2 其实是例 1 的推广或应用. 这样一来，两个不同知识点就有机地结合起来. 在这种融会贯通的证题中，知识就实现了浓缩.

二、迫敛性的应用

定理 1　设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lambda$，且 $\exists N$, s. t. $n>N$ 时，有 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lambda$.

这就是我们常说的迫敛性或夹逼定理. 当我们面对一个数列 $\{C_n\}$ 难以直接处理时，不妨尝试适当的放缩技术，去伪存真，去细存粗，抓住主要矛盾，使问题得以解决.

例 3 （华中师大 2001 年）求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right).$$

分析 记 $C_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}$，易知 $\left\{\frac{k}{n^2+n+k}\right\}$ 关于 k 单调递增.

即得

$$\frac{n}{n^2+n+1}<C_n<\frac{n^2}{n^2+n+n}.$$

当 $n\to+\infty$ 时，上式左、右两端各趋于 0 和 1，似乎无法利用迫敛性，原因在于放缩太过粗糙，应寻求更精致的放缩.

解 对 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}$ 各项的分母进行放缩，而同时分子保持不变. 就得如下不等关系：

$$\frac{n+1}{2(n+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+n}<C_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+1}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}.$$

当 $n\to+\infty$ 时，上式左、右两端各趋于 $\frac{1}{2}$，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

注 对极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ 而言，依上述思路：

$$\frac{1}{2}=\frac{n}{2n}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}<\frac{n}{n+1}\to 1,$$

显然无法迫敛，因为这样的放缩太粗糙了. 读者可以用不等式 $\frac{1}{k+1}<\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{k}$ 去迫敛. 本题的另一解法可参阅本节例 12 之注.

例 4 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}=0$ （东北师范大学）

分析 记 $u_n=\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}$，显然 $\{u_n\}$ 单调递减且恒正.

故 $\lim u_n$ 的存在性毋庸置疑，但单调有界原理无助于我们求得收敛数列的极限. 现采用放缩法证明.

证明 因为 $u_n=\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}<\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$，

所以 $u_n^2<\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}$.

即得 $u_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，所以 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

除了上述证法，我们若能联想到公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx=0$（证见 §1.3 例 12），便可取得要证结论.

对于含有较多乘除因子、乘方的数列，我们还可以通过级数收敛性去分析. 本例还有第三种证明方法，详见 §1.2 例 7.

课堂练习：证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 7\cdot\cdots\cdot(4n-1)}{4\cdot 8\cdot\cdots\cdot 4n}=0$.

例 5　设 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim x_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$.

分析　本题与例 1 中的算术平均的结果有异曲同工之处，若直接从 ε-N 定义出发考虑 $|\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}-a|$，除了 $a=0$ 特殊情形尚可操作外，一般的情形就会很麻烦，甚至难以处理，平移变换也派不上用场. 注意到取对数可使乘积运算化为加法运算，几何平均化为算术平均，我们可以得到证法一；若用放缩方法，仍然利用几何平均和算术平均及调和平均的相互关系，我们又能得到证法二.

证法一　记 $y_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，则 $\ln y_n=\dfrac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)$，

当 $a>0$ 时，从条件 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln a$，由例 1 的结果有 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln y_n=\ln a$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$. 当 $a=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=-\infty$，由例 1 的注 3 知 $\ln y_n\to-\infty$，从而 $y_n\to 0(n\to+\infty)$，命题得证.

证法二　当 $a=0$ 时，由算术几何平均不等式

$0<\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0$ 立知 $\lim\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=0$.

当 $a>0$ 时，关键在于寻找下方的迫敛数列，由此联想算术、几何、调和平均不等式：

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\tag{2}$$

因为 $x_n\to a>0$，$x_n>0$，知 $\dfrac{1}{x_n}\to\dfrac{1}{a}$，从而 $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}\right)\to\dfrac{1}{a}$. 故(2)式的左边亦趋于 a，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$. 作为例 5 的应用，取 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$. 由于 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是单调递增趋于 e 的，故 $\left\{\dfrac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\right\}$ 亦单调递增趋于 e. 再由几何算术平均不等式知

$$\sqrt[n]{n!}<\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2},$$

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n=\left(\frac{n}{2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(\frac{n}{2}\right)^n\mathrm{e},$$

这样我们得到 $n!$ 的一个估计：$\left(\dfrac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$.

注　请读者思考 $\left\{\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right\}$ 是否单调递增.

三、利用洛必达法则

不定式极限主要有$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^{∞}，0^{0} 以及∞^{0} 等类型. $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$是两大基本类型，其他各类须经过恒等变形或取对数的方法转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$后才可以使用洛必达法则. 在使用洛必达法则时，必须注意以下几个技巧上的细节：

1. 等价无穷小代换. 如在乘除因子中的 $\sin x$，$\tan x$ 等，当 $x\to 0$ 时，可以置换成 x；

2. 每一步求导后要整理所得结果，将定型的因式(即以非零数为极限的因式)及时分离出来；此处最好配合一些基本极限如$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$等.

3. 凡在求导后达不到简化目的，或是越求导数越繁琐的题目，务必进行一些必要的预处理，如变量代换及等价无穷小代换，或寻求其他途径.

4. 若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在(不包括无穷大量)，不能推出原极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$不存在，此时也应寻找其他方法求解.

5. 数列情形的不定式极限，必须将离散自变量 n 变换为连续变量 x 后才可以使用洛必达法则.

例 6 求极限

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\right)$；

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$. (北京科技大学 1996，中国科技大学)

解 (1)原极限是$\infty\cdot 0$ 型不定式.

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x}}$$

$$\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{1+t}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-1}{1+\left(\frac{1}{1+t}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{1+t}\right)'=\frac{1}{2}.$$

(2)当 $x\to+\infty$时，$e^{-x}\to 0$，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\to\infty$，原极限式是 $0\cdot\infty$型不定式.

而当 $x\to-\infty$时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\to 0$，原极限式是$\infty\cdot 0$ 型不定式. 若直接利用洛必达法则，会得到

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\left[2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x}{x+1}\right]}{e^x}.$$

显然不仅没有简化，反而更麻烦，问题出在幂指函数的求导上. 正解如下：

令 $y=e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$，取对数 $\ln y=x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x$. 若用洛必达法则

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}}$$

$$\xlongequal{令\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{t}\ln(1+t)-1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\frac{1}{2}.$$

若用 Taylor 展开式，$x\to\infty$时，$\frac{1}{x}\to0$.

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\left\{x^2\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]-x\right\}=-\frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

注　本题往往容易出现以下错解. $x\to\infty$时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\to e$，故

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}e^{-x}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x=\lim_{x\to\infty}e^{-x}e^x=1.$$

请读者朋友们想一想，错误的根源是什么？

四、利用基本极限

所谓基本极限，就是一些众所周知的在求极限运算中被广泛应用的极限式. 如：
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ 等.

利用这些基本极限，我们可以实施等价无穷小代换；在洛必达法则的使用过程中及时将定型的因式提取以化简求导运算；取代洛必达法则直接求解极限等.

例 7　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a,b>0)$.　（西北电讯工程学院 1982）

解　此为 1^∞ 型不定式. 令 $u=\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1$，当 $n\to\infty$时，$u\to0$，

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}(1+u)^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+u)^{\frac{1}{u}un}=[\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{\lim\limits_{n\to\infty}nu}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}nu}$，而

$$\lim_{n\to\infty}nu=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right]$$

$$=\frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)+\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{b}-1)]=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b).$$

故原极限$=e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\sqrt{ab}$.

注　本题先取对数，再用洛必达法则亦可求解，但不如上述强制拼凑解法简洁明快.

例 8　求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos2x}}{x^2}$.

解　采用加项减项的搭桥技术.