

GAODENG SHUXUE
ZHIDAO YU LIANXI

主 编 范友芳 周 尉
副主编 贺建辉 周培桂 钟根红

高等数学

指导与练习


中国财经出版传媒集团
经济科学出版社
Economic Science Press

高等数学指导与练习

主 编 范友芳 周 尉

副主编 贺建辉 周培桂 钟根红

中国财经出版传媒集团

 经济科学出版社
Economic Science Press

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学指导与练习 / 范友芳, 周尉主编. —北京:
经济科学出版社, 2019. 8

ISBN 978 - 7 - 5218 - 0648 - 9

I. ①高… II. ①范… ②周… III. ①高等数学 -
高等学校 - 教学参考资料 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 127985 号

责任编辑: 周胜婷

责任校对: 王肖楠

责任印制: 邱 天

高等数学指导与练习

主 编 范友芳 周 尉

副主编 贺建辉 周培桂 钟根红

经济科学出版社出版、发行 新华书店经销

社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮编: 100142

总编部电话: 010 - 88191217 发行部电话: 010 - 88191522

网址: www.esp.com.cn

电子邮件: esp@esp.com.cn

天猫网店: 经济科学出版社旗舰店

网址: <http://jjkxcs.tmall.com>

北京密兴印刷有限公司印装

710 × 1000 16 开 10 印张 200000 字

2019 年 8 月第 1 版 2019 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5218 - 0648 - 9 定价: 30.00 元

(图书出现印装问题, 本社负责调换。电话: 010 - 88191510)

(版权所有 侵权必究 打击盗版 举报热线: 010 - 88191661)

QQ: 2242791300 营销中心电话: 010 - 88191537

电子邮箱: dbts@esp.com.cn)

《高等数学》是大学数学的一门重要基础课，尤其对于工科院校的学生更是如此。一直以来，我们选用同济版的《高等数学》作为本科学生的使用教材。

多年来，我们一直从事三本院校《高等数学》的教学工作，在多年教学改革和教学实践的基础上，针对学生特点和教学要求，编写了这本习题集。

本书配合教材共分十二章，每章分1~3个部分，每一部分包括内容提要 and 练习。提要主要包含这部分内容的知识要点和从多年教学经验中总结出来的解题方法和步骤，以及注意点。提要后面是对应的练习。在练习题中，除了选用一部分教材的习题外，又增加了许多习题，其中还包括选择题和填空题。这样有助于学生适应考试题型，提高学习成绩。

在每一章几个部分内容结束后，又有整章的综合自测题。通过这样分解和综合的反复练习，使学生理解概念，明确思路，掌握要点和方法，从而提高学生的解题能力，最终达到良好的教学效果。

本书是多年来我们在教学实践中的积累和总结，现整编成书。由于水平有限，时间仓促，有不足之处恳请读者、同行指正，谢谢。

编者

2019年5月

第一章 函数极限与连续 / 1

提要一：函数、极限的定义及性质 / 1

练习 / 2

提要二：无穷小、极限运算法则及两个重要极限 / 4

练习 / 7

提要三：连续、间断点的分类及零点定理 / 9

练习 / 11

自测题 / 13

第二章 导数与微分 / 16

提要一：导数的概念与计算 / 16

练习 / 18

提要二：高阶导数、隐函数、参数方程的导数及微分 / 20

练习 / 23

自测题 / 25

第三章 微分中值定理与导数的应用 / 28

提要一：微分中值定理和洛必达法则 / 28

练习 / 31

提要二：函数的单调极值、凹凸拐点和作图 / 33

练习 / 36

自测题 / 38

第四章 不定积分 / 41

提要一：不定积分的概念、性质和凑微分法 / 41

练习 / 43

提要二：变量代换法和分部积分法 / 46

练习 / 49

自测题 / 51

第五章 定积分 / 54

提要一：定积分的概念、性质和 $N-L$ 公式 / 54

练习 / 56

提要二：定积分的换元法、分部积分法和反常积分 / 59

练习 / 62

自测题 / 64

第六章 定积分的应用 / 67

提要：定积分的元素法和几何应用 / 67

自测题 / 70

第七章 常微分方程与差分方程 / 72

提要一：基本概念、一阶方程及可降阶的高阶方程 / 72

练习 / 74

提要二：二阶线性常系数微分方程与差分方程 / 76

练习 / 79

自测题 / 80

第八章 空间解析几何与向量代数 / 83

提要一：向量的数量积、向量积及空间曲面曲线方程 / 83

练习 / 85

提要二：平面、直线方程及平面直线间的关系 / 87

练习 / 89

自测题 / 90

第九章 多元函数微分法及其应用 / 92

提要一：二元函数概念、偏导数及全微分 / 92

练习 / 95

提要二：多元复合函数及隐函数求导法则 / 97

练习 / 99

提要三：多元函数微分学的应用 / 100

练习 / 103

自测题 / 105

第十章 重积分 / 107

提要一：二重积分的概念、性质及在直角坐标系下的计算 / 107

练习 / 110

提要二：极坐标系下二重积分的计算 / 112

练习 / 113

提要三：三重积分的概念、计算及重积分的应用 / 115

练习 / 118

自测题 / 119

第十一章 曲线积分与曲面积分 / 122

提要一：曲线积分的概念、计算及格林公式 / 122

练习 / 124

提要二：曲面积分的概念、计算及高斯公式 / 126

练习 / 129

自测题 / 131

第十二章 无穷级数 / 133

提要一：常数项级数的概念、性质及审敛法 / 133

练习 / 137

提要二：幂级数的收敛域、和函数及展开式 / 139

练习 / 142

提要三：傅里叶级数 / 144

练习 / 146

自测题 / 147

参考文献 / 150

第一章 函数极限与连续

提要一：函数、极限的定义及性质

(一) 函数

1. 函数的两个要素是定义域和变量之间的对应关系.
2. 函数的基本性质：有界性、单调性、奇偶性、周期性.
3. 理解复合函数、初等函数、分段函数的概念.

(二) 数列极限

1. 定义： $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - A| < \varepsilon$.

此时也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A , 否则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

注意：

- (1) 熟悉并应用数学逻辑符号 $\forall, \exists, \Leftrightarrow$.
- (2) 逐步理解用精确的数学语言表达“越来越接近”“无限接近”的极限思想.

2. 收敛数列的性质：唯一性、保号性、有界性.

注意：

数列 $\{x_n\}$ 收敛一定有界, 但数列 $\{x_n\}$ 有界不一定收敛. 数列有界只是数列收敛的必要条件, 而不是充分条件.

3. 几个常用的数列极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 (|q| < 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(三) 函数极限

1. 定义:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X = X(\varepsilon) > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

2. 左极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0^-) = A$; 右极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0^+) = A$.

结论:

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. 此时 $y = A$ 是函数图形的水平

渐近线.

3. 函数极限的性质: 唯一性、局部有界性、局部保号性.

 注意:

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$, 则一定存在 x_0 的某个去心邻域, 使得 $f(x) >$

0. 反之, 若在 x_0 的某个去心邻域内 $f(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $A \geq 0$.

例如: $f(x) = |x| > 0, x \neq 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

要求:

(1) 求函数的定义域; 用函数的两个要素判断两函数是否相等; 判断函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性; 掌握函数的分解及复合; 会求函数的反函数; 能列实际问题的函数关系式等.

(2) 理解极限的定义, 会求简单数列的极限.

练习

一、选择题

1. 下列函数中既是有界函数, 又是奇函数的是 ().

A. $e^{\sin x} \cos x$ B. $\arctan x$ C. $x^2 + 1$ D. $\sin x + \cos 2x$

2. 已知 $f(x)$ 为奇函数, 则下列为偶函数的是 ().

A. $y = \sqrt[3]{x^3 - 1} \cdot f(x), x \in [-1, 1]$

B. $y = xf(x) + \tan^3 x, x \in [-1, 1]$

C. $y = x^3 \sin x - f(x), x \in [-1, 1]$

D. $y = f(x)e^{x^2} \sin^5 x, x \in [-1, 1]$

3. 下列各对函数相等的是 ().

A. $\sqrt{x^2}, (\sqrt{x})^2$

B. $\cos^2 x, \cos x^2$

C. $\ln e^x, e^{\ln x}$

D. $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \operatorname{sgn} x$

4. 函数 $y = 2 - \sqrt{9 - x^2}, x \in [-3, 0]$ 的反函数是 ().

A. $y = \sqrt{5 + 4x - x^2}$

B. $y = -\sqrt{5 + 4x - x^2}$

C. $y = -\sqrt{5 + 4x - x^2}, x \in [-1, 2]$

D. $y = \sqrt{5 + 4x - x^2}, x \in [-3, 0]$

5. 设 $f(x) = \frac{x}{x}$, $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$ 分别为 ().

A. 不存在, 1

B. 1, 不存在

C. 1, -1

D. 都不存在

6. 下列极限存在的是 ().

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)}{x^2}$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^x - 1}$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x}}$

二、填空题

1. 函数 $y = \ln \ln \frac{2x-1}{x-2}$ 的定义域是_____.

2. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 则函数 $f(\cos x)$ 的定义域为_____.

3. 函数 $f(x) = \sin x \ln \frac{1+x}{1-x}$ 的奇偶性是_____.

4. 若 $f(x+1) = \begin{cases} x+2, & 0 \leq x \leq 1 \\ e^x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 则 $f(x) =$ _____.

5. 若 $f(x) = \frac{x}{1-x}$, 则 $f(f(x)) =$ _____.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \leq 0 \\ e^x + b, & x > 0 \end{cases}$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 则 $b =$ _____.

7. $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}} =$ _____, $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{x}} =$ _____, $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}} =$ _____.

8. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1}{x} =$ _____, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{x} =$ _____, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} =$ _____.

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan \frac{x-1}{2} =$ _____, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \frac{x-1}{2} =$ _____,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan \frac{x-1}{2} =$ _____.

三、计算题

1. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的:

(1) $y = e^{\sin \sqrt{1+x^2}}$; (2) $y = (\arctan \ln x)^{\frac{1}{3}}$.

2. 求 $y = \sqrt{4-x^2} - \arcsin \frac{x+1}{2}$ 的定义域.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^n + (-1)^n 2^n}{2^n + 3^{n+1}}$.

5. 设 $f(x) = e^x$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln [f(1)f(2)\cdots f(n)]$.

四、应用题

某市居民在购房时, 面积不超过 120m^2 时按总房价的 1.5% 交税, 面积超过 120m^2 时超过部分要按房价的 3% 交税. 当房价是 a 元/ m^2 时, 试建立购房总价与房屋面积 x 之间的函数关系.

提要二: 无穷小、极限运算法则及两个重要极限

(一) 无穷小

1. 定义: 以 0 为极限的变量称为无穷小量 $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \alpha(x) = 0$.

注意:

无穷小不是越来越小的量,也不是非常小的数.

2. 性质:

(1) 有限个无穷小的和、差、积还是无穷小.

(2) 有界函数与无穷小的积还是无穷小, 如 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

3. 函数极限与无穷小的关系: $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ 为无穷小.

4. 无穷小的比较: 在自变量 x 的同一变化过程中, 设 $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim \beta(x) = 0$.

(1) 若 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, 称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$; 反之低阶.

(2) 若 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = c \neq 0$, 称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是同阶无穷小.

特别的, 当 $c = 1$, 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$ ($\Leftrightarrow \lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$).

5. 常用的等价无穷小: 当 $u \rightarrow 0$ 时, 有 $u \sim \sin u \sim \tan u \sim \arcsin u \sim \arctan u \sim e^u - 1 \sim \ln(1 + u)$, $\sqrt[n]{1 + u} - 1 \sim \frac{1}{n}u$, $1 - \cos u \sim \frac{1}{2}u^2$.

这里的 u 可以是自变量 x 也可以是趋于零的函数, 如当 $x \rightarrow 0$, $\sin 2x^3 \sim 2x^3$, 此时 $u = 2x^3$.

注意:

记住以上这些常用的等价无穷小, 是为了在解决极限的计算、无穷小的比较、间断点的分类等问题时 (这些问题都要求极限), 能够做到在乘积中的熟练替换和简化计算.

(二) 无穷大

1. 定义: $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时为无穷大(量) $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty$.

简言之：无穷大是指在自变量的一定趋向下，函数的绝对值无限增大。无穷大不能理解为越来越大的量或者非常大的数。若 $x \rightarrow x_0$ 时极限为无穷大，此时 $x = x_0$ 是函数曲线的一条垂直渐近线。

2. 无穷大与无界函数的关系：无穷大必是无界函数，反之不然。
3. 无穷小与无穷大的关系：倒数关系。

(三) 极限的四则运算法则和复合运算法则

1. 四则运算法则：设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则： $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = AB$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$.

注意：

应用时的前提是极限存在。

2. 复合运算法则： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) \stackrel{u=g(x)}{=} \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 这里 $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

3. 有理分式函数的极限： $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, n = m \\ \infty, n > m \end{cases}$.

(四) 极限存在的两个准则

1. 夹逼准则.
2. 单调有界数列必收敛准则.

(五) 两个重要极限

1. 第一个重要极限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \phi(x)}{\phi(x)} = 1$.

注意：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

二、填空题

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[n]{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \ln(2\cos 2x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^2 - x - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{x^2 - 4} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{n\pi}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{kx}$ (k 为正整数) = $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2}\right)^{\frac{2}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+2x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{x+1} = \sqrt{e}$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

18. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 $1 - \cos x$ 为等价无穷小, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x \sin 3x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{\sqrt{5-x}-3}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 2x)}{e^{3x}-1}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1-\cos x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x \tan x}$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{5x+4} \sin \frac{2}{x}$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}+4x-1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x+x^2)$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

11. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x-2}}$

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}$

四、证明题

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right) = \frac{1}{2}$.

提要三: 连续、间断点的分类及零点定理

(一) 函数的连续性

1. 定义: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (或 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$).

注意:

$f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足三个条件: (1) $f(x)$ 在 x_0 处有定义; (2) $f(x)$ 在 x_0 处有极限; (3) 极限值 = 函数值.

2. $f(x)$ 在点 x_0 处左(右)连续 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$).结论: $f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

注意:

讨论分段函数在分段点的连续性时需用以上结论.

3. $f(x)$ 在区间上连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在区间内每一点都连续. 若是闭区间 $[a, b]$, 指在开区间内 (a, b) 每一点连续, 而在 a 点是右连续, b 点是左连续.

(二) 函数的间断点

1. 如果 $f(x)$ 在点 x_0 不满足连续三个条件中的任意一条, 则 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

2. 间断点分类 $\left\{ \begin{array}{l} \text{第一类间断点} \Leftrightarrow \text{左右极限均存在} \\ \text{第二类间断点} \Leftrightarrow \text{左右极限至少有一个不存在 (无穷, 振荡间断点).} \end{array} \right.$

若 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点, 有 $\left\{ \begin{array}{l} \text{跳跃间断点} (f(x_0^+) \neq f(x_0^-)) \\ \text{可去间断点} (f(x_0^+) = f(x_0^-) \text{ 即极限存在}). \end{array} \right.$

注意:

(1) 求间断点方法: 没有定义的点一定是间断点; 分段函数的分段点是可能的间断点.

(2) 判断间断点类型方法: 通过求间断点的极限或左右极限来判断.

(三) 一切初等函数在其定义区间上都是连续函数

以上结论是基于下面三个性质:

1. 基本初等函数在其定义域上连续.
2. 两个连续函数的和、差、积、商 (分母不为零) 还是连续函数.
3. 两个连续函数的复合函数是连续函数.

(四) 闭区间上连续函数的性质

1. 有界与最值定理: 闭区间上的连续函数一定有界且存在最大值与最小值.

2. 介值定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(a) < f(\xi) < f(b)$ (或 $f(b) < f(\xi) < f(a)$).

特别情形为 零点定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则