WEICHIDU XUANBI SHUYE GUANDAO DE
FEIXIANXING DONGLIXUE YANJIU

微尺度
悬臂输液管道的
非线性动力学研究

郭　勇／著

西南交通大学出版社

微尺度悬臂输液管道的非线性动力学研究

郭　勇 / 著

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

微尺度悬臂输液管道的非线性动力学研究 / 郭勇著
. —成都：西南交通大学出版社，2019.6
ISBN 978-7-5643-6941-5

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①郭… Ⅲ. ①非线性科学 – 动力系统（数学）– 研究 Ⅳ. ①O194

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 126304 号

微尺度悬臂输液管道的非线性动力学研究

郭 勇 著

责任编辑	刘 昕
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （四川省成都市金牛区二环路北一段 111 号 西南交通大学创新大厦 21 楼）
发行部电话	028-87600564 028-87600533
邮政编码	610031
网址	http://www.xnjdcbs.com
印刷	成都蜀通印务有限责任公司
成品尺寸	170 mm × 230 mm
印张	10.25
字数	156 千
版次	2019 年 6 月第 1 版
印次	2019 年 6 月第 1 次
书号	ISBN 978-7-5643-6941-5
定价	58.00 元

课件咨询电话：028-87600533
图书如有印装质量问题 本社负责退换

前言

输流管道是一种重要的工程结构，广泛应用于航空宇航工程、石油能源工业、动力水能工业、核工业、生物工程、成型制造等诸多领域，如火箭的燃料管道、飞机的空中加油、海洋钻探中的输油输气管道、水压机中的压力管道、核电站中的热交换管道等等。随着人们认识和改造自然的不断深入，如在化学分析、生物与化学传感、药物输送、微流控芯片生产等领域，宏观管道已不能完全适应发展的要求，微尺度管道应运而生。微尺度管道的出现和应用既是科学技术发展的结果，如其依赖于体硅微制造技术、表面微加工技术、LIGA 工艺等加工技术的出现，又是科学技术进一步发展的需要，即可以将微尺度管应用到微电子机械系统（MEMS）的设计中。管内流体的流动会改变管道原有的一些动力学性质，如固有频率、振型等；且流速超过一定值时会引起管道产生复杂的动力学行为，如屈曲或颤振，导致结构损坏、失稳、精度下降及寿命减少。这些问题的解决有赖于合理地分析输流管结构的振动特性，在对其振动机理有深刻把握的基础上设计人们需要的工程管道模型。

对于宏观输液管道，自从 Païdoussis、Benjamin 等 20 世纪 60 年代重新发掘这一主题以来，已经得到了广泛且深入的研究，内容涉及线性振动、稳定性、屈曲、颤振（自激振动）、强迫振动、参数振动、分岔、混沌等方面，和杜芬方程、范德波尔方程、洛伦兹方程及弹跳球

模型一样，已经成为非线性动力学理论与应用研究中的一个典型范例。对于微尺度输液管道，实验表明微结构具有不同于宏观结构的力学性质，因此需借助于非经典连续介质理论来对其进行研究。实验观测还表明，对于微结构的扭转、弯曲等，偶应力理论已经能够成功地估计其尺度效应。本书考察微悬臂输液管道的弯曲振动，因此基于偶应力理论来研究其非线性动力学行为。

以往，在对管道（宏观或微纳尺度）振动方程的处理方面，比较多地依赖于诸如伽辽金截断、微分求积法等离散化方法，用严格的方法，如中心流形、LS方法等，获得降阶方程的工作并不多见。而且对于离散化以后得到的常微分方程组，除了对低阶截断的情形有比较多的理论分析（如求得对系统动力学行为有决定作用的非线性项）以外，对于高阶截断以后的方程则缺少相应的理论探讨，基本上是采用数值方法来探索其动力学现象。此外，在研究伽辽金方法的收敛性方面，一般是取模态截断数作为横坐标，系统的振幅大小作为纵坐标，通常认为振幅的大小不再随模态截断数变化时就是收敛了。但是对于输液管道，其振动一般是空间的，相同大小的振幅可能对应三维的运动形式，也可能对应平面的运动形式。因此，仅凭振幅大小无法区分管道的运动形式，从而对伽辽金方法的收敛性的考察也不能局限于此。此外，将通过无穷维分析及有限维分析（即运用伽辽金方法离散后进行的分析）分别得到结论进行对比研究的文献也缺少。

鉴于此，本书以微尺度悬臂输液管道为力学模型，基于修正的偶应力理论将尺度效应引入到该类系统的振动控制方程中。从无穷维的角度，即在原偏微分方程的基础上，通过中心流形严格降维、运用范式理论消去共振项并结合相关非线性动力学理论与方法对简化方程进行研究；从有限维的角度，即通过伽辽金方法先将原偏微分方程离散成常微分方程组，再运用中心流形及范式理论得到简化方程并进一步研究，两者都得到系统的分岔模式、周期运动类型及稳定性、小尺度对动力学行为的影响等方面的结论。比较从无穷维角度和有限维角度

分别得到的结论，一方面进行交互验证，另一方面确定出合适的模态截断数，以期在运用伽辽金方法研究该类系统时能准确预测其动力学行为。

本书的研究有助于揭示小尺度效应对悬臂输液管道动力学行为的影响机理，为这一结构的实际工程设计提供理论上的依据；有助于探究在运用伽辽金方法研究弹性体的振动时，如何选取合适的模态截断数才能准确地预测其动力学行为。特别地，本书的研究所采用的严格降维方法可期应用到对其他力学模型的非线性运动分析上。

本书采用的各种非线性动力学理论与方法均来自本人的导师谢建华教授的倾囊相授，在此对谢教授表示由衷的感谢。在数值计算、文字排版方面，感谢太原理工大学徐慧东老师、西南石油大学杜长城老师、西南交通大学乐源教授及河西学院李登辉老师的帮助。对小尺度梁结构这一主题的研究一定程度上得益于西南交通大学力学与工程学院张波博士的启发，在此对张老师表示感谢。同时也特别感谢华中科技大学力学系的王琳教授对本书部分内容的写作提出的宝贵意见和建议。

由于本人水平有限，书中疏漏在所难免，恳请读者批评指正。

郭　勇

2019 年 3 月于贵阳

目 录

第 1 章 绪 论

1.1 研究背景和意义

输流管道，不管是宏观的还是微观的，都属于典型的流固耦合系统。管内流体（如密度、流速等）会对管道的动力学性质（如频率、振型、稳定性）产生重大影响，这些在宏观中已有充分的讨论[1-77]。但随着人们认识自然、改造自然的深入，传统的宏观机构、结构已不能完全适应发展的要求，如 DNA 分析中用于分子分离、扩增、DNA 排序的微流体器件，航空航天、机床等产业中所用到的精密控制系统，信息技术产业中的喷墨打印头和数据存储系统中的读/写元件，汽车行业中应用的扭矩传感器和轮胎压力传感器等。诸如此类的微元器件要得到生产并实现特定的工程功能，需要有相应的微型化技术与之配套，设计、制造并组装出微电子机械系统（MEMS）及外部相关器件，最终形成一套完整的、具有一定智能的微系统。当前的微制造技术已经能够生产出如微齿轮、微电机、微涡轮、微光学元件等产品并持续发展着，微型化技术已经成为当前及今后一段时期内科技发展的重要方向之一。

微流体系统是微系统的重要组成部分之一，广泛应用于生物医药、精密制造过程以及制药工业等领域，是一个包括通过微管道连接起来的微型阀、微型泵以及微传感器在内的系统集成。其中微管网络在微流体系统中是非常普遍的，圆形、菱形、长圆形、矩形、V 形及梯形等截面形状的微管道已运用到许多微流体系统中，它们通常具有平方微米量级的敞开横截面，输送的流体流量从几百纳升到几微升。Sparks D 等[78, 79]将微流管应用于谐振器的设计以测量流体的密度、动力学黏性、运动学黏性等。Bhirde A A 等[80]将微流管应用于药物的注射。微流管装置可作喷头应用到微小平面的书写及打印，参见文献[81,82]。

Enoksson P 等 [83]通过考察轴线为 U 形管道的扭转振动来测量管内流体的密度。文献 [84]通过激发轴线为矩形的管道发生振动并根据其频率来测量管内流体的密度，其中管道的横截面为宽 20 μm、厚 6 μm 的矩形。从设计简便和应用广泛的角度看，矩形截面或圆环形截面是微管道较为理想的截面形式。

为给微流体系统设计提供理论基础，有必要对微尺度流管的动力特性及稳定性进行深入研究。例如在微泵及微阀中，只有在知道微尺度管的固有频率范围后，才能有效地避免共振；同时为了防止系统发生屈曲或颤振，还需要研究它的临界流速。在一些微型器械中，需要通过系统的振型特点、振动频率来测量管内流体的密度、黏性等物理性质，这也只有在掌握微管动力学特性的基础上才能进行。直观上看，微尺度管是宏观管按某种比例的缩小，因而将已有宏观管理论推广到微尺度管似乎是一个可行的路径，确实也有学者进行了这方面的探索 [77]。但是事实并非如此，原因在于材料在微尺度下具有不同于宏观尺度的力学性质。

不少学者已经从实验上观察到微结构的尺度依赖行为。Fleck 等 [85]在细铜丝的扭转实验中观测到微尺度材料刚度的硬化，其中直径 12 μm 的铜丝无量纲扭矩大约是直径 170 μm 时的 3 倍。Lam 等 [86]在他们的微尺度梁弯曲实验中发现，当厚度由 115 μm 减小到 20 μm 时，无量纲弯曲刚度增大 2.4 倍。McFarland 等 [87]对不同厚度聚丙烯微悬臂梁的弯曲实验进行研究表明，无量纲弯曲刚度随梁厚度减小而增长。材料在微尺度下区别于宏观尺度的物理性质使得宏观结构的理论结果不能直接运用于微尺度工况中。因此，有必要借助非经典的连续介质力学理论对微尺度结构加以描述，才能进而建立起符合实际的数学模型，并准确预测系统的动力学行为。对微尺度管道而言，准确预测系统的动力特性和稳定性是微流体器件分析和设计中亟待解决的科学问题。

1.2　小尺度输液管道的研究现状

如上文所述，微结构具有不同于宏观结构的力学性质，因此需借

助非经典连续介质理论来研究，这对作为微结构形式之一的微流管的研究亦是如此。有两种常用于描述弹性材料微尺度效应的非经典连续介质理论：偶应力理论和应变梯度理论。实验观测表明，对于微结构的扭转、弯曲等，偶应力理论已经能够成功地估计其尺度效应。本书研究的是微尺度悬臂管弯曲振动，因此对应变梯度理论就不多做阐述，仅介绍偶应力理论。偶应力理论最早由 Toupin[88]、Mindlin 等[89, 90]、Koiter 等[91]提出，他们推导了考虑偶应力时弹性体的本构关系、平衡方程和应变能密度等，并运用于板的横向振动、圆柱体的扭转振动及弹性材料的波传播等问题的研究。在偶应力理论中，变形体中的材料颗粒不仅有力作用下的平动，而且还包含力偶作用下的转动。理论假设材料颗粒为圆柱体，长度为 l，除了随整体介质的平动外，小圆柱体还有自身的转动。因此系统的能量包括两部分：应力对应变的功以及偶应力对旋转变形的功。对于各向同性线弹性材料而言，其本构方程除了两个经典的拉梅系数外，还包含两个反映材料微尺度性质的附加常数。Yang 等[92]对偶应力理论做了修正，将本构方程中的附加常数减少一个，这对实验测试或理论研究来说都是便利的。自理论提出以来，修正的偶应力理论已经广泛地应用于微尺度梁结构的静力学或动力学研究中，见文献[92-106]。在微尺度输液管的振动研究方面，一些研究成果如下所列。

Wang[107]研究了微尺度的两端简支管的线性振动特征，采用欧拉梁模型，根据修正的偶应力理论的应变能表达式计算管道势能，考察了不同微尺度时流速对系统固有频率的影响。Xia 等[108]发展了 Wang 的研究，采用 Timoshenko 梁模型考察了微管振动的尺度依赖效应。Wang 等[109]研究了两端简支管的空间弯曲振动，不仅考虑了管材料的微尺度效应，还加入了管内流体的微尺度因素，分析了几种截面形状的直管及曲管的频率和稳定性随流速的变化。Yang 等[110]考虑轴向拉伸所导致的几何非线性，基于修正的偶应力理论研究了微管的自由振动。Tang 等[111]将修正的偶应力理论运用到对曲管的非线性振动研究中。在微纳尺度管方面，系统总结可参考文献[112]。Farokhi 等[113]分别运用经典的连续介质力学理论、修正的偶应力理论以及分子动力学方法研究了碳纳米管的非线性力学行为，对比研究指出：对于较小的

静态变形，偶应力理论给出的结果与分子动力学方法预期的符合较好；对于较大的静态变形，经典的连续介质力学理论给出的结果与分子动力学方法预期的符合较好。Hosseini 等 [114]基于修正的应变梯度理论考虑悬臂微管的稳定性问题，研究了微尺度效应对系统频率、临界流速的影响，发现相同条件下，微管较之于宏观管具有更大的频率及更高的临界流速。Bahaadini 等 [115]进一步研究了耗散对黏弹性碳纳米管稳定性的影响，综合考察了黏性系数及微尺度效应对系统频率、临界流速的影响。Dai 等 [116]考察了电场存在时微尺度悬臂输液管的动力学性质，运用 Hamilton 原理建立了系统振动方程，非线性电场力对系统稳定性边界的影响得以刻画。Dai 等[117]进一步研究了电场电压呈余弦变化时微悬臂梁的动态响应，分析了几何非线性、伽辽金模态截断阶数、材料长度尺寸参数等对幅频曲线特性的影响，可期推广于微悬臂输液管的研究当中。郭勇等 [118]从无穷维的角度，运用中心流形定理、范式理论研究了微尺度悬臂输液管的颤振，将其与宏观尺度管的分岔模式进行比较，阐明了两者的异同。不久他们又运用伽辽金方法，从有限维角度对微尺度悬臂输液管的颤振做了理论及数值探讨[119]，验证了前期工作的严格有效性。郭勇等[120]对微尺度悬臂输液管建立了空间弯曲振动的运动微分方程，基于伽辽金离散，对系统的空间周期运动和平面周期运动做了数值研究，揭示了材料长度尺寸参数对周期运动模式的影响规律。Guo 等 [121]从无限维的角度研究了材料内微尺度参数对微悬臂管周期运动类型及稳定性的影响。

1.3 主要研究内容

本书对微尺度悬臂输液管的平面振动和空间振动，通过分析位移场求得曲率张量和偶应力张量，基于修正的偶应力理论计算系统的应变能，在此基础上运用 Hamilton 原理导出管道运动的控制方程，材料长度尺寸参数对方程的影响得以体现，为管道振动非线性分析提供了合理的数学描述。

在微尺度悬臂输液管振动方程的基础上，通过研究微分方程的特征值问题得到临界流速-质量比曲线，并考察了微尺度效应对临界流速的影响。结合中心流形定理、范式理论和投影法，计算了决定系统动力学性质的相关项，从而得到降阶方程，材料长度尺寸参数对各相关项的影响得以刻画。对于平面振动问题，研究了临界流速-质量比曲线上滞后处的分岔模式，分析了微尺度效应对悬臂输液管道分岔规律的影响。对于空间问题，运用对称性对降阶方程做进一步的简化，通过平均化方法研究系统的平面周期运动和空间周期运动及其相应的稳定性，探讨临界流速-质量比曲线上滞后处分岔出的周期运动的性质及微尺度效应对两种类型周期运动的影响，并以数值模拟作为验证。

运用伽辽金离散化方法对系统做有限维分析，对不同阶的截断方程计算了临界流速-质量比曲线，刻画了模态截断阶数对临界流速精确度的影响。在临界流速处，计算了系统的退化特征值（临界特征值、实部为零的特征值）的实部关于流速的变化率（临界特征值实部的变化率）及主要的非线性项系数。在此基础上对管道的振动性态做出预测，并通过数值计算加以验证。所取的模态截断阶数不同时，探讨了不同阶离散化系统之间，以及有限维模型和无穷维模型之间动力学特性的主要差异。

第 2 章　微尺度悬臂输液管道的平面振动

2.1　引　言

宏观悬臂管的平面振动问题已经得到广泛且深入的研究，但是对于微尺度管，仅就建模这一点，相关文献表明主要都是针对两端支撑管进行的[113-115]。悬臂管的非线性方程较之于两端支撑管复杂，原因在于其不仅要考虑几何非线性对应变能的影响，而且还要考虑流体对管道的非保守力。对一个物理问题，合理地建立它的数学描述是对其进行动力学分析的基本前提。在以往的考虑几何非线性的建模中，应变能部分的计算通常基于管形心线的曲率[18,68]，鲜有从位移场、应变应力张量的角度出发进行分析。当考虑微尺度效应的时候，微元体的扭转所引起的应变能不能明显地表达为管形心线曲率的函数，因此需要从应变能密度的基本表达式出发进行推导。本章首先基于修正偶应力理论推导微尺度悬臂管大幅振动的非线性控制方程，以此为基础考察它的线性部分的特征值问题，判断系统可能的失稳方式，在系统失稳时，即临界参数值处，运用中心流形方法计算决定系统分岔模式的非线性项，并通过摄动法验证临界特征值的横截性条件，从而严格论证系统的分岔类型。考虑到临界流速-质量比曲线（临界流速曲线）存在滞后部分[6,114,115]以及宏观管和微观管的该曲线存在交点，而先前并没有其他学者对此处的非线性动力学现象做过解释，因此，本章也将一并进行研究。

2.2　微尺度悬臂输液管道的力学模型

如图 2-1（a）所示，长为 L 的微尺度悬臂输液管，横截面面积为 A_p，

抗弯刚度为 EI，单位长度的质量为 m，其输送的流体单位长度的质量为 M，流速 V 相对管形心线为常数。管的横截面是对称的，如矩形或圆［见图 2-1（c）、图 2-1（d）］。

在工程实际中，管道内外径一般远远小于管道的长度，因此将输液管道假设为梁模型是合理的。本章针对微尺度悬臂输液管道的梁模型，研究该类系统平面运动的颤振失稳。做如下基本假设。

（1）Euler-Bernoulli（欧拉-伯努利）梁模型假设：振动时忽略剪切变形以及截面绕中性轴转动惯量的影响。

（2）流体是不可压缩的、无黏的（即理想流体）。

（3）流速沿横截面高度是均匀分布的，也就是将管道内流体视为塞式流（Plug-like 流）。

（4）振动时有大的变形，但只有小的应变。

（5）在微尺度下，假设宏观流体的 Navier-Stokes 方程仍然适用。

（6）假设管道材料颗粒满足修正偶应力理论。

2.3 微尺度悬臂输液管道平面振动的微分方程

2.3.1 输液管道运动的几何分析

在管道未变形时，以管形心线所在直线为 X 轴，管内流体速度方向为 X 轴正向，悬臂端面为 $Y-Z$ 平面，管形心线与 $Y-Z$ 平面的交点为原点 O，建立参考系 $O-XYZ$（Lagrange 坐标系），用以给定管道上物质点未变形时的位形，管道的振动平行于 $X-Z$ 平面；在管道发生变形后，取另一个坐标系 $o-xyz$［Euler 坐标系，如图 2-1（b）所示，Lagrange 坐标系 $O-XYZ$ 与之重合］，用以刻画管道上物质点的瞬时位形。一个点的变形通过同一质点在非变形和变形状态下坐标的关系来描述，令 (X,Y,Z) 表示某一质点的起始位置，(x,y,z) 表示同一质点变形后（设为 t 时刻）的位置，则该质点的位移可描述为

$$
\begin{aligned}
u_1(X,Y,Z,t) &= x - X \\
u_2(X,Y,Z,t) &= y - Y \\
u_3(X,Y,Z,t) &= z - Z
\end{aligned}
\tag{2-1}
$$

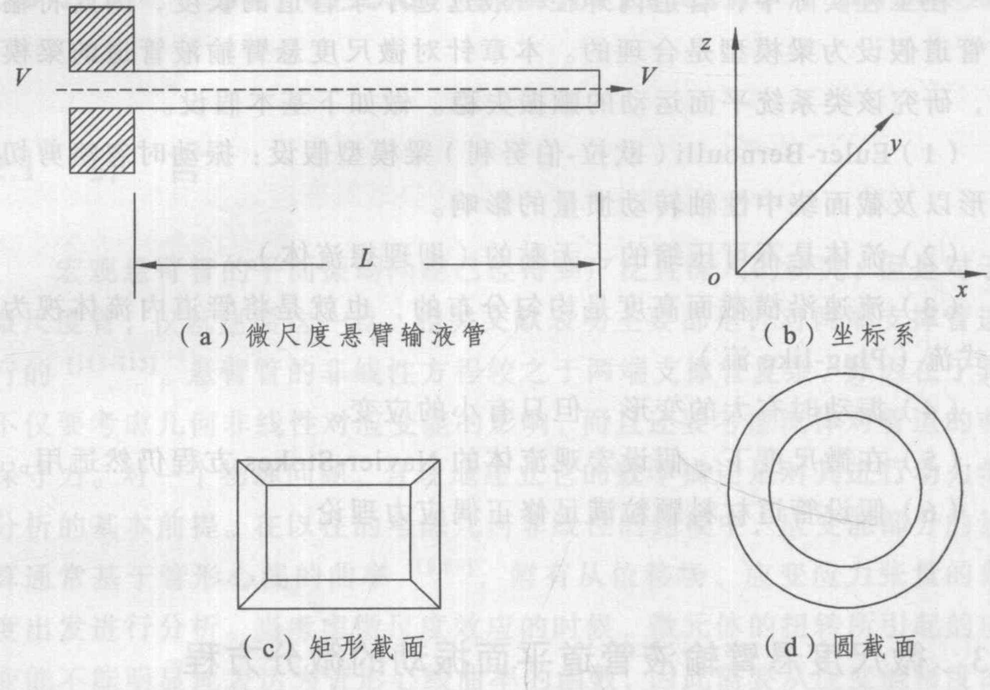


图 2-1　微尺度悬臂输液管

对于细长管的振动，可以采用欧拉-伯努利梁模型，又因管道的振动平行于 XZ 平面，则公式（2-1）可以写成

$$
\begin{aligned}
u_1(X,Y,Z,t) &= u_1(X,0,0,t) - Z\psi \\
u_2(X,Y,Z,t) &= 0 \\
u_3(X,Y,Z,t) &= u_3(X,0,0,t)
\end{aligned}
\tag{2-2}
$$

其中，ψ 是管道横截面的转角，它仅是 X 的函数。将公式（2-2）简写成

$$u_1 = u - Z\psi, u_2 = 0, u_3 = w \tag{2-3}$$

其中，u、w 分别表示点 $(X,0,0)$ 在 t 时刻沿轴向和横向的位移。记未变形时管形心线上一点 $(X,0,0)$ 距坐标原点的弧长为 s，显然 s 与 X 相等，

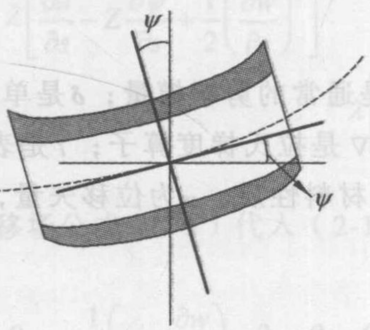
为凸显物理意义，在下面的推导中均以 s 代替 X。对于悬臂管情形，考虑到没有初始轴力作用，因此可以认为管形心线在运动过程中是没有伸缩的，即如下公式成立：

$$\left(1+\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2=1 \tag{2-4}$$

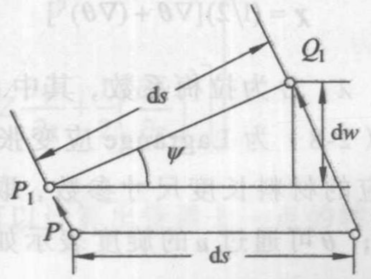
欧拉-伯努利梁理论假设管道横截面在变形后仍然保持为平面且垂直于管形心线［见图 2-2（a）］，结合不可伸缩条件式（2-4）可以得到［见图 2-2（b）：PQ 运动到 P_1Q_1］

$$\sin\psi=\frac{\partial w}{\partial s} \tag{2-5}$$

以上是关于管道变形的几何分析，接下来将以此为基础计算其变形后的应变能。



（a）变形后的微元体



（b）几何关系

图 2-2　符合欧拉-伯努利梁理论的管道变形与几何关系

2.3.2　管道的应变能与系统的动能

对于微尺度结构，因为结构的特征尺寸接近于材料颗粒的尺寸，颗粒的大小和属性已经不能忽略[88-90, 122]，即颗粒除了随介质整体的运动外，还有自身的转动。微尺度结构中微元体的应变能密度表达式和通常弹性力学中给出的不同，其不仅是应变张量的函数，而且还包