高等数学理论解析与应用研究

GAODENG SHUXUE LILUN JIEXI YU YINGYONG YANJIU

林建青　秦桂明　著

中国商业出版社

高等数学理论解析与应用研究

林建青　秦桂明　著

中国商业出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学理论解析与应用研究 / 林建青，秦桂明著.
-- 北京 ：中国商业出版社，2019
ISBN 978-7-5208-0794-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①林… ②秦… Ⅲ. ①高等数学—研究 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 120037 号

责任编辑：管明林

中国商业出版社出版发行
010—63180647 www.c-cbook.com
(100053 北京广安门内报国寺 1 号)
新华书店经销
三河市铭浩彩色印装有限公司

* * * * *

787 毫米×1092 毫米 16 开 14 印张 251 千字
2019 年 9 月第 1 版 2019 年 9 月第 1 次印刷
定价：56.00 元

* * * *

前　言

数学是人类认识和理解客观自然规律的基本工具之一，在科学技术高速发展的今天，数学在科学研究与实际应用中的作用越来越突出.高等数学是由微积分学，较深入的代数学、几何学，以及它们之间的交叉内容所形成的一门基础学科.作为理科最主要的基础学科之一，高等数学有其固有的特点，即高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性.相对于初等数学而言，高等数学的对象及方法更为复杂.

深刻理解和把握高等数学的基本理论，能够熟练应用高等数学的思想与方法处理各类问题，是学习和研究高等数学的核心意义所在.为此，作者根据当前科学技术发展形势的需要，结合自身多年的教学与科研经验，撰写了这本《高等数学理论解析与应用研究》.

本书共分为 9 章，第 1 章一元函数的极限与连续；第 2 章一元函数微分学及其应用；第 3 章一元函数积分学及其应用；第 4 章空间解析几何与多元函数微分学及其应用；第 5 章多元函数积分学及其应用；第 6 章微分方程及其应用；第 7 章无穷级数及其应用；第 8 章线性方程组；第 9 章热点问题的数学建模.本书以通俗易懂的语言，深入浅出地讲解高等数学理论及实验知识，使得数学从科学研究的幕后大步跨上技术应用的前台，成为打开众多机会大门的钥匙.就整体框架而言，虽然本书保持了高等数学的基本内容和结构，但是作者在内容编排和知识点的深度和广度上进行了思考和探索.

本书在直观、形象地解析高等数学基本理论的基础上，注重数学理论与实际问题相结合，列举并分析了大量的应用实例，突出应用特色.既可以帮助读者清楚地把握高等数学的核心理论，又可以使读者学以致用、开拓创新，强化处理实际问题的能力.全书逻辑清晰、结构完整、图文并茂，将高等数学及其应用完美地呈现于读者面前.

本书在撰写过程中参考了大量的书籍、专著和文献，得到了很多专家学者的指导和帮助，在此向这些专家、编辑及文献原作者一并表示诚挚的敬意和谢意.由于作者水平有限，加之时间仓促，书中难免存在一些不足和疏漏之处，敬请广大读者和专家批评指正.

作　者

2019 年 1 月

目录

第 1 章　一元函数的极限与连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而微积分学则以变量为研究对象. 对客观世界量与量依赖关系的研究，产生了函数与函数极限的概念. 函数是刻画现实世界中变量之间相依关系的数学模型，也是经济数学研究的主要对象. 极限是刻画变化过程中变量的变化趋势的数学工具，极限方法是研究变量的一种基本方法. 在中学数学里，通常突出的是极限的描述性定义，微积分则必须强调精确的、定量的极限定义.

1.1　集合与函数

1.1.1　集合

1.1.1.1　集合的概念与基本运算

一般来说，把具有某种共同特性的事物的全体称为集合，属于集合的每个个体称为该集合的元素. 通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素. 如果 a 是集合 A 中的元素，就说 a 属于 A，记作：$a \in A$；否则就说 a 不属于 A，记作：$a \notin A$.

一般地，我们常接触以下几个集合：**N** 表示所有自然数构成的集合，称为自然数集；**R** 表示所有实数构成的集合，称为实数集；**Z** 表示所有整数构成的集合，称为整数集；**Q** 表示所有有理数构成的集合，称为有理数集.

设 A、B 是两个集合，如果集合 A 的元素是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subseteq B$. 如果集合 A 与集合 B 互为子集，$A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A = B$. 若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subset B$. 不含任何元素的集合称为空集，记作 ϕ. 规定空集是任何集合的子集.

集合的基本运算有并、交、差.

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并

集，记作 $A \cup B$，$A \cup B = \{x \mid x \in A，或\ x \in B\}$.

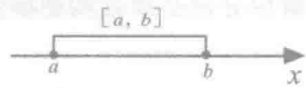
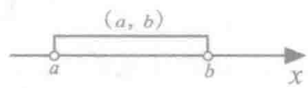
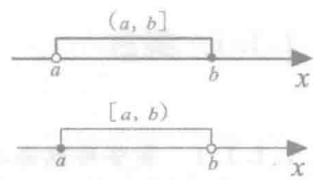
由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$，$A \cap B = \{x \mid x \in A，且\ x \in B\}$.

如果一个集合含有集合 A 中的元素，但不含有集合 B 中的元素，那么就称该集合为 A 与 B 的差集，记作 $A - B$，$A - B = \{x \mid x \in A，且\ x \notin B\}$.

1.1.1.2 区间和邻域

区间是用得较多的一类数集. 区间分类如表 1-1-1 所示.

表 1-1-1

区间的名称	区间满足的不等式	区间的记号	区间在数轴上的表示
闭区间	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a,b]$	
开区间	$a < x < b$	(a,b)	
半开区间	$a < x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x < b$	$(a,b]$ 或 $[a,b)$	

另外，还可以定义一些无限区间：

$[a, +\infty)$ 表示不小于 a 的实数的全体，记为 $a \leqslant x < +\infty$；

$(-\infty, b)$ 表示小于 b 的实数的全体，记为 $-\infty < x < b$；

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数 R，记为 $-\infty < x < +\infty$.

这里 $-\infty$ 和 $+\infty$ 是一个符合，分别读作负无穷大和正无穷大.

邻域也是一个经常用的集合. 设 a 与 δ 是两个实数，当 $\delta > 0$ 时，称开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U_\delta(a)$. 点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 点 a 的 δ 邻域在数轴上表示为以点 a 为中心，长度为 2δ 且不包括端点的线段(图 1-1-1).

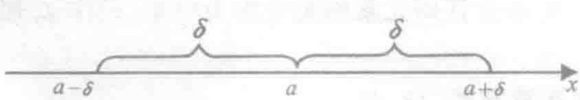


图 1-1-1

如果把点 a 去掉，则点集 $\{x \mid a-\delta<x<a\} \cup \{x \mid a<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}_\delta(a)$（图 1-1-2）.

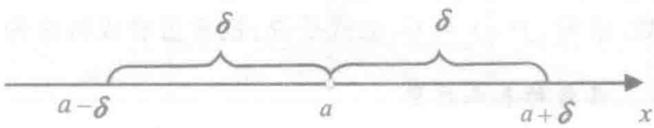


图 1-1-2

1.1.2 函数

1.1.2.1 函数的概念

在自然现象的某个研究过程中，往往存在几个变量在同时变化着，这几个变量的变化并不是孤立的，而是相互联系着的，并且遵循着一定的变化规律. 在此，先讨论两个变量的情形.

例 1.1.1 边长为 x 的正方形的面积为

$$A = x^2$$

这就是两个变量 A 和 x 之间的关系，当边长 x 在区间 $(0, +\infty)$ 内任取一个值时，由上式可以确定正方形的面积 A 的相应值.

例 1.1.2 在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，假设开始下落的时刻 $t=0$，那么 s 和 t 之间的关系为

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

其中，g 为重力加速度. 如果物体到达地面的时刻为 $t = T$，则 t 在区间 $[0, T]$ 上任取一个值时，由上式就可以确定出 s 的相应值.

以上两个例子都给出了一对变量之间的相依关系，这种相依关系确定了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任取一个值时，另一个变量依照对应法则，有唯一确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1.1 设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集，若对 D 中的每一个 x，按照对应法则 f，实数集 $\mathbf{R}$ 中有唯一的数 y 与之相对应，f 称为从 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个函数，记作

$$f: D \to \mathbf{R}$$

上述 y 与 x 之间的对应关系记作 $y = f(x)$，y 称为 x 的函数值，D 称为函数的定义域，数集 $f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域. 若把 x, y

看成变量，则 x 称为自变量，y 称为因变量.

那么，定义域 D 就是自变量 x 的取值范围，而值域 $f(D)$ 是因变量 y 的取值范围. 特别是当值域 $f(D)$ 是仅由一个实数 C 组成的集合时，$f(x)$ 称为常值函数. 这时，$f(x)=C$，也就是说，把常量看成特殊的因变量.

1.1.2.2 函数的基本性质

(1) 奇偶性. 设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；如果 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数.

(2) 单调性. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 如果任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的单调增（或减）函数. 单调增函数和单调减函数统称为单调函数. 如果任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的严格单调增（或减）函数.

(3) 周期性. 设 $f(x)$ 的定义域为 D. 若存在 $t>0$，使得 $\forall x\in D$，有 $f(x+t)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，t 是它的周期. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期. 例如 $\sin x,\cos x$ 以 2π 为基本周期，$\tan x$，$|\sin x|$ 的周期为 π；而任一正有理数都是狄利克雷函数 $D(x)$ 的周期，所以 $D(x)$ 没有最小正周期.

(4) 有界性. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subset D$. 如果存在常数 $M>0$，使得 $\forall x\in I$，有 $f(x)\leqslant M$（或 $f(x)\geqslant M$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上有上界（或下界）. 而 M 称为函数 $f(x)$ 的一个上界（或下界）. 如果 $f(x)$ 在 I 上既有上界又有下界，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界；否则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

1.1.2.3 函数的表示方法

常用函数的表示方法有以下三种：

(1) 解析法. 解析法就是用数学表达式或解析表达式把自变量和因变量之间的关系表达出来的方法. 对自变量和常数施以四则运算、乘幂、取对数、指数、三角函数以及反三角函数等数学运算所得到的式子称为解析表达式. 因函数解析表达式的不同，可以分为三种，分别是显函数、隐函数和分段函数.

(2) 图形法. 图像法就是在平面直角坐标系 xOy 中，把自变量与因变量的关系用图形表示出来的方法.

(3) 列表法. 若函数 $y=f(x)$ 采用含有自变量 x 的值与它在函数 $f(x)$ 中对应值的表格来表示，则这种表示函数的方法称为列表法. 设某一物理现

象的数学关系为 $y=f(t)$，用实验测得 t 时刻的 y 值，如表 1-1-2 所示.

表 1-1-2

t	0	t_1	t_2	…	t_m
y	y_0	y_1	y_2	…	y_m

1.2　极限的定义与计算

1.2.1　极限的定义与性质

1.2.1.1　数列极限的定义与性质

1. 数列极限的定义

数列（整标函数）可以看作 $x_n=f(n)$ 按自然数顺序列出的一串函数值：$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$. 现在来考察当自变量 n 无限增大时，数列 $x_n=f(n)$ 的变化趋势. 试看下面几个例子：

①$x_n=\dfrac{1}{2^n}$，即 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{16},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$；

②$x_n=\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$，即 $2,\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$；

③$x_n=2n$，即 $2,4,6,\cdots,2n,\cdots$；

④$x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$，即 $0,1,0,1,\cdots,\dfrac{1+(-1)^n}{2},\cdots$.

通过仔细观察可以发现，当 $n\to\infty$ 时，这几个数列的变化情况是大不相同的. 数列 ① 随着 n 的无限增大，$x_n=\dfrac{1}{2^n}$ 无限接近常数 0；数列 ② 随着 n 的无限增大，$x_n=\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近常数 1；数列 ③、数列 ④ 随着 n 的无限增大，都不能无限接近于某一个确定的常数，当 $n\to\infty$ 时，数列 $x_n=2n$ 的值也无限增大，数列 $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$ 的值在 0 与 1 两个数上来回跳动.

为清楚起见，把表示 ①、② 这两个数列的点分别在数轴上描出一些（图 1-2-1、图 1-2-2）.

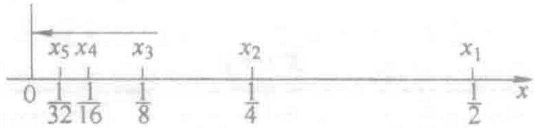


图 1-2-1

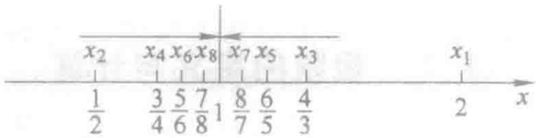


图 1-2-2

总之，当 n 无限增大时，数列 ①、数列 ② 都趋近于一个常数，这种数列称为有极限；当 n 无限增大时，数列 ③、数列 ④ 都不趋近于一个常数，这种数列称为无极限. 一般地，有下面的定义.

定义 1.2.1 设数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于一个确定的常数 A，则称当 n 趋于无穷大时，数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \text{ 或 } x_n \to A(n\to\infty)$$

此时，也称数列 $\{x_n\}$ 是收敛的；如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限，就称为发散的.

因此，当 $n\to\infty$ 时，$x_n=\frac{1}{2^n}$ 的极限是 0，可记作 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；$x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 的极限是 1，可记作 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$；而数列 $x_n=2n$ 和 $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$ 没有极限. 没有极限的数列，也说数列的极限不存在.

2. 收敛数列的性质

定理 1.2.1（极限的唯一性） 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一.

定理 1.2.2（收敛数列的有界性） 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

它可以解释为：对于收敛数列 $\{x_n\}$，存在正数 M，使得一切 x_n 都满足不等式 $|x_n|\leqslant M$.

注：有界的数列不一定收敛，即数列有界是数列收敛的必要条件，但不是充分条件. 例如，数列是有界的，但它是发散的.

定理 1.2.3（收敛数列的保号性） 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，且 $a>0$（或 $a<0$），那么存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时都有 $x_n>0$，（或 $x_n<0$）.

定理 1.2.4（收敛数列与其子数列间的关系） 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于

a,那么它的任一子数列也收敛,且极限也是 a.

1.2.1.2　函数极限的定义与性质

1. 函数极限的定义

对函数 $y=f(x)$,根据自变量的变化过程分两种情况来讨论.

(1) 当 $x\to\infty$ 时函数的极限.

定义 1.2.2　设函数 $y=f(x)$ 在$[a,+\infty)$上有定义,A 为常数.如果 $\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使得当 $x>X$ 时有

$$y=|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时有极限,极限值为 A,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

或

$$f(x)\to A(x\to+\infty)$$

上述定义的几何意义是:$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使得 $y=f(x)$ 在$[X,+\infty)$上的图像完全位于以直线 $y=A$ 为中心,宽为 2ε 的带形区域,如图 1-2-3 所示.

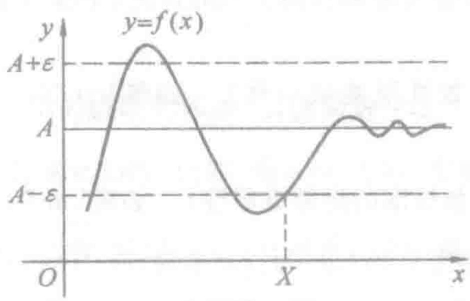


图 1-2-3

如果 $x\to-\infty$,则只要把上述定义中的 $x>X$ 改成 $x<-X$,就可以得到 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义;同样,如果 $x\to\infty$,只要把 $x>X$ 改成 $|x|>X$,就能得到$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的定义.

(2) 当 $x\to x_0$ 时函数的极限.

定义 1.2.3　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域上有定义,A 为常数.若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 $x\to x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 有极限,极限值为 A,记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

或

$$f(x) \to A, x \to x_0$$

上述定义的几何意义是：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 内的图像完全位于以直线 $y = A$ 为中心，宽为 2ε 的带形区域内（图 1-2-4）.

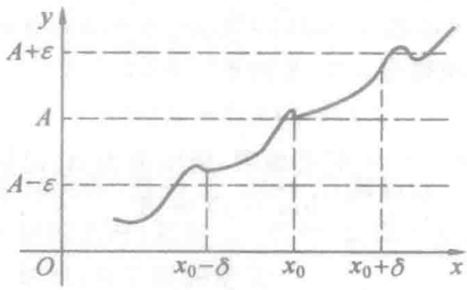


图 1-2-4

2. 函数极限的性质

对于函数极限，有与数列极限类似的性质，下面仅就 $x \to x_0$ 这种情形给出相关结论.

定理 1.2.5（函数极限的唯一性） 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，那么极限值唯一.

定理 1.2.6（函数极限的局部有界性） 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，那么存在正数 M 和正数 δ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| \leqslant M$.

证明：因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，所以取正数 $\varepsilon = 1$，存在正数 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < 1$，由此得

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - A| + |A| < |A| + 1$$

所以函数 $f(x)$ 局部有界.

定理 1.2.7（函数极限的局部保号性） 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），那么存在正数 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

证明：设 $A < 0$，因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，所以取正数 $\varepsilon = -\dfrac{A}{2} > 0$，存在正数 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<-\frac{A}{2}$$

由此得

$$f(x)<A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}<0$$

类似地，可以证明 $A>0$ 的情形.

定理 1.2.8　如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

1.2.2　无穷大与无穷小

1.2.2.1　无穷小量的定义

定义 1.2.4　如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时，$f(x)\to 0$，则称当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时，函数 $f(x)$ 为无穷小量，简称无穷小，通常用 α,β,γ 等表示.

例如，当 $x\to 0$ 时，函数 $x^2,2x$ 都是无穷小；当 $x\to 1$ 时，函数 $x-1$，x^2-1 都是无穷小；当 $x\to\infty$ 时，函数 $\dfrac{1}{x}$ 是无穷小.

应当注意：

(1) 无穷小量是以零为极限的函数. 当说函数 $f(x)$ 是无穷小量时，必须同时指明自变量 x 的变化趋向. 例如，当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量；而当 $x\to 1$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 就不是无穷小量.

(2) 常数中只有零是无穷小，这是因为零在 $x\to 0$(或 $x\to\infty$) 时，极限是 0. 而对其他常数，尽管它的值可以很小，因其值已取定(不为 0)，极限都不是 0，因此都不能说成是无穷小.

1.2.2.2　无穷大量的定义

定义 1.2.5　如果当 x 无限接近于点 x_0 时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大量，简称无穷大.

当函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大，按通常的意义来说，是极限不存在的一种形式，为了叙述上的方便，通常称“函数的极限是无穷大”，并记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty \text{ 或 } f(x)\to\infty(x\to x_0)$$

定义 1.2.6 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，对于任意正数 $M>0$，存在，$\exists\delta>0$，对任意 x，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>M$，则称函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大量.

定理 1.2.9(无穷大与无穷小的关系) 在自变量的同一个趋势下，如果函数 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果函数 $f(x)$ 为无穷且不为 0，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

1.2.3 极限的运算法则

1.2.3.1 极限的运算法则

定理 1.2.10 设极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在，则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$ 的极限也存在，且

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}Cf(x)=C\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$，则当 $x\to x_0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限也存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$.

1.2.3.2 复合函数的极限运算法则

函数极限不仅可以进行四则运算，而且还可以进行复合运算，下面仍就 $x\to x_0$ 的情形给出复合函数的极限运算法则. 然而其结论对于 $x\to\infty$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$ 的情形依然成立.

定理 1.2.11 设函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的，$f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$ 且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $\varphi(x)\neq u_0$，那么

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$$

特别地，若 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x\to x_0}(x)] = f(u_0)$$

证：由题设知，$\exists \delta_1 > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，$\varphi(x) \neq u_0$，所以，当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，

$$|\varphi(x) - u_0| > 0$$

因为 $\lim_{u\to u_0} f(u) = A$，所以，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta_2 > 0$，当 $0 < |u - u_0| < \delta_2$ 时，有 $|f(u) - A| < \varepsilon$ 成立. 又因为 $\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = u_0$，所以，$\forall \delta_2 > 0$，$\exists \delta_3 > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta_3$ 时，有 $|\varphi(x) - u_0| < \delta_2$ 成立，即 $|u - u_0| < \delta_2$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_3\}$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $0 < |u - u_0| < \delta_2$，从而有 $|f(u) - A| < \varepsilon$ 成立，即

$$|f[\varphi(x)] - A| < \varepsilon$$

成立. 所以

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = A$$

该定理表明，如果函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 满足该定理的条件，那么要求 $\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]$，可以作变换 $u = \varphi(x)$，若 $\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u\to u_0} f(u)$$

1.2.4 极限的存在准则

1.2.4.1 夹逼准则

准则 1.2.1 如果数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$ 满足如下条件：

(1) $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$

(2) $\lim_{n\to\infty} y_n = a$，$\lim_{n\to\infty} z_n = a$

则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

证：因为 $\lim_{n\to\infty} y_n = a$，$\lim_{n\to\infty} z_n = a$，所以对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N_1、N_2，使得当 $n > N_1$ 时，有 $|y_n - a| < \varepsilon$；当 $n > N_2$ 时，有 $|z_n - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，有 $|y_n - a| < \varepsilon$，有 $|z_n - a| < \varepsilon$，即

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

从而当 $n > N$ 时，有

$$a - \varepsilon < y_n \leqslant x_n \leqslant z_n < a + \varepsilon$$

即

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

则