



数学教育丛书

(第3版)


数学哲学

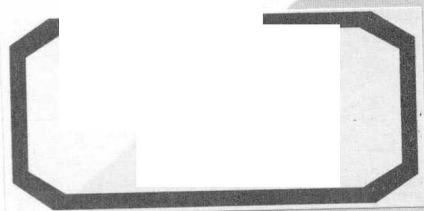
SHUXUE ZHEXUE

曹一鸣 王光明 代 钦◎丛书主编
张景中 彭翥成◎著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

 数学教育丛书



(第3版)

数学哲学

HUXUE ZHEXUE

RFID

曹一鸣 王光明 代钦◎丛书主编
张景中 彭翕成◎著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学哲学/张景中, 彭翥成著. —3版. —北京: 北京师范大学出版社, 2019.1

(数学教育丛书)

ISBN 978-7-303-23432-5

I. ①数… II. ①张… ②彭… III. ①数学哲学
IV. ①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 021575 号

营销中心电话 010-62978190 62979006
北师大出版社科技与经管分社 www.jswsbook.com
电子信箱 jswsbook@163.com

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码: 100875

印 刷: 天津中印联印务有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 730 mm×980 mm 1/16
印 张: 15.75
字 数: 245 千字
版 次: 2019 年 1 月第 3 版
印 次: 2019 年 1 月第 1 次印刷
定 价: 39.00 元

策划编辑: 梁志国 刘风娟 责任编辑: 梁志国 刘风娟
美术编辑: 刘 超 装帧设计: 刘 超
责任校对: 赵非非 黄 华 责任印制: 赵非非

版权所有 侵权必究

反盗版、反侵权举报电话: 010-62978190

北京读者服务部电话: 010-62979006-8021

外埠邮购电话: 010-62978190

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-62979006-8006

数学教育丛书

顾 问 徐利治 张景中 张奠宙
张英伯

主 编 曹一鸣 王光明 代 钦

丛书编委会(按姓氏笔画排序)

马云鹏 王光明 孔凡哲 代 钦

宁连华 宋乃庆 张生春 张英伯

张春莉 张景中 张奠宙 松宫哲夫

徐利治 徐斌艳 高 旻 涂荣豹

黄秦安 曹一鸣 喻 平

总 序

成为一名优秀的数学教师,是每一位有责任心和事业心的数学教师的神圣使命。推动中国数学教育实践的良性发展,提高中国数学教育的质量,是每一位中国数学教育工作者的匹夫之责。

数学教育是数学的教育,数学教师需要有良好的数学素养。20世纪后半叶及21世纪初科学技术的迅猛发展,对大、中、小学数学教育提出了越来越高的要求,数学课程改革需要不断应对时代的挑战。将一些现代数学的内容以及思想方法(譬如,微积分、向量、算法、编码、统计、群等)引进中学数学课程,已是大势所趋。相比以往,正在实施中的数学新课程,内容变化较大,许多选修课的内容甚至连教师都没有学过。现在的课程内容涉及的知识面广,难以全面掌握、深刻理解,使得广大的中学数学教师正面临着前所未有的危机与挑战。

教师是一个专门的职业,作为一位优秀的数学教师需要有良好的数学教育素养。面对时代的要求,面对新的教学理论、教育技术,如何处理传统与现代的关系,改进教学方式,让学生主动参与教学,减轻学生过重的数学学习负担,提高数学教学效率,促进学生长远发展,这些都需要教师对数学教育理论进行系统的学习与研究。

全国高等师范院校数学教育类课程与教材建设正在进行之中。近年来的全国高等师范院校数学教育研究会特别将“数学教育专业课程建设”以及“研究生培养”作为重点专题来研究。2005年全国高等师范院校数学教育研究会常务

理事会期间,部分专家提出目前没有合适的、系统的数学教育本科、研究生(特别是教育硕士)教材。2006年全国高等师范院校数学教育研究会议再次提出这一问题。会议期间几位热心的学者着手策划此事,从而诞生了本套丛书。该套丛书得到了许多著名数学家以及数学教育家的鼎力支持。张景中院士、徐利治教授、张奠宙教授欣然担任丛书顾问,并承担丛书的编写工作。他们身体力行,为建设中国数学教育大业,提高数学教育类教材水平鞠躬尽瘁。他们严谨治学的态度深深地影响着参与丛书编写工作的各位同仁。各位编委(分册主编)齐心协力,充分利用参与国内外学术交流的机会,探讨交流、出谋划策,经过大家的共同努力,初步确定了这一套书的总体框架,也彰显了国内数学教育同仁的强烈责任心和神圣使命感。

北京师范大学出版社大力支持我国的数学教育类课程与教材建设,理科编辑室梁志国主任精心运作,将“丛书”纳入出版计划,体现了北京师范大学出版社服务于教育事业的使命感。

这套丛书共12本,构成一个整体,基于数学,紧密联系数学教学实践,各有侧重:一类加深数学素养的提升,如《数学哲学》《数学方法论选读》《现代数学通览》《现代数学与中学数学》(第2版);另一类则注重于提升数学教育理论与研究水平,如《数学教育原理——哲学、文化与社会的视角》《数学课程导论》《数学教学论》《数学教学心理学》《数学教育测量与评价》《数学教育研究方法 with 论文写作》《数学教育史》《数学教学案例研究》。

愿该套丛书的出版能够为有志于系统研习数学教育理论,全面提高数学及数学教学、科研水平的中小学教师、教研员、本科生、研究生提供有效的帮助。

数学教育丛书编委会

2018年10月

代 序

数学科普的飞跃——《数学与哲学》读后感

著名数学家 中科院院士 王元

由于具体的数学问题多如繁星,数学家往往整天埋头于解决数学问题,无暇关注数学发展中出现的“矛盾”。但数学史告诉我们,恰好是“矛盾”的一次次解决,才导致数学发展的飞跃与深化。张景中的书《数学与哲学》就是对数学发展中这些重大的历史事件,用通俗的讲法向大众展示当时的争论内容与形势,及以后的解决办法及数学的飞跃发展。可以说是一本可读性很高,可以雅俗共赏的书,各种文化程度的人都可以从该书中受到启发与得到益处,也包括数学专业研究人员在内,因为这些人不一定很熟悉历史上的一些数学争议。

例如关于数,是否仅有自然数及由它产生的有理数就够了。那么 $\sqrt{2}$ 是什么?这就导致无理数的产生。在欧氏几何中,不少人企图给出第五公设的证明,但都失败了。这导致非欧几何的产生;无穷小量的应用与定义,导致严格实数极限理论的建立;无穷集合的比较;集合定义的确立及哥德尔定理,等等。每经过这些重大的历史事件,数学思想都得到飞跃,从而使数学得到发展与质的飞跃。

本书对这一系列重大事件作了通俗具体的解释,看了觉得很有趣味。一般说来,具备一定数学程度的人,就可以了

前 言

本书原名《数学与哲学》，是丁石孙先生主编的《数学·我们·数学》丛书中的一册，曾于1990年由湖南教育出版社出版。后来台湾九章出版社于1995年出版了繁体字版。21世纪以来，又在中国少年儿童出版社、大连理工大学出版社、湖北科技出版社先后出版。

目前作为“数学哲学”课程教材的版本，是根据曹一鸣教授的建议修订增补的。我的助手彭翕成在修订增补过程中做了很多工作，不少新添的段落是他完成的。

感谢热情的读者，他们通过不同渠道对本书前身《数学与哲学》进行了评论，使我受益匪浅。网上看到的台湾吴文成先生的如下评论，对于用此书作为教材或参考书的同学是有帮助的：

“总的来说，这本书并非是系统性论述数学哲学(philosophy of mathematics)的专书，但是它——在横向与纵向上——可以说是数学哲学很适合的入门读物，对于没有接触过数学哲学的青年学子们，尤其是如此。在横向上，这本书简要而技巧性地切入了数学哲学的重要议题，例如连续性概念(第1章万物皆数观点的破灭与再生)、几何与公理化(第2章哪种几何才是真的)、微积分基础(第3章变量·无穷小·量的鬼魂)、数学对象的本体论争议(第6章数是什么)等。在纵向上，它连贯了若干议题的关键内涵，包括在不同的议题之间带出潜无限与实无限的争议(主要在第1章、第3章、第4章自然数有多少)、数学基础问题(主要在第5章罗素悖论引起的轩然大波、第6章数是什么、第7章是真的，

但又不能证明)、数学体系与结构(主要在第2章、第5章、第8章 数学与结构)以及数学证明方法论(主要在第1章、第10章 举例子能证明几何定理吗)的讨论等。这本书虽然就专业性而言,上述的主题只是点到为止,可是这也是此书的优点:较少的专业性,而有更多的教育性与启发性。对于比较难的主题,例如哥德尔的不完备定理,作者也用了浅显易懂的方法来介绍,这让初学的读者们能够很快地看出该主题的大致轮廓。

另外,值得一提的是这本书也有特殊而引人深思的章节,例如第9章、第12章 数学与哲学随想。在细心阅读下,我们会发现作者想要引入某种辩证思维——也就是两种对立观念的总体性与可互援引性,例如作者谈道:数学与哲学的互补、演绎与归纳的联系、特殊与一般的相涵、分析与综合的转用、连续与离散的统一、必然与偶然的协调(从偶然产生必然、从必然产生偶然)、主观(创造)与客观的合一等,这些二元关系在历史上一直是哲学——包括形上学、方法论领域的重要问题,令人惊讶的是这本书都简略地点到了。”

既然作为数学哲学的教材,书名也成了《数学哲学》,也就不免涉及什么是数学哲学的问题。

好在对于数学哲学,已经有约定俗成的解释。在网上容易查到对它的通常的看法:

哲学的一个分支,研究数学中的哲学问题的学科。从毕达哥拉斯到康德的众多思想家都有许多数学哲学的重要思想,但作为专门学科直到19世纪中叶以后才逐渐建立起来。着重研究:

- (1) 数学的对象、性质、特点、地位与作用;
- (2) 数学新分支、新课题提出的重要概念的哲学意义;
- (3) 著名数学家和数学流派的数学和哲学思想;
- (4) 数学方法和数学基础等问题。

现代数学哲学的研究内容包括:

- (1) 数学基础的研究,形成罗素的逻辑主义、布劳威尔的直觉主义和希尔伯特的形式主义等流派;
- (2) 数学悖论的研究,探讨悖论的排除及彻底解决的可能性;
- (3) 数学本体论的研究,探讨数学的研究对象是否为客观的真实的存在,数学真理性的研究等。

我们看到,数学哲学的内容,是在历史上形成的。并不是先有人规定了什么是数学哲学,然后请大家研究。而是有人研究了这些问题,后人总结整理称之为数学哲学。

因此,数学哲学的内容不是一成不变的。古老的争论或许会逐渐淡化,新的题目会不断产生。

飞速发展的数学,不断为数学哲学提供新的血液。尽管本书仅仅是入门读物,但也不乏这样的事例。如:

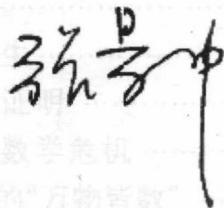
在第3章末尾,谈到不用极限也不用无穷小就能建立微积分。那么,长期以来数学家对无穷小和极限的思考是不是走了一个大弯路?为何如此平凡简易的方法过去没有被发现?

第5章里提到,我国数学家文兰经过严密论证后指出,古老的“说谎者悖论”不过是布尔代数里的一个矛盾方程。这样看来,悖论的重要性就要大打折扣了。代数里的矛盾方程是司空见惯的,没有必要大惊小怪。是不是其他悖论,本质上都是矛盾方程呢?

在第11章谈到计算机对数学的影响,这里有不少数学哲学可以讨论的问题,如何看待计算机推出的定理不过是其中之一。

其他如对“芝诺悖论”的逻辑剖析,对必然与偶然的理解,对归纳与演绎对立统一的认识,都值得进一步思考辨析。

如果你学完本书后认为数学哲学很有趣,知道用哲学的眼光看看数学,也知道用数学的眼光看看哲学,作者将感到极大的满足。



2018年8月

张景中: zjz2271@163.com

彭翥成: pxc417@126.com

目 录

第 1 章 “万物皆数”观点的破灭与再生

——第一次数学危机与实数理论 /1

- | | | |
|------|----------------------------|----|
| 1.1 | 毕达哥拉斯学派的信条
——万物皆数 | 2 |
| 1.2 | 第一个无理数 | 2 |
| 1.3 | 无理数之谜 | 4 |
| 1.4 | 连续性的奥秘 | 5 |
| 1.5 | 戴德金分割 | 6 |
| 1.6 | 连续归纳原理 | 8 |
| 1.7 | “万物皆数”的再生 | 9 |
| 1.8 | 勾股定理的多种证明 | 10 |
| 1.9 | 无理数与第一次数学危机 | 11 |
| 1.10 | 中国古代文化中的“万物皆数” | 13 |
| 1.11 | 一分为二和一分为三 | 16 |

第 2 章 哪种几何才是真的

——非欧几何与现代数学的“公理” /19

- | | | |
|-----|-------------------|----|
| 2.1 | 欧几里得的公理方法 | 20 |
| 2.2 | 欧几里得的几何定理是真理吗 ... | 21 |
| 2.3 | 非欧几何的发现 | 22 |
| 2.4 | 哪一个是真的 | 24 |
| 2.5 | 公理是什么 | 25 |

2.6	古今由圆外一点向圆作切线的不同	27
2.7	定义的多样性和局限性	28

第3章 变量·无穷小·量的鬼魂 ——第二次数学危机与极限概念 /32

3.1	数学怎么描述运动与变化	33
3.2	瞬时速度	35
3.3	微分是量的鬼魂吗	37
3.4	无穷小量的再生	39
3.5	不用极限的微积分	41

第4章 自然数有多少 ——数学中的“实在无穷”概念 /51

4.1	伽利略的困惑	52
4.2	康托,闯入无穷王国的先锋	53
4.3	希尔伯特的“无穷旅店”	56
4.4	所有的无穷都一样吗	57
4.5	自然数究竟有多少	61
4.6	有理数的自白	63
4.7	素数无穷的不同表述	64
4.8	数学的严格	65
4.9	欧氏几何是否严谨	66
4.10	眼见未必为实	68

第5章 罗素悖论引起的轩然大波 ——第三次数学危机 /72

5.1	逻辑—集合—数	73
5.2	罗素悖论	74
5.3	集合的层次理论	75
5.4	集合论的公理化	76
5.5	连续统假设	77

5.6	地平线仍在前方	78
5.7	悖论与危机	80
第6章 数是什么		
——对数学对象本质的几种看法 /84		
6.1	1是什么	85
6.2	柏拉图主义——数存在于理念世界	87
6.3	唯名论观点——数是纸上的符号或头脑中特定的概念	89
6.4	康德:数是思维创造的抽象实体	90
6.5	约定论的观点——数学规则不过是人的约定	91
6.6	逻辑主义——算术是逻辑的一部分	92
6.7	直觉主义——数学概念是自主的智力活动	93
6.8	形式主义——把数学化为关于有限符号排列的操作	95
6.9	争论与统一	97
6.10	存在与构造	98
6.11	$0.\dot{9}=1$ 吗	101
第7章 是真的,但又不能证明		
——哥德尔定理 /103		
7.1	哥德尔定理	105
7.2	说谎者悖论与理查德悖论	106
7.3	算术有多少种	107
7.4	数学的力量与局限	109
7.5	数学的局限与加密	110
7.6	数学的局限与博弈	111
第8章 数学与结构		
——布尔巴基学派的观点 /114		

8.1	在逻辑长链的背后	116
8.2	形形色色的加法	118
8.3	基本的结构	121
8.4	分析与综合的艺术	124
8.5	布尔巴基学派和新数运动	128

第9章 命运决定还是意志自由

——必然性与偶然性的数学思考 /130

9.1	两种对立的哲学观点	131
9.2	从偶然产生必然	136
9.3	从必然产生偶然	138
9.4	一场风暴或一口痰能影响民族的命运吗	139
9.5	什么叫必然? 什么叫偶然	141
9.6	抽屉原理	144
9.7	五百年必有王者兴	145
9.8	抛硬币真的公平吗?	146

第10章 举例子能证明几何定理吗

——演绎与归纳的对立与统一 /149

10.1	例证法——用演绎支持归纳	150
10.2	几何定理也能用例子证明	151
10.3	进一步的思考	154
10.4	验证三角形内角和定理	157
10.5	精确数学和近似数学	158
10.6	例证法与动态几何	160

第11章 计算机正在改变数学 /161

11.1	四色定理的机器证明	162
11.2	计算机证明的定理可靠吗	163
11.3	数学和计算机共同发展	165
11.4	《九章算术》的算法思想	166

- 11.5 几何信息搜索系统简介 167
- 11.6 机器证明软件简介 172

第 12 章 审视作为教育任务的数学 /180

- 12.1 《几何原本》教学角度的改进 180
- 12.2 《几何原本》学术角度的完善 184
- 12.3 数学知识的表示 187
- 12.4 知识的表示影响数学证明 190
- 12.5 优化数学的基本标准 193
- 12.6 从高斯线定理的巧证谈证法之优劣 199
- 12.7 什么是巧合点 203

第 13 章 数学与哲学随想 /206

- 13.1 数学的领域在扩大,哲学的地盘在缩小 206
- 13.2 数学始终在影响着哲学 207
- 13.3 抽象与具体 209
- 13.4 涉及具体问题,语言必须精确严格 210
- 13.5 个别与一般 213
- 13.6 事物与概念 215
- 13.7 “我不需要这个假设” 216
- 13.8 证实与证伪 217
- 13.9 数学世界是人的创造,但它是客观的 218
- 13.10 事物的总体性 219
- 13.11 变化中的不变 220
- 13.12 预言 221
- 13.13 “没有两件事物完全一样” 222
- 13.14 物极必反 225
- 13.15 论怀疑 226
- 13.16 量变与质变 229
- 13.17 罗素与“事素” 230

第1章 “万物皆数”观点的破灭与再生

——第一次数学危机与实数理论

联系数学的发展历史学习数学哲学，有趣而且有效。

数学史为数学哲学的研究提供了背景资料，让我们看到不同时期的数学家对数学的看法，他们的思想是如何产生和发展的。

西方数学史言必称希腊，这是因为希腊确实有其值得称耀的地方。第1章从古希腊的毕达哥拉斯学派讲起，因为他们最早提出了系统的数学哲学思想。在今天看来，他们掌握的数学知识不多，但志向不小。他们面对浩瀚宇宙，希望寻找万物的本原，提出了“万物皆数”这样一个大一统的命题，并为论证该命题作出了很多的努力。

对于毕达哥拉斯学派用数来解释万物及其变化规律，恩格斯给出很高的评价，认为“宇宙的规律性第一次被说出来了”。

毕达哥拉斯学派对后世的数学哲学思想有着深远的影响。

面对 $\sqrt{2}$ 这个新事物的出现，已有的体系已经容不下它。是把它驱逐出去，还是建立一个更大的体系来容纳它？

说清楚 $\sqrt{2}$ 需要建立实数系统，需要把什么是连续性说清楚。这是一个古老的哲学问题。毕达哥拉斯学派和后来的许多哲学家都没有解决这个问题。在两千多年后，数学家解决了这个问题。因为这本质上是一个数学问题。

学习完本章，我们可以看到，数学和哲学自古以来就有密切的联系。

古代的哲学家大都是博学多才的人，他们不但能滔滔不绝地讲自己的哲学见解，还能讲自然现象、社会伦理，特别是数学的道理。你不要以为这是因为古人特别聪明，或是后来的哲学家不行了。这主要是因为那时各门科学还没有分家，哲学就是包罗万象的学问。另外，那时人类的知识比现在贫乏得多。所谓博学，是相对于当时多数人知识贫乏而言的。实际上，古代所谓精通数学的哲学家，他的数学知识未必赶得上今天的中学生。

在古希腊，哲学家大都格外重视数学。最早的唯物主义哲学家泰勒斯，提出原子唯物论的德谟克利特，最早的唯心主义哲学家毕达哥拉斯，都曾到埃及学习几何知识。创立理念论唯心主义体系的柏拉图，也特别推崇数学知识。在