XINJIAOCAI GAOKAO FUXI JINGBIAN

浙江省基础教育
课程教材开发研究中心

新教材高考复习精编

数学

（理科版）

浙江教育出版社

新教材

高考复习精编

数学

(理科版)

浙江省基础教育课程教材开发研究中心

浙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

新教材高考复习精编. 数学. 理科版/王而冶等编写.
—杭州:浙江教育出版社,2004.1
ISBN 7-5338-5023-8

Ⅰ.新… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 103915 号

责任编辑 金馥菊
美术编辑 王大川

新教材高考复习精编·数学(理科版)

《新教材高考复习精编》编写组
出　　版: 浙江教育出版社
发　　行: 浙江省新华书店
印　　刷: 诸暨富林印务有限公司
开　　本: 787×1092　1/16
印　　张: 22.5
字　　数: 450000
版　　次: 2004 年 1 月第 1 版
印　　次: 2004 年 1 月第 1 次印刷
书　　号: ISBN 7-5338-5023-8/G·4993
定　　价: 21.50 元

前　言　MULU

为了帮助广大考生理解课程改革和高考改革的精神，把握好高三复习的内容、范围、要求和难度，我们根据教育部2002年颁布的学科教学大纲以及按照教学大纲修订的教材，邀请我省部分特级教师以及多年在高三任教的骨干教师，编写了《新教材高考复习精编》丛书。

本丛书包括语文、数学、英语、理科综合(物理、化学、生物分册)、文科综合(政治、历史、地理分册)。

数学分册分单元按课时编写，每单元设[**考点透视**]栏目，每课时设[**例题剖析**]、[**方法提炼**]、[**基础过关**]和[**能力迁移**]四个栏目。

[**考点透视**]　阐述本单元内容在高考中的地位和要求，以及通过本单元学习应达到的知识、能力要求，应掌握的方法等。

[**例题剖析**]　精选新颖、典型的代表性例题5个。其中两个例题列出规范详解及评注，评注从规范解题、能力迁移，以及本题的引申、拓展、举一反三等方面加以点拨；其他3个例题只列出题目，供学生自主探索解答。

[**方法提炼**]　根据5个典型例题，归纳运用本节知识可以解决的问题，以及解题的常规思路、常用方法、技能技巧和注意事项等。

[**基础过关**]　精选6道有代表性的基础题。

[**能力迁移**]　精选7个有关本节课所及内容和方法解决的代表性问题。

每章最后设置一份能力测试卷，书的最后还编制了与高考要求和难度相适应的模拟试卷。

突出一个“精”字是本丛书的显著特点。精要阐释学科的主干知识和能力考核的基本内容，阐明考点与能力训练的关键点，使复习更具针对性。精选精析典型题例，所选例题的思维层次、解题方法都具有典型性；问题剖析简明扼要，击中要害，具有启发性；并从审题、分析、规范等角度评述解题的策略和方法，具有实效性。精选的基础过关和能力迁移题，既考虑知识的覆盖面，又注重知识的综合和应用，并注意问题的新颖性、应用性、探索性、开放性和前瞻性。

参加本书编写的有特级教师王而冶、刘建永、赖忠华、李昌官、冯寅、朱恒元、占章根，高级教师郑日锋、许芬英。全书由占章根、许芬英统稿。

丛书凝聚着广大教师指导高考复习的精华，希望能为考生和教师提供有益的参考，并恳请大家在使用过程中多提宝贵意见，以使丛书日臻完善。

浙江省基础教育课程教材开发研究中心

2003年6月

目　录

MULU

第一章

集合与简易逻辑

一、集 合

考点透视
Kaodian toushi

集合是每年高考必考的知识点之一.要求理解集合的有关概念,掌握有关的术语与符号,能正确地表达一些较简单的集合.高考试题常以选择、填空的形式出现,同时集合作为一种数学语言、数学工具、数学思想,它在函数、方程、不等式、排列组合及解析几何等方面都有广泛的运用.

课时 1 集合的概念

例题剖析
Liti pouxi

例 1 设 S 是数集,满足下列两个条件:

①$1\notin S$;②若 $x\in S$,则$\dfrac{1}{1-x}\in S$.

(1) 若 $2\in S$,求集合 S;

(2) S 能否为只有一个元素的集合?若能,把它表示出来.

解 (1) $\because\ 2\in S$, $\therefore\ \dfrac{1}{1-2}\in S$,即 $-1\in S$,得$\dfrac{1}{1-(-1)}\in S$,即$\dfrac{1}{2}\in S$.

由此得$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in S$. $\therefore\ S=\left\{-1,\dfrac{1}{2},2\right\}$.

(2) 设 $x\in S$,且 $S=\{x\}$,则有 $x=\dfrac{1}{1-x}$,得 $x^2-x+1=0$,

解得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$. $\therefore\ S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right\}$或 $S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right\}$.

评注 正确理解元素与集合的关系及集合中元素的三个特性是解答集合问题的基础,准确的转译符号语言和文字语言是解题的关键.

例 2 已知实数 a,x,集合 $A=\{2,4,x^2-5x+9\}$,集合 $B=\{3,x^2+ax+a\}$,集合 $C=\{x^2+(a+1)x-3,1\}$.求:

(1) 使 $A=\{2,3,4\}$的 x 的值;

(2) 使 $2\in B$, $B\subsetneqq A$ 的 a,x 的值;

(3) 使 $B=C$ 的 a,x 的值.

例 3 若 $x,y\in\mathbf{R}$, $A=\{(x,y)\mid xy=0\}$, $B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=0\}$, $C=\{(x,y)\mid$

$(x-y)^2=0\}$, $D=\{(x,y)\mid x^2=y^2\}$,试将集合 A,B,C,D 中具有包含关系的任两个集合都写出来.

例 4 设 M 是满足下列两个条件的函数 $f(x)$ 的集合:

①$f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$;

②若 $x_1,x_2\in[-1,1]$,则 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 4|x_1-x_2|$.

试问:$g(x)=x^2+2x-1$ 是否属于集合 M? 并说明理由.

例 5 已知 $x\in\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$, $C=\{x\mid x^2-bx+2=0\}$.问:是否存在实数 a,b,使 $B\subsetneqq A$, $C\subseteq A$ 同时成立.若存在,求出 a,b 所有的值的集合;若不存在,说明理由.

解 $A=\{1,2\}$, $B=\{1,a-1\}$.

由 $B\subsetneqq A$,有 $\begin{cases}a-1\neq 1,\\ a-1\neq 2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a\neq 2,\\ a\neq 3.\end{cases}$

由 $C\subseteq A$,知 $\Delta=b^2-8$.

(1) 当 $\Delta<0$ 时, $C=\varnothing\subseteq A$,此时 $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$;

(2) 当 $\Delta\geqslant 0$ 时, $b\geqslant 2\sqrt{2}$ 或 $b\leqslant -2\sqrt{2}$,此时 $C\neq\varnothing$.

若 $C=A=\{1,2\}$,则 $1+2=b$, $\therefore\quad b=3$;

若 $C=\{1\}$ 或 $C=\{2\}$,则 $\Delta=0$,即 $b=\pm 2\sqrt{2}$,此时方程 $x^2-bx+2=0$ 的根为 $x=\pm\sqrt{2}$,不满足 $C=\{1\}$ 或 $\{2\}$,舍去.

综上所述,这样的 a,b 存在, $a\in(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$,

$$b\in(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})\cup\{3\}.$$

评注 准确理解符号 $\subseteq$、$\subsetneqq$ 的含义及集合元素的互异性,注意 $\varnothing\subseteq A$.正确进行分类讨论是解决本题的关键.

方法提炼

Fangfa tilian

正确理解集合语言,掌握 $\in$、$\subseteq$、$\subsetneqq$、$\cap$、$\cup$、$\complement_U A$ 等符号的含义,是解集合问题的基础.对于用描述法给出的集合 $\{x\mid x\in P\}$,要抓住竖线前面的代表元素 x 及它所具有的性质 P,切不可将 $A=\{x\mid y=x^2-1\}$、$B=\{y\mid y=x^2-1\}$、$C=\{(x,y)\mid y=x^2-1\}$ 混淆.要注意等价思想的运用,如 $A\cup B=B$, $A\cap B=A$ 均等价于 $A\subseteq B$.

掌握集合元素的特征是解有关集合问题的重要环节,其中元素的互异性常易疏忽,在解题时注意检验.特别注意"$\varnothing$"这个特殊的集合,防止"$\varnothing$"引起的取值范围的扩大或缩小,应周密思考.

基础过关

Jichu guoguan

1. 下面 4 个集合中,表示空集的是(　　)

(A) $\{0\}$.　　(B) $\{(x,y)\mid x^2+y^2=0,x,y\in\mathbf{R}\}$.

(C) $\{x\in\mathbf{C}\mid x^2+1=0\}$.　　(D) $\left\{x\,\middle|\,\sin x+\cos x=\dfrac{3}{2},x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}$.

2. 设集合 P,Q 与全集 U,下列命题:① $P\cap Q=P$;② $P\cup Q=Q$;③ $P\cap\complement_U Q=\varnothing$;

④ $\complement_U P \cup Q = U$ 中与命题 $P \subseteq Q$ 等价的有(　　)

(A) 1 个.　　(B) 2 个.　　(C) 3 个.　　(D) 4 个

3. 当 $\{a, 0, -1\} = \left\{c, \frac{1}{b}, 1\right\}$ 时,则 $a =$ ________, $b =$ ________, $c =$ ________.

4. 若 $a \in \mathbf{R}$,集合 $M = \{2a, a^2 - a\}$ 有 4 个子集,则 a 的取值范围是________.

5. 已知 $A = \{x \mid |x - 1| \geqslant a\}$, $B = \left\{x \,\middle|\, \begin{cases} 2x - 1 < 3x + 5, \\ 5x - 2 < 3x + 6 \end{cases}\right\}$,且 $A \cup B = \mathbf{R}$,求 a 的范围.

6. 含有 3 个实数的集合,可表示为 $\left\{x, \frac{y}{x}, 1\right\}$,也可表示为 $\{x^2, x + y, 0\}$. 试求 $x^{2004} + y^{2004}$ 的值.

能力迁移 Nengli qianyi

7. 设 A, B 是两个非空集合,定义 A 与 B 的差为 $A - B = \{x \mid x \in A$,且 $x \notin B\}$,则 $A - (A - B)$ 为(　　)

(A) A.　　(B) B.　　(C) $A \cap B$.　　(D) $A \cup B$.

8. 设 $A = \left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}\right\}$, $B = \{(x, y) \mid y = x + a\}$,若 $\varnothing \subsetneqq A \cap B$,则实数 a 的取值范围是(　　)

(A) $-3\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 3\sqrt{2}$.　　(B) $-3 \leqslant a \leqslant 3$.

(C) $-3 < a \leqslant 3\sqrt{2}$.　　(D) $3 \leqslant a \leqslant 3\sqrt{2}$.

9. 设全集 $U = \mathbf{R}$,集合 $M = \{x \mid y = 6 - 4x\}$, $N = \{x \mid y = \sqrt{x - 1}\}$,则 $M \cup \complement_U N =$ ________.

10. 设集合 $A_n = \{x \mid 2^n < x < 2^{n+1}$,且 $n = 7m + 1, m, n \in \mathbf{N}^*\}$,则 A_5 中各元素之和为________.

11. 已知函数 $f(x) = x^2$,集合 $A = \{x \mid f(x - 1) = ax, x \in \mathbf{R}\}$,且 $A \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$,求实数 a 的范围.

12. 互不相同的 5 个整数组成的集合 $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$,已知 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = -8$. (1) 求 S 的所有子集的个数;(2) 写出由 S 中任取 4 个元素所组成的所有子集,并求出所有子集的所有元素之和.

13. 集合 A 满足条件:若 $a \in A$ ($a \in \mathbf{N}^*$),则 $f(a) = \frac{a}{2a + 1} \in A$,且 $f(f(a)) \in A$,…如此下去. (1) 若集合 A 为单元素集,求 a 和 A;(2) 请你用描述法写出一个满足条件的非单元素集合 A(不含字母 a),并考虑寻找这类集合的规律.

Keshi 课时 2 集合的运算

Liti pouxi 例题剖析

例 6 设 $U = \{x \mid x$ 为小于 20 的正偶数$\}$,若 $A \cap \complement_U B = \{12, 14\}$, $B \cap \complement_U A = \{2, 4,$

16,18}, $\complement_U A\cap \complement_U B=\varnothing$,求集合 A,B.

解法1 $U=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$;

由 $A\cap \complement_U B=\{12,14\}$,得 $12,14\in A$,但 $12,14\notin B$;

由 $B\cap \complement_U A=\{2,4,16,18\}$,得 $2,4,16,18\in B$,但 $2,4,16,18\notin A$;

此时只剩下 6,8,10 未确定,假定 $6\in \complement_U A$,由 $\complement_U A\cap \complement_U B=\varnothing$,得 $6\notin \complement_U B$,

$\therefore$ $6\in B$,从而 $6\in B\cap \complement_U A$ 与已知矛盾,

$\therefore$ $6\in A$.同理 $8,10\in A$,$6,8,10\in B$.

故 $A=\{6,8,10,12,14\}$,$B=\{2,4,6,8,10,16,18\}$.

解法2 应用文氏图.

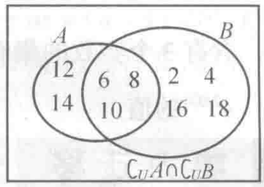

图 1-1

评注 正确理解集合交、并、补的意义是熟练地进行集合运算的基础,运算时应先根据条件,化简给定集合,局部入手,逐步确定 A,B 中的元素.对于离散集合、抽象集合的解决常辅以文氏图,使问题解决变得简单、直观.

例7 已知 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\left\{x\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{(x+2)(x-3)}>1\right.\right\}$,$B=\{x\mid \log_3(x-a)<2\}$.

(1) 当 $A\subseteq B$ 时,求 a 的取值范围;

(2) 当 $A\cap B=\varnothing$时,求 a 的取值范围.

例8 已知集合 $A=\{2,4,6,8,9\}$,$B=\{1,2,3,4,8\}$.又知集合 C 是这样一集合:若各元素都加 2 就变为 A 的一个子集;若各元素都减 2,就变为 B 的一个子集.求集合 C.

例9 高三(5)班学生开展研究性学习活动.参加化学活动小组的有 20 人;参加生物活动小组的有 22 人;既参加化学活动小组,又参加生物活动小组的有 10 人;既未参加化学小组,又未参加生物小组的有 15 人.问高三(5)班共有学生多少人?

例10 设 $m\in\mathbf{R}$,集合 $A=\{(x,y)\mid y=-\sqrt{3}x+m\}$,$B=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta.\end{cases}\right.(0<\theta<2\pi)\right\}$,且 $A\cap B=\{(\cos\theta_1,\sin\theta_1),(\cos\theta_2,\sin\theta_2),\theta_1\neq\theta_2\}$,求 m 的取值范围.

解 集合 $B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,(x\neq 1)\}$,由题意,即求直线 $y=-\sqrt{3}x+m$ 与曲线 $x^2+y^2=1\ (x\neq 1)$,有两个交点 m 的取值范围.

则 $\frac{|m|}{2}<1$ 且 $m\neq\sqrt{3}$,所以 $m\in(-2,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2)$.

评注 本题的实质为直线 $y=-\sqrt{3}x+m$ 与圆 $x^2+y^2=1\ (x\neq 1)$有两个交点,求 m 的取值范围.也可以变成 $\theta\in(0,2\pi)$,且方程 $2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=m$ 有两个不同的实数根,求 m 的范围.因此,集合符号在本题只起了一种"化妆品"的作用,这种数学符号与数学语言的互译,命题的等价转化,是一种必备的数学素质.

方法提炼
Fangfa tilian

在进行集合的交、并、补运算时,应全面认识集合的本质属性,准确转译集合语言.为使问题明朗化,应先化简给定的集合,使之"具体化、直观化、通俗化".要注意数形结

合的思想在解集合问题中的应用,数集之间的运算常借助于数轴,但要注意区间的开闭情况.而一般离散的、抽象的集合往往借助于文氏图解决.当给定的集合为点集时,要分析满足条件的点构成什么样的图形,转化为解析几何问题解决.

基础过关 Jichu guoguan

14. 设 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $M=\{3,4,5\}$, $N=\{1,3,6\}$,则集合 $\{2,7,8\}$ 是(　　)
(A) $M\cup N$.　(B) $M\cap N$.　(C) $\complement_U M\cup\complement_U N$.　(D) $\complement_U M\cap\complement_U N$.

15. 设 $M=\{(x,y)\mid(x-2)^2+y^2=4\}$, $N=\{(x,y)\mid(x-1)^2+y^2=1\}$,则 M 与 N 的关系是(　　)
(A) $N\subsetneqq M$.　(B) $M\cap N=\varnothing$.　(C) $N\subseteq M$.　(D) $M\cap N=\{(0,0)\}$.

16. 全集 $U=\mathbf{R}$, $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$, $B=\{x\mid 1<x<3\}$,则 $\complement_U(A\cup B)=$________.

17. 高三(5)班在期末考试中,有36人数学成绩不低于80分,有20人物理成绩不低于80分,有15人的数学、物理成绩都不低于80分,则这两科成绩中至少有一科不低于80分的人数为________.

18. 设 U 是全集,集合 A,B,C 满足关系:$A\subsetneqq B\subsetneqq C$.试写出用 A,B,C 中的两个或三个构成的集合运算,使其运算结果为空集.

19. 已知 $A=\{y\mid y=x^2+2x+4,x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y\mid y=ax^2-2x+4a,x\in\mathbf{R}\}$.若 $A\subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

能力迁移 Nengli qianyi

20. 集合 $P=\left\{x\mid x=\sin\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$的子集的个数为(　　)
(A) 3.　(B) 4.　(C) 5.　(D) 8.

21. 若 $M\cap N=\varnothing$,且 $M\cup N=\{1,2\}$,则满足条件的集合 M,N 的不同组数为(　　)
(A) 2.　(B) 4.　(C) 6.　(D) 8.

22. 已知集合 $A\subsetneqq\{2,3,7\}$,且 A 中至多有一个奇数,这样的集合 A 共有________个.

23. 设 m,n 为自然数,$m>n$.集合 $A=\{1,2,3,\cdots,n,n+1,n+2,\cdots,m\}$,集合 $B=\{1,2,3,\cdots,n\}$,满足 $B\cap C\neq\varnothing$的 A 的子集 C 共有________个.

24. $A=\{x\mid x^2-5x+4=0\}$, $B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$, $C=\{x\mid x^2-mx+4=0\}$.已知 $A\cup B=A$, $A\cap C=C$,求 a,m 的值.

25. 已知奇函数 $f(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上有定义,且在$(0,+\infty)$上是增函数,$f(1)=0$.又 $g(\theta)=\sin^2\theta+m\cos\theta-2m$, $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.设 $M=\{m\mid g(\theta)<0,m\in\mathbf{R}\}$, $N=\{m\mid f[g(\theta)]<0\}$,求 $M\cap N$.

26. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$　$(a,b,c\in\mathbf{R})$,满足 $f(-1)=0$,对于任意实数 x 都有$f(x)\geqslant x$,且当 $0<x<2$ 时,$f(x)\leqslant\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$.
(1) 求 $f(1)$的值;　(2) 求函数 $f(x)$的解析式;
(3) 设 $A=\{(x,y)\mid f(x)+f(y)<1\}$, $B=\{(x,y)\mid ax-y+2=0,a\in\mathbf{R}\}$,当 $A\cap B$

$=\varnothing$时，试确定实数 a 的取值范围．

Keshi 课时 3 含绝对值不等式及一元二次不等式的解法

Liti pouxi 例题剖析

例 11 (1) 解不等式 $3<\left|2x-\frac{2}{3}\right|\leqslant 7$；　　(2) 解不等式 $|x+2|+|x|>4$；

(3) 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|2<x<3\}$，解关于 x 的不等式 $cx^2+bx+a>0$．

(1) **解法 1**　令 $2x-\frac{2}{3}=u$，则原不等式等价于 $3<u\leqslant 7$ ①　或 $-7\leqslant u<-3$ ②．

由①得 $\begin{cases}2x-\frac{2}{3}>3,\\2x-\frac{2}{3}\leqslant 7\end{cases}\Rightarrow\frac{11}{6}<x\leqslant\frac{23}{6}$．　∴　①的解集为 $A=\left\{x\left|\frac{11}{6}<x\leqslant\frac{23}{6}\right.\right\}$．

由②得 $\begin{cases}2x-\frac{2}{3}\geqslant -7,\\2x-\frac{2}{3}<-3\end{cases}\Rightarrow -\frac{19}{6}\leqslant x<-\frac{7}{6}$．　∴　②的解集为 $B=\left\{x\left|-\frac{19}{6}\leqslant x<-\frac{7}{6}\right.\right\}$．

∴　原不等式的解集为 $A\cup B=\left\{x\left|-\frac{19}{6}\leqslant x<-\frac{7}{6},\text{或}\frac{11}{6}<x\leqslant\frac{23}{6}\right.\right\}$．

解法 2　原不等式等价于 $\begin{cases}\left|2x-\frac{2}{3}\right|>3,\\\left|2x-\frac{2}{3}\right|\leqslant 7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-\frac{2}{3}>3\text{或}2x-\frac{2}{3}<-3,\\-7\leqslant 2x-\frac{2}{3}\leqslant 7\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}x>\frac{11}{6}\text{或}x<-\frac{7}{6},\\-\frac{19}{6}\leqslant x\leqslant\frac{23}{6}\end{cases}\Rightarrow -\frac{19}{6}\leqslant x<-\frac{7}{6}\text{或}\frac{11}{6}<x\leqslant\frac{23}{6}$．

(2) **解法 1**　设 $f(x)=|x+2|+|x|$．

ⅰ) 当 $x\leqslant -2$ 时，$f(x)=-2x-2>4\Rightarrow x<-3$；

ⅱ) 当 $-2<x<0$ 时，$f(x)=2>4$，无解；

ⅲ) 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2x+2>4\Rightarrow x>1$．

∴　原不等式解集为 $\{x|x<-3\text{或}x>1\}$．

解法 2　$|x+2|+|x|>4$ 表示数轴上与点 $A(-2)$，$O(0)$ 的距离之和大于 4 的点，如图 1－2．由于 $|AO|=2$，点 $B(1)$ 左边的点及点 $C(-3)$ 右边的点到点 A,O 的距离之和均大于 4，

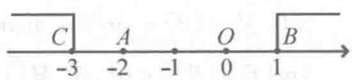

图 1－2

∴　原不等式解集为 $\{x|x<-3\text{或}x>1\}$．

(3) 由已知 $a<0$，且 2,3 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，

得 $-\dfrac{b}{a}=2+3=5,\dfrac{c}{a}=6.\quad\therefore\quad\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{6},-\dfrac{b}{c}=\dfrac{5}{6}$,

即 $-\dfrac{b}{c}=\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3},\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}.\quad\therefore\quad\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$是方程 $cx^2+bx+a=0$ 的两个实数根.

$\because\quad a<0,\quad\therefore\quad c<0$,因而 $cx^2+bx+a>0$ 的解集是 $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}\right\}$.

评注 含有绝对值不等式的解法,主要是利用 $|ax+b|<c$ 或 $|ax+b|>c(c>0)$ 型不等式的意义及"取零点,分区间,讨论",脱去绝对值.同时要充分考虑绝对值的几何意义,准确把握什么时候取并集、交集.求解一元二次不等式,注意利用二次函数的图象和一元二次方程的根与不等式的关系.

例 12 $A=\{x\mid x^2-7x+10\leqslant0\}$, $B=\{x\mid x^2+ax+b<0\}$.若 $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cup B=\{x\mid x-3<4<2x\}$,求 $S=\{x\mid x=a+b\}$.

例 13 已知 $A=\{x\mid |x^2-2x|\leqslant x\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,\left|\dfrac{x}{1-x}\right|\leqslant\dfrac{x}{1-x}\right\}$, $C=\{x\mid ax^2+x+b<0\}$.若 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$, $(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$,求实数 a,b 的值.

例 14 解关于 x 的不等式 $x|x-a|\leqslant\dfrac{2a^2}{9}\ (a>0)$.

例 15 设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数,且对任意 $x\in[0,1]$, $f(x^2-ax)<f(a-3)$ 恒成立,求 a 的取值范围.

解法 1(分类讨论) 由题意,有 $x^2-ax+3-a>0$,对 $x\in[0,1]$恒成立.

令 $g(x)=x^2-ax+3-a$,则 $g(x)>0$ 在$[0,1]$上恒成立.

①由$\begin{cases}\dfrac{a}{2}<0,\\ g(0)>0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a<0,\\ a<3,\end{cases}$ 解得 $a<0$;

②由$\begin{cases}0\leqslant\dfrac{a}{2}\leqslant1,\\ \Delta<0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}0\leqslant a\leqslant2,\\ a^2+4a-12<0,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant a<2$;

③由$\begin{cases}\dfrac{a}{2}>1,\\ g(1)>0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a>2,\\ 4-2a<0,\end{cases}$ 无解.

综上所述, $a<2$.

解法 2 $g(x)>0$对任意 $x\in[0,1]$成立$\Leftrightarrow a<\dfrac{x^2+3}{x+1}$对任意 $x\in[0,1]$恒成立$\Leftrightarrow a<\left(\dfrac{x^2+3}{x+1}\right)_{\min}$.而$\dfrac{x^2+3}{x+1}=(x+1)+\dfrac{4}{x+1}-2\geqslant2$,当且仅当 $(x+1)=\dfrac{4}{x+1}$时,取"="号,得当 $x=1\in[0,1]$时, $\left(\dfrac{x^2+3}{x+1}\right)_{\min}=2,\quad\therefore\quad a<2$.

解法 3 $g(x)>0\Leftrightarrow x^2+3>a(x+1)$对任意 $x\in[0,1]$恒成立.

在同一直角坐标系中,画出函数 $y=x^2+3$ 和 $y=a(x+1)$的图象,把问题转化为: a 为何值时, $y=x^2+3$ 在$[0,1]$中的图象位于 $y=a(x+1)$的图象的上方.

当 $x^2+3=a(x+1)$中的 $\Delta=0$ 时, $a=2$ 或 $a=-6$(舍去).又 $a=2$ 时,方程的解为

$x=1\in[0,1]$. $\therefore$ $a=2$时,直线$y=a(x+1)$与抛物线$y=x^2+3$相切于点$(1,4)$.

结合a的几何意义可得 $x^2+3>a(x+1)$对任意$x\in[0,1]$恒成立$\Leftrightarrow a<2$.

评注 本题是含参数不等式,解集包含区间$[0,1]$.要灵活的进行等价转换:$g(x)>0$对任意$x\in[0,1]$成立$\Leftrightarrow$方程$g(x)=0$中$\Delta<0$或小根<0或大根>1或转化为$x\in[0,1]$时$g(x)_{\min}>0$等.

方法提炼 Fangfa tilian

简单的含有绝对值的不等式解法,一般是依据$|x|<a\ (a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$, $|x|>a\ (a>0)\Leftrightarrow x>a$或$x<-a$求解.含有多个绝对值符号的不等式一般可用"零点分段"方法去掉绝对值进行求解,在解题过程中要注意等价变换.

一元二次不等式的解法,一般分三个层次思考:①二次项系数的符号;②判别式的符号;③对应方程的根的大小.

研究含参数的一元二次不等式的解集问题,常可以化归为研究二次方程根的分布及函数的最值问题,或转化为直线与圆锥曲线的位置关系来处理,从数形两个方面思考问题.数形结合是数学中一种基本的思维方法.

基础过关 Jichu guoguan

27. 不等式$|x-2|>3$的解集是(　　)

(A) $\{x|x<5\}$. (B) $\{x|-1<x<5\}$.

(C) $\{x|x<-1\}$. (D) $\{x|x<-1$,或$x>5\}$.

28. $a\in\mathbf{R}$,且对一切实数x都有不等式$ax^2+ax+a+3>0$,那么a的取值范围是(　　)

(A) $a>0$. (B) $a\geqslant 0$. (C) $a<-4$. (D) $a<-4$或$a>0$.

29. 不等式$|x^2-3x|>4$的解集是________.

30. 已知$x^2-mx+n\leqslant 0$的解集为$\{x|-5\leqslant x\leqslant 1\}$,则$m=$________,$n=$________.

31. 设$a\in\mathbf{R}$,$A=\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$,$B=\{x|x^2-2ax+a+2<0\}$.当$B\subseteq A$时,求$a$的取值范围.

32. 给定$a>0,2a\geqslant\sqrt{2}$,满足不等式$|x-a|<b$的一切实数x,都满足不等式$|x^2-a^2|<\frac{1}{2}$.求正数b的取值范围.

能力迁移 Nengli qianyi

33. 不等式$|x-1|+|x+2|<5$的解集是(　　)

(A) $\{x|-3<x<2\}$. (B) $\{x|-1<x<2\}$.

(C) $\{x|-2<x<1\}$. (D) $\left\{x\middle|-\frac{3}{2}<x<\frac{11}{2}\right\}$.

34. 设集合$M=\{x\in\mathbf{R}|x^2-x<0\}$,$N=\{x\in\mathbf{R}||x|<2\}$,则(　　)

(A) $N\subsetneqq M$. (B) $M\cap N=M$. (C) $M\cup N=M$. (D) $M\cup N=\mathbf{R}$.

35. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数. 实数 x_0 满足 $f(x_0)=x_0$, 则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的不动点. 若 $f(x)=x^2+ax+1$ 没有不动点, 则实数 a 的取值范围是____________.

36. 若对于满足 $k^2-7k+12<0$ 的一切实数 k, 不等式 $x<k$ 恒成立, 则 x 的取值范围是____________.

37. 设三角形的三条边长分别为 15 cm, 19 cm, 23 cm. 把它们的三条边都缩短 x cm, 则成为钝角三角形, 求 x 的取值范围.

38. 已知 $f(x)=x^2-4kx+2k+30$, 且 $f(x)\geq 0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立, 求函数 $g(k)=(k+3)(1+|k-1|)$ 的值域.

39. 设函数 $f(x)=x^2+2bx+c\ (c<b<1)$, $f(1)=0$, 且方程 $f(x)+1=0$ 有实数根.

(1) 证明: $-3<c\leqslant -1$, 且 $b\geqslant 0$;

(2) 若 m 是方程 $f(x)+1=0$ 的一个实数根, 试判断 $f(m-4)$ 的正负, 并加以证明.

二、简易逻辑

考点透视 Kaodian toushi

逻辑知识是认识问题、研究问题不可缺少的工具, 其充要条件是中学数学中的一个重要概念, 是带有全局性、关键性的知识点之一. 高考中一般在客观题中以中低档题出现, 也可能展示以集合语言或逻辑关系为背景的应用开放题. 因此, 要理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义, 理解四种命题及其相互关系, 掌握充要条件的意义.

Liti pouxi 例题剖析

例 1 指出下列各题中"p 或 q", "p 且 q", "非 p"的真假.

(1) p: 0 是偶数, q: 2 是质数;

(2) p: $n^3+1\ (n\in\mathbf{Z})$ 是奇数, q: $n(n+1)\ (n\in\mathbf{Z})$ 是偶数.

解 (1) 因为 p 真 q 真, 所以"p 或 q"为真, "p 且 q"为真, "非 p"为假;

(2) 因为 p 假 q 真, 所以"p 或 q"为真, "p 且 q"为假, "非 p"为真.

评注 (1) 复合命题"p 或 q"当且仅当 p, q 中至少有一个为真时, 它是真命题;

(2) 复合命题"p 且 q"当且仅当 p, q 都为真时, 它是真命题;

(3) 复合命题"非 p"当且仅当 p 为假时, 它是真命题. "非 p"也叫做命题的否定, 它不同于否命题.

例 2 把下列常见的写法, 改写成复合命题"p 或 q", "p 且 q", "非 p"的形式.

(1) $a=\pm b$; (2) $a\neq\pm b$; (3) $a\geqslant b$; (4) $a>b\geqslant 0$;

(5) -2 不是 4 的算术平方根.

例 3 证明"若 $x^2+2xy+y^2+x+y-2\neq 0$, 则 $x+y\neq 1$"为真命题.

例 4 写出下列各命题的逆命题、否命题和逆否命题, 并判定它们的真假.

(1) 若 $ab=0$, 则 $a=0$ 或 $b=0$; (2) 若 $ab>0$, 则 $a>0$ 且 $b>0$.