



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 数学模型

(第三版)

谭永基 蔡志杰 编著



博学·数学系列



复旦大学出版社

[www.fudanpress.com.cn](http://www.fudanpress.com.cn)



普通高等教育

划教材

# 数学模型

(第三版)

谭永基 蔡志杰 编著



博学·数学系列



 复旦大学出版社

[www.fudanpress.com.cn](http://www.fudanpress.com.cn)

图书在版编目(CIP)数据

数学模型/谭永基,蔡志杰编著. —3 版. —上海: 复旦大学出版社, 2019. 8  
(复旦博学·数学系列)  
ISBN 978-7-309-14289-1

I. ①数… II. ①谭…②蔡… III. ①数学模型-高等学校-教材 IV. ① 0141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 083227 号

数学模型(第三版)

谭永基 蔡志杰 编著  
责任编辑/陆俊杰

复旦大学出版社有限公司出版发行  
上海市国权路 579 号 邮编: 200433

网址: fupnet@fudanpress.com <http://www.fudanpress.com>  
门市零售: 86-21-65642857 团体订购: 86-21-65118853  
外埠邮购: 86-21-65109143 出版部电话: 86-21-65642845  
杭州长命印刷有限公司

开本 787×960 1/16 印张 28.5 字数 500 千  
2019 年 8 月第 3 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-14289-1/O · 668  
定价: 48.00 元

---

如有印装质量问题, 请向复旦大学出版社有限公司出版部调换。  
版权所有 侵权必究

022  
64-3

“博学而笃志，切问而近思。”

（《论语》）

博晓古今，可立一家之说；  
学贯中西，或成经国之才。

## 内 容 提 要

本书是上海市精品课程教材和普通高等教育“十五”“十一五”国家级规划教材，2009年12月，荣获中国大学出版社图书奖首届优秀教材奖二等奖。书中通过物理、化学、生物、医学、交通、人口、生态、经济管理和工程技术中众多数学模型的实例，阐明建立各种现实问题数学模型的主要方法和基本规律。书中每章内容后面还设置了“习题”和“实践与思考”，前者是帮助读者加深对本章内容理解的练习；后者实际上是为建立与本章内容有关的实际问题的数学模型的实践活动提供课题，其中有些还是国内外数学建模竞赛的赛题。阅读本书有助于读者提高分析问题和解决问题的能力。

本书可用作高等学校应用数学专业、理工科各有关专业和经济管理有关专业的教材，亦可供高等学校教师、研究生、科研工作者和工程技术人员参考。

# 第三版前言

本书是1997年出版的《数学模型》的第四版,是普通高等教育“十五”国家级规划教材的第三版,也是教育部第十一个五年计划重点教材项目和上海市精品课程建设项目的成果。

本书前三版出版后,已作为大学本科数学类专业的数学模型基础课教材和其他专业数学建模课程的参考书被许多高等院校使用,得到了大家的肯定,同时在使用期间,许多同行专家也对本书提出了众多宝贵意见.根据我们自己的教学实践和兄弟院校同行的意见与建议,再次进行修订.在本次修订中,新增了一章,涉及的数学内容是图论,目的是为了加强离散模型,使本书中连续模型和离散模型更加均衡.同时我们还修改了编辑排版上的问题,并对所有章节进行了勘误.

囿于我们的水平,谬误之处在所难免,敬请读者予以批评指正.

中国科学院院士李大潜对本书的修订十分关心,他在各种场合对于数学建模的论述对我们的修订有重要的指导意义.我们曾经与应用数学界的许多同行就数学模型的教学与科研进行过有益的讨论.这些同志中有叶其孝、姜启源、陈叔平、唐焕文、向隆万、蒋鲁敏、桂子鹏、丁颂康、盛子宁、朱德通、曹沅、鲁习文、谢金星、程晋、刘继军、周义仓、李功胜教授等.这些讨论对本书的修订是十分有帮助的.复旦大学出版社范仁梅、陆俊杰同志为本书的修订再版付出了艰辛的劳动.对此,我们一并表示衷心的感谢.

本教材的作者之一谭永基教授因病不幸去世,是数学建模事业的重大损失,他生前为本教材的编写付出了大量心血,倾注了满腔热情,希望为我国培养更多的应用数学人才,现在新版教材的出版也是全体编写和编辑人员为谭老师献上的最好纪念.

蔡志杰

2019年5月18日

## 第二版序言

近数十年来,随着科学技术的发展和社会的进步,数学这一重要的基础学科迅速地向自然科学、技术科学和社会科学的各个领域渗透,并在工程技术、经济建设及金融管理等方面发挥出愈来愈明显、甚至是举足轻重的关键作用.数学与电子计算机技术相结合,已形成一种重要的、可以实现的技术——数学技术.“高技术本质上是一种数学技术”的提法,已为愈来愈多的人们所接受和认同.然而,一个现实世界中的问题,包括科学技术中的问题,往往并不是自然地以一个现成数学问题的形式出现的.要充分发挥数学的作用,首先要将所考虑的现实世界中的问题归结为一个相应的数学问题,即建立该问题的数学模型.这是数学走向应用的必经之路,是一个关键性的步骤,在此基础上才有可能利用数学的概念、方法和理论进行深入的分析 and 研究,从而从定量或定性的角度,为解决现实问题提供精确的数据或可靠的指导.努力提高建立数学模型方面的修养,自觉培养这方面的能力,并注意积累有益的知识 and 经验,对于有志于学习与运用数学的广大大学生和研究生,是启迪数学心智的必胜之途,对于众多的应用科学工作者,也是一项十分重要的基本建设.

不同的现实问题,往往有不同的数学模型;即使对同一现实问题,也可能从不同的角度或根据不同精度的要求而归结出颇不相同的数学模型.另一方面,同一个数学模型又往往可以同时用来描述表面上看来毫无关联的自然现象或社会规律.至于建立数学模型的方法,更是各有千秋,多姿多彩,不可能有一个可以到处生搬硬套的固定程式.尽管如此,人们在用数学工具解决各种各样实际问题的过程中,通过大量的实践,已逐步发现了一些建立数学模型的规律,总结了有关的经验,数学模型这一新的学科分支以及相应的课程设置便由此应运而生.近些年来,数学模型这一类新兴的课程已在国际上愈来愈多的学校开设,它不仅成为数学类各专业的重要课程,而且引起了其他各类学科专业学生的浓厚兴趣,选修这门课程的人数日益增多.以建立数学模型为主要内容的各类数学竞赛活动,也

相应地在国内外迅速开展起来,并取得了愈来愈大的影响.在我国,可以毫不夸张地说,数学建模的教育及数学建模竞赛活动是这些年来规模最大也最成功的一项数学教学改革实践,它不仅融知识、能力和素质之考察三位于一体,而且面向所有专业的大学生,是对素质教育的重要贡献.

本书的作者自1982年起一直为复旦大学数学类专业本科生开设数学建模课程,这些年来从未间断,并多次为其他学校或系科的学生或数学方面的进修教师开设了相应的课程或讲座,还积极参与及组织了多次国内外的数学建模竞赛活动,积累了大量的素材,取得了丰富的经验.在此基础上,继本书于1996年及2004年分别出版之后,今年又经认真补充与修订推出了面目焕然一新的第二版,这是很值得庆贺的.

本书通过一些经过精心选择,内容涉及物理、化学、生物、医学、经济、管理、生态、交通、能源和工程技术等众多方面的数学建模的实例,向读者展示了建立数学模型的方法和用数学解决实际问题的全过程和一般规律.特别值得指出的是:这不是一本“纸上谈兵”的作品.作者们不仅曾经多次参加建立有关的数学模型,并有成功解决一些重大实际问题的实践,有着自己切身的经验和体会.书中所列举的实例中除有相当一些取材于国内外其他教材和有关文献外,还包含了作者及其研究集体历年来的不少研究成果,这使这本教材更具有了自己鲜明的特色.

根据建立数学模型的特点,学习这门课程,重要的不在于知识的积累,而应着眼于能力的提高.任何一本数学模型的教材,即使包含的实例再多,都不可能穷尽世间所有可能的数学模型而成为数学模型方面包罗万象的百科全书.希望广大读者将本书提供的实例均作为案例来对待,通过有选择地解剖若干个(不是全部!)麻雀,着重体会建立数学模型的思路和方法,掌握数学建模的一般规律,而不要仅仅满足于学习一些数学知识,不要满足于对个别实例的机械模仿,更不要追求对全书内容的死记硬背.这样,才可能真正体会建立数学模型的精髓,达到学习这门课程的效果.

李大潜

2010年12月26日于复旦大学

## 第二版前言

本书是 1997 年出版的《数学模型》的第三版,是普通高等教育“十五”国家级规划教材的第二版,也是教育部第十一个五年计划重点教材项目和上海市精品课程建设项目的成果.

本书第一、二版出版后,已作为大学本科数学类专业的数学模型基础课教材和其他专业数学建模课程的参考书被许多高等院校使用,得到了肯定,同时他们也对本书提出了许多宝贵意见.

为了更加适合教材现代化的要求,进一步体现教材的先进性、科学性与适用性,我们根据自己的教学实践和兄弟院校同行的意见与建议,再次进行修订.在修订中,我们删除了 4 章,新增了 6 章,对其余部分章节也作了较大改动.

这次修订中删除的内容主要是和某些专门领域结合得比较紧密和比较深奥的内容,以增加教材的易读性,避免学生在弄懂相关的专业知识方面花费太多的时间.

增加的各章内容我们是基于以下 3 方面的考虑选择的:第一,保持原书包含相当数量从实践中总结出来的数学模型的特色,继续充实这方面的新鲜素材,使新版的这一特色更加鲜明;第二,增加了部分数学内容比较浅显的初等数学模型,便于教师根据同学的实际情况和开设本课程的不同年级进行适当的选择;第三,增加的内容向离散和随机数学模型倾斜,使书中连续和离散模型、确定性与随机模型的分配更加均衡合理.

在新版中我们还对练习中的“实践与思考”更加予以重视,它们为建立与本章有关的实际问题的数学模型的实践活动提供课题,其中有些是国内外数学建模竞赛的赛题.我们认为开展这种实践活动对提高学生数学建模和解决实际问题的能力、培养创新精神是十分重要的.同时,这类问题也为采用“小课题”、开展课堂讨论等更好地实现师生互动的教学方法提供了素材.

在这次修订中我们还对文字进行了推敲修改,以期达到叙述更加科学、准确

和更加通俗易懂的目的.

尽管在修订中我们作了一定努力,但囿于我们的水平,谬误之处在所难免,敬请读者予以批评指正.

中国科学院院士李大潜对本书的修订十分关心,他在各种场合对于数学建模的论述对我们的修订有重要的指导意义.这次他又为本书的新版撰写了序言,我们表示特别的感谢.

我们曾经与应用数学界的许多同行就数学模型的教学与科研进行过有益的讨论.这些同志中有叶其孝、姜启源、陈叔平、唐焕文、向隆万、蒋鲁敏、桂子鹏、丁颂康、盛子宁、朱德通、曹沅、鲁习文、谢金星、程晋、刘继军、周义仓、李功胜教授等.这些讨论对本书的修订是十分有帮助的.复旦大学吴宗敏、陆立强等同志对本书的修订予以关心,复旦大学出版社范仁梅同志为本书的修订再版付出了艰辛的劳动.对此,我们一并表示衷心的感谢.

编者

2010年8月30日

# 第一版序言

近几十年来,随着科学技术的发展和社会的进步,数学这一重要的基础学科迅速地向自然科学和社会科学的各个领域渗透,并在工程技术、经济建设及金融管理等方面发挥出愈来愈明显、甚至是举足轻重的作用.数学与电子计算机技术相结合,已形成一种重要的、可以实现的技术.“高技术本质上是一种数学技术”的提法,已为愈来愈多的人们所认识和接受.然而,一个现实世界中的问题,包括科学技术中的问题,往往并不是自然地以一个现成的数学问题的形式出现的.要充分发挥数学的作用,首先要将所考察的现实世界中的问题归结为一个相应的数学问题,即建立该问题的数学模型.这是一个关键性的步骤,在此基础上才有可能利用数学的概念、方法和理论进行深入的分析和研究,从而从定量或定性的角度,为解决现实问题提供精确的数据或可靠的指导.努力提高建立数学模型方面的修养,自觉培养这方面的能力并注意积累有益的知识 and 经验,对于有志于学习与运用数学的广大大学生和研究生以及众多的应用科学工作者来说,均是一项十分重要的基本建设.

不同的现实问题,往往有不同的数学模型;即使对同一现实问题,也可能从不同的角度或根据不同精度的要求而归结出颇不相同的数学模型.另一方面,同一个数学模型又往往可同时用来描述表面上看来毫无关联的自然现象或社会规律.至于归结数学模型的方法,则更是各有千秋,多姿多彩,不可能希冀有一个可以到处生搬硬套的固定程式.尽管如此,人们在用数学工具解决各种各样实际问题的过程中,通过大量归结数学模型的实践,已逐步发现和总结了一些建立数学模型的规律,数学模型这一新的学科分支以及相应的课程设置便因此应运而生.近年来,数学模型这一新兴的课程已在国际上愈来愈多的学校开设,它不仅成为数学系各专业的专业课程,而且引起了其他各类学科专业学生的浓厚兴趣,选修这门课程的人数日益增多.以建立数学模型为主要内容的各类数学竞赛活动,也

相应地在国内外迅速开展起来,并取得了愈来愈大的影响.

本书的两位作者自 1982 年起,相继为复旦大学应用数学专业本科学生开设数学模型课程,10 余年来从未间断,并多次为其他系科的学生或数学系的进修教师开设了相应的课程或讲座,还积极参与及组织了多次数学模型竞赛活动,积累了大量的素材,取得了丰富的经验.在此基础上,经过数年的酝酿和准备,这本盼望已久的教材终于脱稿并正式出版,这是很值得庆贺的.

本书通过一些经过精心选择,内容涉及物理、化学、生物、医学、经济、管理、生态、交通、能源和工程技术等众多方面的数学建模的实例,向读者展示了建立数学模型的方法和用数学解决实际问题的全过程和一般规律.特别值得指出的是:这不是一本“纸上谈兵”的作品.作者们曾经多次参加过建立数学模型,并有成功解决重大实际问题的实践,有着自己切身的经验和体会.书中所列举的实例中除有相当一些取材于国内外其他教材和有关文献外,还包含了作者及其研究集体历年来的不少研究成果.这使这本教材具有了自己鲜明的特色.

根据建立数学模型的特点,学习这门课程,重要的不在于知识的积累,而应着眼于能力的提高.希望广大读者将本书提供的一些实例均作为案例来对待,通过解剖麻雀,体会建立数学模型的思路和方法,掌握数学建模的一般规律,而不要仅仅满足于学习一些数学知识,更不要满足于对个别实例的机械模仿.这样,才可能开拓思路,培养分析问题和解决问题的能力,真正达到学习这门课程的效果.

李大潜

1996 年 2 月 25 日于复旦大学

# 第一版前言

本书是在 1997 年出版的《数学模型》的基础上修订而成的. 它也是教育部第十个五年计划重点教材项目和上海市精品课程建设项目的成果.

本书第一版出版后, 已作为大学本科数学类专业的数学模型基础课教材被许多高等院校使用, 得到了肯定, 同时他们也对本书提出了许多宝贵意见.

为了更加适合教材现代化的要求, 进一步体现教材的先进性、科学性与适用性, 我们根据自己的教学实践和兄弟院校同行的意见和建议, 用 1 年多的时间进行了修订. 在修订中, 我们删除了 2 章, 新增了 6 章, 对其余部分章节也作了较大改动. 蔡志杰副教授参加了本书的修订工作.

这次删除的 2 章是“计算复杂性简介”和“模型的数值求解与 MATLAB 软件”. 虽然模型求解的计算复杂性是评价一个数学模型优劣的重要标准之一, 但教学实践表明, 结合对具体数学模型的评价和检验讨论数学模型求解的计算复杂性的效果会更好. 因此, 我们不再将计算复杂性单独列为一章. 和本书初版时相比, MATLAB 数学软件在高校中普及的程度有了很大的提高. 有的学校将其作为一门课程或者作为数学软件课程的一个重要组成部分进行讲授, 有的学校将其作为数学实验课程的主要软件平台. 所以, 现在已没有必要再在数学模型课程中专门介绍, 因此我们删除了这一章. 有关模型的数值求解的内容, 在各章中结合具体模型分别讲述.

增加的各章内容我们是基于以下 3 方面的考虑选择的: 第一, 保持原书包含相当数量从实践中总结出来的数学模型的特色, 继续充实这方面的新鲜素材, 使新版的这一特色更加鲜明; 第二, 增加了部分数学内容比较浅显的初等数学模型, 便于教师根据同学的实际情况和开设本课程的不同年级进行适当的选择; 第三, 增加的内容向离散数学模型倾斜, 使书中连续和离散两类模型的分配更加均衡合理.

在新版中我们还将练习分为“习题”和“实践与思考”两种类型. 前者是帮助

读者加深对本章内容理解的练习;后者实际上是为建立与本章有关的实际问题的数学模型的实践活动提供课题,其中有些是国内外数学建模竞赛的赛题.我们认为开展这种实践活动对提高学生数学建模和解决实际问题的能力,培养创新精神是十分重要的.同时,这类问题也为采用“小课题”、开展课堂讨论等更好地实现师生互动的教学方法提供了素材.

在这次修订中我们还对文字进行了推敲修改,以期达到叙述更加科学、准确和更加通俗易懂的目的.

尽管在修订中我们作了一定努力,但囿于我们的水平,谬误之处在所难免,敬请读者予以批评指正.

中科院院士李大潜对本书的修订十分关心,他为本书初版所写的序言对我们的修订有重要的指导意义,我们表示特别的感谢.

我们曾经与数学界的许多同行就数学模型的教学与科研进行过有益的讨论.这些同志中有叶其孝、姜启源、陈叔平、唐焕文、向隆万、蒋鲁敏、桂子鹏、丁颂康、盛子宁、朱德通、曹沅、鲁习文、谢金星、周义仓、李功胜教授等.这些讨论对本书的修订是十分有帮助的.复旦大学吴宗敏、金路、陆立强与华东理工大学谢国瑞、张建初、李瑞遐等同志对本书的修订予以关心,复旦大学出版社范仁梅同志为本书的修订再版付出了艰辛的劳动.对此,我们一并表示衷心的感谢.

本书的原编著者之一俞文魮教授在2002年秋不幸逝世.俞文魮教授于1982年起在复旦大学为应用数学专业学生开设“数学模型”课程,这是国内首次为本科生开设的数学模型课程.1989年,他作为主要发起人之一在上海筹备并于1990年开始举办大学生数学建模竞赛,然后推向全国.作为中国工业与应用数学学会数学模型专业委员会主任、全国大学生数学建模竞赛组织委员会副主任和成员,他为我国数学模型课程的建设 and 数学建模竞赛活动的开展发挥了重要的作用.我们谨以本书的修订再版表示对俞文魮教授的深切怀念.

谭永基

2004年8月30日

# 目 录

第一章 引言	1
§ 1.1 什么是数学模型	1
§ 1.2 研究数学模型的意义	2
§ 1.3 数学模型的特点与方法	6
§ 1.4 学习本书的建议	8
第二章 驾驶问题	10
§ 2.1 问题的提出	10
§ 2.2 限定区域的问题	11
§ 2.3 具有优先方向的运动	12
§ 2.4 加速度有限制的运动	15
§ 2.5 曲率有限制的情形	18
习题	21
实践与思考	21
第三章 流水线设计	23
§ 3.1 问题的提出与简化	23
§ 3.2 模型的建立	24
§ 3.3 模型的求解和应用	30
§ 3.4 进一步的讨论	31
习题	31
实践与思考	32
第四章 数码相机定位	33
§ 4.1 引言	33
§ 4.2 针孔成像原理	33
§ 4.3 双目定位的数学模型与方法	35
§ 4.4 相机相对位置的确定	36
§ 4.5 外部参数标定的一种实现方法	37

习题 .....	41
实践与思考 .....	41
<b>第五章 投资效益、加工次序及其他</b> .....	42
§ 5.1 投资效益问题 .....	42
§ 5.2 加工次序问题 .....	47
§ 5.3 两辆平板车的装载问题 .....	50
§ 5.4 拼板问题 .....	55
习题 .....	59
实践与思考 .....	60
<b>第六章 公务员招聘模型</b> .....	62
§ 6.1 问题的提出 .....	62
§ 6.2 择优录用模型 .....	62
§ 6.3 考虑用人部门要求的模型 .....	66
§ 6.4 考虑应聘者志愿的模型 .....	69
习题 .....	72
实践与思考 .....	73
<b>第七章 飞行管理问题</b> .....	74
§ 7.1 问题的提出 .....	74
§ 7.2 假设与记号 .....	74
§ 7.3 非线性规划模型 .....	75
§ 7.4 非线性规划模型的求解 .....	79
§ 7.5 线性规划模型 .....	82
习题 .....	85
实践与思考 .....	85
<b>第八章 投入产出综合平衡模型</b> .....	86
§ 8.1 引言 .....	86
§ 8.2 价值型投入产出模型 .....	87
§ 8.3 开放的投入产出模型 .....	90
习题 .....	94
<b>第九章 经济学中的差分方程模型</b> .....	95
§ 9.1 引言 .....	95

§ 9.2 均衡价格模型	97
§ 9.3 乘数加速模型	101
习题	107
实践与思考	108
<b>第十章 密码的加密与解密</b>	109
§ 10.1 引言	109
§ 10.2 置换密码	110
§ 10.3 仿射变换密码	112
§ 10.4 Hill 密码	114
§ 10.5 公开密钥系统	118
习题	123
实践与思考	123
<b>第十一章 CT 的图像重建</b>	124
§ 11.1 引言	124
§ 11.2 基本原理	124
§ 11.3 数学模型的建立	128
§ 11.4 求解线性代数方程组的迭代法	130
§ 11.5 含有测量误差的处理	135
习题	140
实践与思考	141
<b>第十二章 分子模型</b>	144
§ 12.1 平面型碳氢化合物分子	144
§ 12.2 图和矩阵模型	145
§ 12.3 奇偶类顶点差的计算	148
§ 12.4 双键的配置	149
习题	152
<b>第十三章 扫雪问题</b>	154
§ 13.1 问题的提出	154
§ 13.2 单车双车道的情形	155
§ 13.3 单车单车道的情形	160
§ 13.4 双车双车道的情形	163