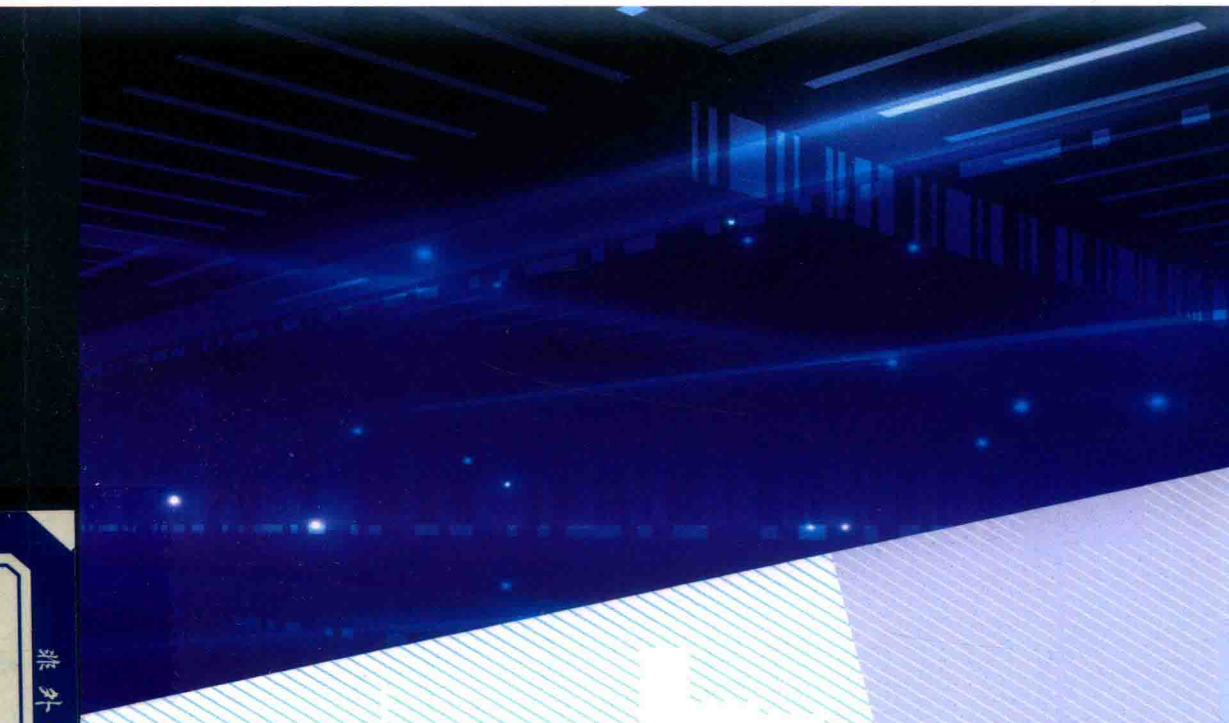
智能科学技术著作丛书

网络约束迭代学习控制理论

卜旭辉　侯忠生　著



非外借

科学出版社

（TP-8213.31）

智能科学技术著作丛书

基于组合式信号源的块结构模型辨识方法	贾　立
基于信息融合的无线传感器网络部署	张聚伟
头脑风暴优化算法理论及应用	吴亚丽　等
人工智能集对分析	蒋云良　等
基于进化优化的多目标批量流水线调度	韩玉艳　等
鱼类行为语义模型与水质预警	肖　刚　等
基于人工智能的行人流模拟与仿真	李　军
Flexible Job Shop Scheduling Problem and Its Optimization Algorithms	李俊青　等
网络约束迭代学习控制理论	卜旭辉　等

www.sciencep.com

ISBN 978-7-03-060985-4

9 787030 609854 >

科学出版社互联网入口
科学出版社 电子电工分社
电话：010-64033541
E-mail: zhangyanfen@mail.sciencep.com
销售分类建议：自动化

定 价：88.00 元

智能科学技术著作丛书

网络约束迭代学习控制理论

卜旭辉　侯忠生　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要介绍网络参量约束下系统存在数据丢失、数据量化压缩等不确定因素时迭代学习控制的收敛性分析理论和控制器设计方法。本书内容主要包括三部分：第一部分介绍迭代学习控制的基本原理与研究现状，讨论迭代学习控制在网络控制环境下所面临的新问题。第二部分介绍随机数据丢失、数据量化条件下迭代学习控制的收敛性分析理论，并研究切换系统的迭代学习跟踪控制问题。第三部分介绍网络参量约束下迭代学习控制的设计方法，包括二维网络系统基础理论及二维框架下迭代学习控制器的设计方法、基于超向量的鲁棒迭代学习控制设计方法和自适应迭代学习控制设计方法。

本书可供从事迭代学习控制和网络控制的科研人员、研究生参考，也可供自动化行业相关工程技术人员研究参考。

图书在版编目(CIP)数据

网络约束迭代学习控制理论/卜旭辉，侯忠生著. —北京：科学出版社，2019.9

(智能科学技术著作丛书)

ISBN 978-7-03-060985-4

Ⅰ.①网… Ⅱ.①卜…②侯… Ⅲ.①学习系统-理论 Ⅳ.①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 065493 号

责任编辑：张艳芬 / 责任校对：樊雅琼

责任印制：吴兆东 / 封面设计：蓝 正

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 9 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2019 年 9 月第一次印刷 印张：12 3/4

字数：242 000

定价：88.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《智能科学技术著作丛书》编委会

名誉主编：吴文俊

主　　编：涂序彦

副 主 编：钟义信　史忠植　何华灿　何新贵　李德毅
　　蔡自兴　孙增圻　谭　民　韩力群　黄河燕

秘 书 长：黄河燕

编　　委：（按姓氏汉语拼音排序）

蔡庆生（中国科学技术大学）　　蔡自兴（中南大学）
杜军平（北京邮电大学）　　韩力群（北京工商大学）
何华灿（西北工业大学）　　何　清（中国科学院计算技术研究所）
何新贵（北京大学）　　黄河燕（北京理工大学）
黄心汉（华中科技大学）　　焦李成（西安电子科技大学）
李德毅（中国人民解放军总参谋部第六十一研究所）
李祖枢（重庆大学）　　刘　宏（北京大学）
刘　清（南昌大学）　　秦世引（北京航空航天大学）
邱玉辉（西南师范大学）　　阮秋琦（北京交通大学）
史忠植（中国科学院计算技术研究所）　　孙增圻（清华大学）
谭　民（中国科学院自动化研究所）　　谭铁牛（中国科学院自动化研究所）
涂序彦（北京科技大学）　　王国胤（重庆邮电学院）
王家钦（清华大学）　　王万森（首都师范大学）
吴文俊（中国科学院数学与系统科学研究院）
杨义先（北京邮电大学）　　于洪珍（中国矿业大学）
张琴珠（华东师范大学）　　赵沁平（北京航空航天大学）
钟义信（北京邮电大学）　　庄越挺（浙江大学）

《智能科学技术著作丛书》序

智能是信息的精彩结晶，智能科学技术是信息科学技术的辉煌篇章，智能化是信息化发展的新动向、新阶段。

智能科学技术(intelligence science & technology，IST)是关于广义智能的理论方法和应用技术的综合性科学技术领域，其研究对象包括：

· 自然智能(natural intelligence，NI)，包括人的智能(human intelligence，HI)及其他生物智能(biological intelligence，BI)。

· 人工智能(artificial intelligence，AI)，包括机器智能(machine intelligence，MI)与智能机器(intelligent machine，IM)。

· 集成智能(integrated intelligence，II)，即人的智能与机器智能人机互补的集成智能。

· 协同智能(cooperative intelligence，CI)，指个体智能相互协调共生的群体协同智能。

· 分布智能(distributed intelligence，DI)，如广域信息网、分散大系统的分布式智能。

人工智能学科自 1956 年诞生的，五十余年来，在起伏、曲折的科学征途上不断前进、发展，从狭义人工智能走向广义人工智能，从个体人工智能到群体人工智能，从集中式人工智能到分布式人工智能，在理论方法研究和应用技术开发方面都取得了重大进展。如果说当年人工智能学科的诞生是生物科学技术与信息科学技术、系统科学技术的一次成功的结合，那么可以认为，现在智能科学技术领域的兴起是在信息化、网络化时代又一次新的多学科交融。

1981 年，中国人工智能学会 (Chinese Association for Artificial Intelligence，CAAI)正式成立，25 年来，从艰苦创业到成长壮大，从学习跟踪到自主研发，团结我国广大学者，在人工智能的研究开发及应用方面取得了显著的进展，促进了智能科学技术的发展。在华夏文化与东方哲学影响下，我国智能科学技术的研究、开发及应用，在学术思想与科学方法上，具有综合性、整体性、协调性的特色，在理论方法研究与应用技术开发方面，取得了具有创新性、开拓性的成果。智能化已成为当前新技术、新产品的发展方向和显著标志。

为了适时总结、交流、宣传我国学者在智能科学技术领域的研究开发及应用成果，中国人工智能学会与科学出版社合作编辑出版《智能科学技术著作丛书》。需要强调的是，这套丛书将优先出版那些有助于将科学技术转化为生产力以及对社会和国民经济建设有重大作用和应用前景的著作。

我们相信，有广大智能科学技术工作者的积极参与和大力支持，以及编委们的共同努力，《智能科学技术著作丛书》将为繁荣我国智能科学技术事业、增强自主创新能力、建设创新型国家做出应有的贡献。

祝《智能科学技术著作丛书》出版，特赋贺诗一首：

智能科技领域广

人机集成智能强

群体智能协同好

智能创新更辉煌

涂序彦

中国人工智能学会荣誉理事长

2005 年 12 月 18 日

前　言

学习是人类社会赖以生存的基本能力，就自身行为来讲，人们在处理实际场合中的重复操作任务时，往往依据被控对象可重复的动态行为与期望行为之间的差距来调整决策，不断地重复，使得对象行为与期望行为的配合达到要求。利用这一思想，日本学者 Arimoto 等在 1984 年针对机器人系统的控制问题提出了迭代学习控制这一新颖的控制方法。对于执行重复控制任务的动态系统，该方法可以利用前一次或前几次操作时测得的误差信息和控制输入信息修正当前循环的控制输入，使该重复任务在该次操作过程中执行得更好。经过三十多年的发展，迭代学习控制取得了丰富的理论成果，并在很多实际系统中得到了应用。

然而，已有的迭代学习控制理论主要针对点对点结构的控制系统给出，所有的系统数据均假设可以完全测量且不需要进行传输。实际系统中，随着现场设备的增加，系统的硬件布置也变得越来越复杂，传统点对点控制方式的整体维护困难、可扩展性差、成本高等一系列问题日益突出。另外，计算机技术、网络通信技术和控制科学的日益发展与交叉渗透推动着网络控制系统的产生和发展。与点对点控制结构相比，网络控制系统具有共享信息资源、减少系统布线、易于扩展和维护、增加系统的灵活性和可靠性等优点。然而，由于通信故障和带宽限制，网络的引入势必诱发数据丢失、网络诱导时延及数据量化等信息不完全现象。因此，研究网络参量约束下的迭代学习控制理论更具有实际意义。

本书主要介绍系统存在数据丢失、数据量化等不确定网络参量约束诱导因素情况下的迭代学习收敛性分析理论和控制器设计方法。全书共 13 章：第 1 章介绍迭代学习控制的基本原理与研究现状，讨论迭代学习控制在网络控制环境下所面临的新问题；第 2～5 章和第 11 章介绍随机数据丢失、数据量化条件下迭代学习控制的收敛性分析理论，并研究切换系统的迭代学习跟踪控制问题；第 6～10 章、第 12 章、第 13 章介绍网络参量约束下迭代学习控制的设计方法，包括二维网络系统基础理论及二维框架下迭代学习控制器的设计方法、基于超向量的鲁棒迭代学习控制设计方法和自适应迭代学习控制设计方法。

特别感谢国家自然科学基金重点项目（61433002，61833001）、面上项目（61573129）、青年科学基金项目（61203065），河南联合基金项目（U1804147），以及河南省高等学校科技创新人才计划项目（16HASTIT046）的支持。另外，在整理本书的过程中，梁嘉琪、刘建、王森、王清峰、朱盼盼和闫帅明等研究生做了很多文献翻译、排版和校对工作，在此向他们表示衷心感谢。最后，两位作者感谢各自家人

的默默付出和奉献。

本书是作者多年从事迭代学习控制理论研究工作的总结和凝练，限于作者水平和学识，书中难免存在不足之处，恳请广大读者批评指正。

目　录

《智能科学技术著作丛书》序
前言
第 1 章　绪论 …… 1
1.1　迭代学习控制概述 …… 1
1.2　迭代学习控制算法 …… 2
1.2.1　Arimoto-Like ILC 算法 …… 3
1.2.2　最优 ILC 算法 …… 5
1.2.3　自适应 ILC 算法 …… 6
1.2.4　数据驱动 ILC 算法 …… 7
1.3　迭代学习控制的研究现状 …… 9
1.4　网络控制系统的基本问题 …… 11
1.4.1　数据丢失 …… 12
1.4.2　网络诱导时延 …… 12
1.4.3　数据量化 …… 12
1.4.4　其他问题 …… 13
1.5　本书概况 …… 13
参考文献 …… 14
第 2 章　存在数据丢失的线性系统迭代学习控制 …… 24
2.1　引言 …… 24
2.2　问题描述 …… 25
2.3　收敛性分析 …… 26
2.4　数据丢失对系统的影响分析 …… 29
2.5　存在数据丢失的高阶 ILC 算法 …… 30
2.6　仿真示例 …… 32
2.7　本章小结 …… 38
参考文献 …… 38
第 3 章　存在数据丢失的非线性系统迭代学习控制 …… 40
3.1　引言 …… 40
3.2　问题描述 …… 41
3.3　收敛性分析 …… 42

3.4 MIMO 非线性系统 …… 45
3.5 仿真示例 …… 46
3.6 本章小结 …… 50
参考文献 …… 50
第 4 章 线性切换系统的迭代学习控制 …… 52
4.1 引言 …… 52
4.2 问题描述 …… 53
4.3 收敛性分析 …… 53
4.4 线性离散切换系统 …… 58
4.4.1 包含两个子系统的切换系统 …… 59
4.4.2 包含多个子系统的切换系统 …… 61
4.5 仿真示例 …… 63
4.6 本章小结 …… 68
参考文献 …… 68
第 5 章 非线性切换系统的迭代学习控制 …… 70
5.1 引言 …… 70
5.2 问题描述 …… 71
5.3 收敛性分析 …… 72
5.4 非线性时滞切换系统 …… 75
5.5 仿真示例 …… 80
5.6 本章小结 …… 84
参考文献 …… 84
第 6 章 Lifting 框架下存在数据丢失的 H_∞ 迭代学习控制设计 …… 86
6.1 引言 …… 86
6.2 问题描述 …… 87
6.3 控制器设计及收敛性分析 …… 89
6.4 仿真示例 …… 94
6.5 本章小结 …… 97
参考文献 …… 97
第 7 章 二维框架下存在数据丢失的迭代学习控制设计 …… 99
7.1 引言 …… 99
7.2 问题描述 …… 100
7.3 二维随机系统稳定性分析 …… 102
7.4 迭代学习控制器设计 …… 105
7.5 鲁棒迭代学习控制器设计 …… 107

7.6 仿真示例 …… 110
7.7 本章小结 …… 114
参考文献 …… 114
第 8 章 存在数据丢失的线性时滞系统迭代学习控制设计 …… 116
8.1 引言 …… 116
8.2 问题描述 …… 117
8.3 二维时滞系统均方稳定 …… 118
8.4 迭代学习控制器设计 …… 123
8.5 仿真示例 …… 125
8.6 本章小结 …… 129
参考文献 …… 129
第 9 章 存在数据丢失的二维非线性系统鲁棒 H_∞ 控制 …… 131
9.1 引言 …… 131
9.2 问题描述 …… 132
9.3 稳定性分析及控制器设计 …… 133
9.4 鲁棒 H_∞ 反馈控制器设计 …… 138
9.5 仿真示例 …… 141
9.6 本章小结 …… 142
参考文献 …… 143
第 10 章 存在数据丢失的二维线性系统 H_∞ 滤波 …… 144
10.1 引言 …… 144
10.2 问题描述 …… 145
10.3 H_∞ 滤波器设计 …… 147
10.4 鲁棒 H_∞ 滤波器设计 …… 152
10.5 仿真示例 …… 154
10.6 本章小结 …… 157
参考文献 …… 157
第 11 章 量化迭代学习控制系统分析 …… 158
11.1 引言 …… 158
11.2 问题描述 …… 159
11.3 收敛性分析 …… 160
11.4 非线性离散系统 …… 162
11.5 仿真示例 …… 164
11.6 本章小结 …… 168
参考文献 …… 168

第 12 章 二维框架下的量化迭代学习控制设计 …… 170
12.1 引言…… 170
12.2 问题描述…… 171
12.3 稳定性分析及控制器设计…… 173
12.4 仿真示例…… 176
12.5 本章小结…… 179
参考文献…… 179
第 13 章 二值量化系统的自适应迭代学习控制 …… 181
13.1 引言…… 181
13.2 问题描述…… 182
13.3 算法设计…… 183
13.4 收敛性分析…… 184
13.5 仿真示例…… 188
13.6 本章小结…… 191
参考文献…… 191

第1章 绪 论

迭代学习控制(iterative learning control,ILC)在过去的三十多年中取得了丰富的理论结果,并在很多实际系统中得到了应用,目前已成为智能控制的一个重要分支。本章简要总结ILC的一些常见算法和设计分析手段,回顾2013年以来ILC取得的研究成果,并介绍网络参量约束下控制系统存在的主要问题,为后续章节工作的开展奠定基础。

1.1 迭代学习控制概述

学习是人类的基本技能,人们通过学习获得一定的知识和经验,在日常生活中利用这些知识和经验使得个人行为越来越好。相似地,在研究高速运转的工业机械手臂控制问题时,1978年日本学者Uchiyama提出了这样一种思想:不断重复一个相同轨迹的控制尝试,并以此修正控制率,可能会达到较好的控制效果。1984年,日本学者Arimoto等根据这种思想,针对机器人系统的控制问题提出了ILC这一新颖的控制方法[1]。其基本策略就是:对于一个在有限时间区间上执行轨迹跟踪任务的机器人,利用前一次或前几次操作时测得的误差信息和控制输入信息修正当前循环的控制输入,使该重复任务在该次操作过程中执行得更好。如此不断重复,直到在整个时间区间内,系统的输出完全跟踪上期望轨迹。

ILC可以看成智能控制的范畴,很多文献都给出了ILC的定义,虽然这些定义的侧重点不完全相同,但共同强调的就是重复,即要求系统满足三个重复特征:①控制任务在有限时间区间内重复执行;②系统每次运行的初始状态是相同的;③系统每次运行中系统动态是不变的。在此条件下,ILC可以利用历史信息构造新的控制输入,实现有限时间区间内的完全跟踪控制。虽然传统控制理论已经提供了很多方法来实现系统的稳定及性能的优化,但是由于实际系统受未建模动态、参数不确定性等因素的影响,很少有控制方法能够实现系统的高精度跟踪控制。此外,传统控制方法的稳定性理论建立在时间域内,系统的稳定性仅在时间趋于无穷大时才能保证,而响应过程的暂态性鲜有讨论。ILC可以很好地弥补传统控制理论的这些不足,它可以保证有限时间区间内对期望轨迹的完全跟踪,即系统的输出在时间域内任意时刻自始至终都和期望任务保持完全一致,无论是暂态还是稳态。

ILC 系统的基本框图如图 1.1 所示，其中 t 表示时间变量，下标 k 表示第 k 次迭代，$u_k(t)$为系统控制输入变量，$y_k(t)$为系统输出变量，$y_d(t)$为系统的期望输出轨迹。系统的控制任务是：找到合适的输入 $u_k(t)$使得系统在该控制信号的作用下，输出 $y_k(t)$尽可能精确地逼近 $y_d(t)$。这里首先讨论传统反馈控制作用的情况，如果取 $u_k(t)=f(e_k(t))$，其中 $e_k(t)=y_d(t)-y_k(t)$为跟踪误差，那么无论系统重复执行了多少次，每次的响应都是相同的，反馈控制未能从重复过程中学习到任何信息用于改善响应性能。若将每次重复过程产生的信息存储起来，并在下次构造控制输入时选取 $u_{k+1}(t)=f(u_k(t),e_k(t))$，则算法可利用前一次的控制输入和跟踪误差更新控制输入，具备了从过去经验中总结不足并进行弥补修正的学习能力。这和人类的学习过程是相似的，人们总是通过反复练习和修正某一行为与动作，最终掌握正确的做法，如投篮、侧方停车的反复练习等。经过多年的发展与完善，ILC 目前已经成为智能控制领域的一个重要分支。文献[2]～[9]详细综述了 ILC 近年来取得的研究成果，并指明了存在的问题和未来的发展方向。

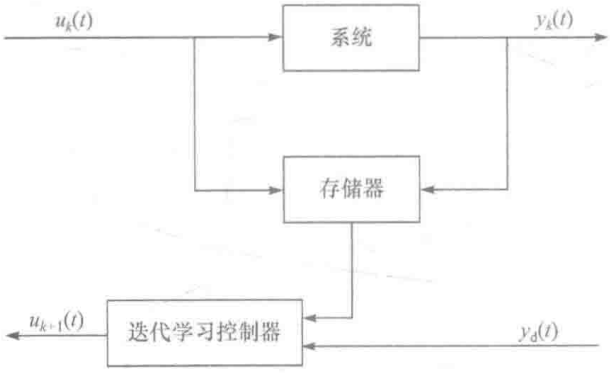


图 1.1 ILC 系统的基本框图

1.2 迭代学习控制算法

前述介绍中已经给出了 ILC 算法的基本结构，即 $u_{k+1}(t)=f(u_k(t),e_k(t))$，选取不同的 $f(\cdot)$将产生不同结构的 ILC 算法。令人惊奇的是，即使选择最简单的形式 $u_{k+1}(t)=u_k(t)+qe_k(t)$（其中 q 为待选取的参数增益），只要受控对象满足 ILC 算法的基本假设条件，即便是存在建模不确定性的非线性动态系统，ILC 算法仍然可以较好地实现有限时间区间内的完全跟踪。ILC 算法自提出至今，为解决不同的问题人们提出了多种不同的算法。本节将重点介绍几种常见的 ILC 算法。

1.2.1 Arimoto-Like ILC 算法

1. 连续时间系统

考虑如下线性连续时间系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t)=Ax_k(t)+Bu_k(t) \\ y_k(t)=Cx_k(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

式中，$x(t)\in R^n$、$u(t)\in R^p$ 和 $y(t)\in R^q$ 分别表示系统状态变量、系统控制输入变量和系统输出变量；A、B、C 为具有合适维数的矩阵；$t\in[0,T]$为时间变量，T 为迭代过程的终止时刻；$k=0,1,2,\cdots$为不同的迭代次数。

系统的控制目标为：给定一个可达的期望轨迹 $y_d(t)(t\in[0,T])$，寻找合适的控制输入 $u_k(t)$使系统输出 $y_k(t)$尽可能地逼近 $y_d(t)$。这里，系统需要满足如下基本假设条件：

(1) 系统每次运行的初始条件与期望初始条件相同，即 $x_k(0)=x_d(0)$。

(2) 系统每次运行的期望轨迹 $y_d(t)$是不变的。

(3) 系统每次运行中的动态特征是不变的。

当系统(1.1)满足上述假设条件时，若系统相对度为 1，则可构造如下 D 型 ILC 算法[10,11]：

$$u_{k+1}(t)=u_k(t)+\Gamma\dot{e}_k(t) \tag{1.2}$$

式中，Γ 为学习增益矩阵。若选择 Γ 满足条件

$$\| I-CB\Gamma \|<1 \tag{1.3}$$

式中，$\|\cdot\|$ 为某种意义下的范数，则当迭代次数趋于无穷大时，系统的输出一致收敛于期望轨迹，即$\lim\limits_{k\to\infty}y_k(t)\to y_d(t)$对于所有 $t\in[0,T]$均成立。

注 1.1 从式(1.2)中可以看出，D(differential)型 ILC 算法的收敛性条件不依赖系统矩阵 A，因此该算法是一种较少利用系统模型信息的控制方法，并对由系统矩阵 A 引起的未建模动态具有很好的鲁棒性。值得说明的是，在 D 型 ILC 算法的收敛性分析过程中经常采用基于 λ 范数的压缩映射方法，而 λ 范数意义下的单调收敛并不能保证 l_2 或 l_∞ 范数意义下的单调收敛，从迭代域上看，收敛过程可能会存在较大的暂态误差。因此，关于单调收敛 ILC 算法的研究也引起了较大关注[12,13]。

由式(1.2)出发，还可以构造其他类型的 Arimoto-Like ILC 算法，如比例-积分-微分(proportion-intergral-differential，PID)型算法：

$$u_{k+1}(t)=u_k(t)+\Phi e_k(t)+\Gamma\dot{e}_k(t)+\Psi\int e_k(t)\mathrm{d}t \tag{1.4}$$

式中，Φ、Γ 和 Ψ 为学习增益矩阵。进而，还可以构造高阶 PID 型算法：

$$u_{k+1}(t)=\sum_{i=1}^{n}(I-\Lambda)P_i u_{k+1-i}(t)+\Lambda u_0+\sum_{i=1}^{n}(\Phi_i e_{k+1-i}+\Gamma_i \dot{e}_{k+1-i}+\Psi_i\int e_{k+1-i}\mathrm{d}t)$$

式中，n 为正整数，代表高阶 ILC 算法的阶数；参数矩阵 P_i 满足 $\sum_{i=1}^{n}P_i=I$。

2. 离散时间系统

考虑如下线性离散时间系统：

$$\begin{cases}x_k(t+1)=Ax_k(t)+Bu_k(t)\\ y_k(t)=Cx_k(t)\end{cases} \tag{1.5}$$

式中，$t=0,1,2,\cdots,N$ 为离散时间，其他符号与连续系统(1.1)具有相同的意义。构造如下 P 型 ILC 算法[14]：

$$u_{k+1}(t)=u_k(t)+Ke_k(t+1) \tag{1.6}$$

式中，K 为学习增益矩阵。对于给定期望轨迹 $y_d(t)$，若选择 K 满足条件

$$\|I-CBK\|<1 \tag{1.7}$$

则当迭代次数趋近于无穷大时，系统的输出一致收敛于期望轨迹，即 $\lim_{k\to\infty}y_k(t)\to y_d(t)$ 对于所有 $t\in[0,N]$ 均成立。

注 1.2 P(proportion)型 ILC 算法在更新 $u_{k+1}(t)$ 的信息时用到了 $e_k(t+1)$，这在时间域上是非因果的，但对于 ILC 系统是可行的，因为在第 $k+1$ 次运行过程中第 k 次所有时刻的系统信息都已经被存储。收敛性条件中同样没有包含系统矩阵 A 的信息，注 1.1 中针对连续系统的说明同样适用于离散系统。算法(1.6)中的更新项如果选为 $K(e_k(t+1)-e_k(t))$，那么该算法称为 D 型 ILC 算法[14]。

关于线性离散系统的 ILC，还有一种基于超向量的分析方法[15-20]。该方法通过 Lifing 的方式将所有时间点的系统变量描述为一个超向量，即定义

$$U_k=[u_k^{\mathrm{T}}(0)\quad u_k^{\mathrm{T}}(1)\quad\cdots\quad u_k^{\mathrm{T}}(N-1)]^{\mathrm{T}}$$
$$Y_k=[y_k^{\mathrm{T}}(1)\quad y_k^{\mathrm{T}}(2)\quad\cdots\quad y_k^{\mathrm{T}}(N)]^{\mathrm{T}}$$

当系统满足重复初始条件时，即对于所有 k 满足 $x_k(0)=x_0$，x_0 为一个固定常数，则系统(1.5)可表示为

$$Y_k=GU_k \tag{1.8}$$

式中

$$G=\begin{bmatrix}CB & & & & \\ CAB & CB & & & \\ CA^2B & CAB & CB & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & \cdots & CAB & CB\end{bmatrix}$$

同样，定义