国家科学技术学术著作出版基金
NFAPST

郭雷 裔扬 殷利平 王宏 著

非高斯随机分布系统建模、分析与控制理论

科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

非高斯随机分布系统建模、分析与控制理论

郭 雷 裔 扬 殷利平 王 宏 著

常州大学图书馆
藏书章

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

非高斯随机系统广泛存在。相对于以期望和方差为优化指标的高斯随机系统，非高斯随机系统控制问题是一个长期存在的理论难题。本书系统和全面地总结了作者十几年来在非高斯随机分布系统建模、分析、控制、滤波和优化方面的理论研究成果，主要内容包括基于动静混合神经网络的智能学习建模、随机分布泛函算子建模、多目标凸优化随机分布控制器设计、最小熵与统计信息集合控制、泛函算子系统鲁棒随机分布控制、随机分布系统滤波和故障检测。本书不仅系统研究了非高斯随机系统，而且涉及鲁棒控制、抗干扰控制、模糊控制、神经网络控制、自适应控制和迭代学习控制等方法，可应用于滤波、估计以及故障检测、故障诊断等研究方向，在智能科学、数据科学等领域具有潜在的应用意义。

本书可作为控制理论与控制工程、系统工程、运筹学与控制论、机械工程与自动化、计算机科学、信号处理、智能科学和数据科学等相关专业的研究生教材和教学参考书，也可供从事相关专业教学和科研工作的高校教师、科技工作者和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

非高斯随机分布系统建模、分析与控制理论/郭雷等著. —北京：科学出版社，2019.8

ISBN 978-7-03-061258-8

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①郭… Ⅲ. ①随机系统 Ⅳ. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 094697 号

责任编辑：张海娜 赵微微 / 责任校对：樊雅琼

责任印制：吴兆东 / 封面设计：蓝正设计

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 8 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5

2019 年 8 月第一次印刷 印张：12 3/4

字数：252 000

定价：95.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

20 世纪 60 年代创立的以最小方差控制和卡尔曼滤波为代表的随机控制理论一般局限于高斯系统对象，优化指标局限于期望和方差。然而，高斯变量的非线性融合以及非线性映射会产生非高斯变量，非高斯变量和非高斯随机系统广泛存在。半个世纪以来，具有非高斯变量的随机系统控制问题已成为随机控制理论的一个难题，其难点在于非高斯变量的统计特征只能由输出概率密度函数 (probability density function, PDF) 准确表征，而具有正积分约束的 PDF 控制属于一个约束泛函空间的无穷维分布参数控制问题。另外，传统的随机反馈控制理论依赖于系统输出或状态的量测确定值反馈，而随着传感器技术和信息处理技术的快速发展，在许多实际工业过程中，量测信息不再是输出变量的确定值，而是大数据集合、图像、视频等信息以及由此得到的输出变量的统计信息集合或者输出变量的 PDF。

非高斯随机系统的建模涉及输入和输出统计特征的映射和表征，非高斯随机系统的调节和跟踪问题涉及有限维变量对正积分约束泛函的控制和优化技术，传统随机控制工具和模型难以应用。作者及其团队经过十多年的努力，逐步揭示了非高斯随机控制系统若干科学问题的核心特征，系统地提出了一套工程上实用的非高斯系统随机分布控制理论的研究框架。主要内容包括：

(1) 建立基于动静混合智能优化的非高斯随机分布系统建模、分析与控制方法。这类模型简称为非高斯智能学习模型，通过静态神经网络逼近和学习输出 PDF，利用动态神经网络逼近和学习系统状态。在此基础上，给出概率分布函数基于静态神经网络优化的逼近与误差分析方法，设计含非线性、不确定性动态的权动态神经网络/模糊系统，建立非高斯随机分布系统基于动静混合两步神经网络优化的随机分布系统模型，提出随机分布系统全局稳定性和收敛性的分析方法。针对正积分约束泛函的形状控制问题，提出满足超椭球/超平面状态约束的结构跟踪控制方法，克服以往线性模型难以改变输出 PDF 形状的局限性，解决基于凸优化算法的多变量非高斯随机分布系统约束 PID 跟踪分布控制问题。在此基础上，进一步给出非高斯随机分布泛函模型滤波和故障检测问题的研究框架。

(2) 建立基于分布泛函算子优化的非高斯随机分布系统建模、分析与控制方法。这类模型简称为非高斯分布泛函模型，用来描述输入 PDF 通过控制器设计改变输出 PDF 的动态行为。为揭示一般非线性算子映射下 PDF 的变化规律和控制机理，

建立非高斯随机分布系统高维约束空间下输入 PDF/输出 PDF 算子非线性动态映射模型；解决基于多步性能指标自适应权矩阵调节的闭环分布控制系统稳定性分析问题，提出具有多步预测性能优化指标的非高斯随机分布系统泛函算子迭代控制和优化方法；进一步提出非高斯分布泛函模型的滤波与故障检测方法。

(3) 提出非高斯系统统计信息驱动的广义熵优化以及统计信息集合优化准则。揭示无穷维变量概率分布泛函逼近与有限维向量跟踪的变化规律，为随机分布系统可控性和收敛性分析奠定理论基础；通过刻画多阶矩对输出 PDF 的逼近以及熵对随机变量不确定度的描述，得到工程上实用的统计信息集合驱动的随机统计信息集合优化方法。

上述内容可概括为两类模型和一个准则：两类模型是指非高斯智能学习模型和非高斯分布泛函模型，一个准则即非高斯系统统计信息集合优化准则。与已有非高斯控制方法相比，本书提出的理论和方法具有如下特点：① 非高斯和非线性，揭示在非线性映射下非高斯变量的 PDF 变化和控制机理；② 动态性和适应性，设计动态学习和自适应优化方法，可用于实时动态反馈控制问题，还可用于滤波和估计问题；③ 稳定性和全局性，提出随机分布控制的全局性描述，构建稳定性和收敛性分析框架；④ 可约束和可实现性，把 PDF 的无穷维约束归结到有限维变量椭球约束，研究可控性和可实现性问题。

作者及其团队提出的随机分布控制理论从以下三方面拓展了传统随机反馈控制理论的研究领域，形成了一个非高斯随机系统控制理论研究的新方向：① 研究对象，从线性高斯系统拓展到非线性非高斯系统；② 优化指标，从期望和方差优化拓展到 PDF 和统计信息集合优化；③ 反馈方式，从输出确定值反馈拓展到输出 PDF 泛函和统计信息集合反馈。值得指出的是，为解决上述非高斯随机分布系统控制问题，本书提出若干约束跟踪控制、结构控制、非零平衡点控制的设计方法，可为鲁棒控制、抗干扰控制和自适应控制领域提供新的设计工具。

本书系统地总结了作者十几年来在非高斯随机分布控制系统方面的原创性研究成果。本书前两章为基础内容，主要是非高斯随机分布系统理论概论以及相应的数学基础，其余内容可以相应地分为两大部分：第一部分为非高斯智能学习模型的分析、控制与故障检测方法 (第 3~9 章)，第二部分为非高斯分布泛函模型的分析、控制与估计方法 (第 10~13 章)。郭雷和王宏负责全书的组织、统筹和审核，裔扬、殷利平和李涛分别整理了第 3~8 章、第 10~13 章和第 9 章，田波承担了校对工作。

本书相关的研究工作先后得到了国家杰出青年科学基金项目 (60925012)、国家

自然科学基金项目 (61121003、61473249、61573190、61571014、61627810、61633003、61661136007) 的资助，在此表示感谢。本书还获得了国家科学技术学术著作出版基金的资助，在此一并表示感谢。最后，衷心感谢家人的理解与支持。

限于作者水平，书中难免存在不足之处，敬请广大读者批评指正。

郭　雷

2019 年 3 月

于北京航空航天大学

主要符号说明

$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{R}^n$	n 维实数集
$\mathbb{R}^{n\times m}$	$n\times m$ 实数集
$I(I_n)$	单位阵 (n 维单位阵)
x^{T} 或 A^{T}	向量 x 的转置或矩阵 A 的转置
A^{-1}	矩阵 A 的逆
$P>0$	P 是正定矩阵
$P\geqslant 0$	P 是正半定矩阵
$P<0$	P 是负定矩阵
$P\leqslant 0$	P 是负半定矩阵
$\lambda(A)$	矩阵 A 的特征值集合
$\lambda_{\max}(A)$	矩阵 A 的最大特征值
$\lambda_{\min}(A)$	矩阵 A 的最小特征值
$\|x\|$	向量 x 的欧氏范数
$\|A\|$	矩阵 A 的欧氏范数
$\|x\|_p$	向量 x 的 L_p 范数
$\|A\|_p$	矩阵 A 的 L_p 范数
$\max S$	集合 S 中的最大元素
$\min S$	集合 S 中的最小元素
$\sup S$	集合 S 的上确界
$\inf S$	集合 S 的下确界
sgn	符号函数
$[a,b)$	实数集 $\{t\in\mathbb{R}:a\leqslant t<b\}$
$\mathrm{sym}(A)$	$A+A^{\mathrm{T}}$
$\mathrm{tr}\{A\}$	矩阵 A 的迹
$v_1\preceq v_2$	向量 v_2 的每一个分量都不小于向量 v_1 对应的分量
$P\{\cdot\}$	某事件的概率
$F_z(w)$	随机向量 (或变量) w 的随机分布函数
$\gamma_z(w)$	随机向量 (或变量) w 的概率密度函数

目　　录

前言

主要符号说明

第 1 章　非高斯随机分布系统理论概述 ····· 1

1.1　研究背景与研究意义 ····· 1

1.2　研究动态与发展现状 ····· 3

1.2.1　非高斯随机分布系统的智能学习模型 ····· 4

1.2.2　非高斯随机分布系统的分布泛函模型 ····· 6

1.2.3　广义最小熵控制与统计信息集合优化 ····· 7

1.2.4　随机分布滤波与故障检测 ····· 8

1.3　本书主要内容 ····· 8

第 2 章　数学基础 ····· 11

2.1　随机变量的概念 ····· 11

2.2　一元随机变量函数 ····· 12

2.2.1　随机变量 $g(X)$ ····· 12

2.2.2　$g(X)$ 的分布及概率密度函数的确定 ····· 13

2.2.3　均值和方差 ····· 13

2.2.4　$g(X)$ 的均值 ····· 14

2.2.5　矩 ····· 14

2.3　多元分布 ····· 15

2.3.1　多元分布函数 ····· 15

2.3.2　多元分布概率密度函数 ····· 15

2.3.3　边缘分布 ····· 16

2.3.4　条件分布与条件期望 ····· 16

2.3.5　独立性 ····· 17

2.3.6　全概率公式与全期望公式 ····· 17

2.4　熵 ····· 18

2.4.1　离散随机变量的熵 ····· 18

2.4.2　互信息 ····· 19

2.4.3　连续随机变量的熵 ····· 20

2.4.4 熵的计算 ····· 21
2.4.5 由近似计算估计熵值 (仅适用于一维随机变量) ····· 22
2.4.6 r-Renyi 熵 ····· 24
2.5 Bellman 最优化原理 ····· 25
2.6 Borel 可测函数 ····· 25
2.7 PDF 转换定律 ····· 26
第 3 章 连续时间随机分布系统多目标 PID 控制 ····· 28
3.1 输出概率分布样条逼近 ····· 28
3.2 非线性权动态建模和 PID 控制器设计 ····· 30
3.3 基于凸优化的多目标控制算法 ····· 32
3.3.1 自治系统稳定性及 L_1 性能优化控制 ····· 32
3.3.2 广义闭环系统稳定性分析、动态跟踪及 L_1 性能优化控制 ····· 35
3.3.3 权动态约束性能分析 ····· 37
3.4 仿真算例 ····· 39
3.5 本章小结 ····· 41
第 4 章 离散时间随机分布系统多目标 PI 控制 ····· 42
4.1 方根 B 样条网络逼近及离散权动态模型 ····· 42
4.2 广义离散 PI 控制器设计 ····· 44
4.3 基于凸优化的多目标控制算法 ····· 45
4.3.1 自治离散系统稳定性及 L_1 性能优化控制 ····· 45
4.3.2 离散闭环系统稳定性分析、状态跟踪及 L_1 性能优化控制 ····· 48
4.3.3 权动态约束性能分析 ····· 51
4.4 仿真算例 ····· 52
4.5 本章小结 ····· 54
第 5 章 随机分布系统迭代学习控制 ····· 55
5.1 问题描述 ····· 55
5.1.1 带有可调参数的动态样条逼近 ····· 55
5.1.2 迭代学习控制器设计 ····· 56
5.2 迭代学习优化算法 ····· 57
5.2.1 H_∞ 优化控制 ····· 57
5.2.2 L_1 优化跟踪控制 ····· 58
5.3 仿真算例 ····· 61
5.4 本章小结 ····· 64

第 6 章　随机分布系统自适应控制 ····· 65
6.1　基于两步神经网络模型参数自适应随机分布控制算法 ····· 66
6.1.1　线性样条神经网络逼近 ····· 66
6.1.2　基于参数自适应算法的动态神经网络模型辨识 ····· 67
6.1.3　动态神经网络模型自适应反馈跟踪控制 ····· 70
6.1.4　仿真算例 1 ····· 73
6.2　基于两步神经网络模型受限 PI 随机分布控制算法 ····· 76
6.2.1　方根样条神经网络逼近 ····· 76
6.2.2　基于参数自适应算法的时滞动态神经网络模型辨识 ····· 77
6.2.3　时滞动态神经网络模型受限 PI 多目标跟踪控制 ····· 80
6.2.4　仿真算例 2 ····· 83
6.2.5　仿真算例 3 ····· 86
6.3　本章小结 ····· 89
第 7 章　随机分布系统抗干扰模糊控制 ····· 90
7.1　模糊逻辑系统概率分布逼近 ····· 91
7.2　T-S 模糊权动态模型的确立 ····· 92
7.3　基于扰动观测器的模糊控制器设计 ····· 94
7.4　基于凸优化的多目标控制算法 ····· 96
7.5　仿真算例 ····· 103
7.6　本章小结 ····· 108
第 8 章　基于动态神经网络的统计信息集合跟踪控制 ····· 109
8.1　统计信息跟踪控制问题描述 ····· 109
8.2　未知死区模型和动态神经网络辨识 ····· 110
8.3　带有 Nussbaum 函数的跟踪控制算法 ····· 114
8.4　仿真算例 ····· 116
8.5　本章小结 ····· 118
第 9 章　非高斯智能学习模型的故障检测与诊断 ····· 119
9.1　系统描述 ····· 119
9.2　时滞相关故障检测 ····· 121
9.3　故障诊断 ····· 124
9.4　仿真算例 ····· 126
9.5　本章小结 ····· 129
第 10 章　非高斯随机分布泛函模型的累积 PDF 控制 ····· 130
10.1　问题描述 ····· 130

10.1.1 系统模型 …… 130
10.1.2 累积的性能指标函数 …… 131
10.1.3 输出 PDF 和输入 PDF 之间的关系 …… 132
10.2 输出 PDF 控制 …… 133
10.2.1 控制器设计 …… 133
10.2.2 镇定控制器设计 …… 135
10.3 仿真算例 …… 137
10.4 本章小结 …… 139
第 11 章 随机分布泛函模型的鲁棒控制 …… 141
11.1 问题描述 …… 141
11.1.1 系统模型 …… 141
11.1.2 输出 PDF 和鲁棒跟踪性能指标 …… 142
11.2 鲁棒 PDF 控制 …… 146
11.3 镇定控制器设计 …… 146
11.4 仿真算例 …… 148
11.5 本章小结 …… 151
第 12 章 随机分布泛函模型的最小熵滤波 …… 152
12.1 问题描述 …… 152
12.1.1 系统模型与滤波模型 …… 152
12.1.2 滤波器设计 …… 153
12.1.3 混合概率和混合 PDF …… 154
12.2 误差 PDF 的计算 …… 155
12.3 最小熵滤波 …… 157
12.4 仿真算例 …… 160
12.5 本章小结 …… 161
第 13 章 随机分布泛函模型的故障检测 …… 162
13.1 状态空间模型下的非线性系统故障检测 …… 162
13.1.1 系统模型与滤波 …… 162
13.1.2 误差统计信息 …… 163
13.1.3 性能指标函数 …… 165
13.1.4 误差 PDF 的简化算法 …… 167
13.1.5 最优故障检测滤波器设计方法 …… 169
13.1.6 仿真算例 1 …… 170
13.2 NARMAX 系统故障检测 …… 173

13.2.1 NARMAX 模型 ····· 173
13.2.2 故障检测滤波与性能指标 ····· 175
13.2.3 误差 PDF 计算 ····· 175
13.2.4 最优故障检测滤波器设计方法 ····· 177
13.2.5 仿真算例 2 ····· 178
13.3 本章小结 ····· 180
参考文献 ····· 181
索引 ····· 188

第 1 章　非高斯随机分布系统理论概述

非高斯随机分布系统 (本书有时简称随机分布系统) 的建模、控制和优化等理论方法和技术在过去二十年得到了迅速的发展。本章将对这些方法进行整理、归类和分析，总结和探讨已经解决的和尚未解决的一系列问题，重点阐述随机分布系统的研究背景、研究意义以及研究动态等主要内容。

1.1　研究背景与研究意义

近几十年来，面向随机系统的随机控制和随机估计理论已经成为控制理论和应用数学界的重要研究领域[1]。目前，对于随机系统控制的研究已经取得了大量理论的和实际工业应用的成果，比较典型的有自校正控制[2]、最小方差控制[1,3]、随机线性二次型控制[4]、具有马尔可夫阶跃参数的随机控制[5,6]、随机神经网络模型控制[7] 以及滤波理论随机控制[8,9] 等方法。这些研究成果集中对系统输出变量本身进行跟踪，主要对象是系统输出的均值和方差，且大都假设系统随机变量服从高斯分布。这是因为当系统的输出和干扰噪声局限于高斯变量时，其均值和方差可以决定输出 PDF 的形状。

然而，实际工程应用中系统大多含有非高斯随机变量。这是因为系统的非线性会导致非高斯输出，且随机干扰也经常是非高斯变量而不是高斯变量。这时的 PDF 往往是非对称、多峰值的，期望和方差就不再能够准确反映输出变量的概率特性[10,11]。对于这些被控对象，一般来说常规的高斯随机控制方法难以满足日益增高的控制性能要求。另外，随着精密仪器、通信网络、图像处理和数据处理技术的快速发展，在许多实际工业过程中，可以量测并且用于反馈监控的数据和信息不仅仅局限为经典反馈控制理论研究中的输出信号的测量值，而是海量数据集合与图像等信息，以及由此得到的输出变量的 PDF 或者统计信息集合 (SIS)。这也是实际工程中凝练的传统随机反馈控制理论难以处理的一个理论难点问题，实质上是一种先基于知识随机信息提取，再基于随机信息进行控制、估计和诊断的过程。

为此，本书考虑以输出 PDF 为新的研究和控制对象，系统地分析多种非高斯随机系统建模及其控制方法[10-39]，创立一个新的随机控制理论研究方向，称为随机分布控制 (SDC)理论。无论从理论分析方面还是从实际应用方面来看，随机分布控制理论的研究都有很大的意义。从理论分析方面来看，对于不同于传统模型、含非高斯变量和非线性环节的随机控制对象，随机分布控制理论利用可以量测的输

出 PDF，根据控制的实际要求提出新的优化指标，研究并设计出可以实现的确定性的控制策略，使得随机输出的 PDF 或者其他统计信息 (如熵、高阶矩、偏度和峰度等) 满足系统的性能要求，并且能够进一步推广到滤波、故障诊断和参数估计等研究领域。由于控制的目标在于整个输出 PDF 的形状，这类控制问题涵盖了常规随机系统中对输出的均值和方差的控制。同时这也是一类随着传感技术和信息处理技术的发展，从实际工程中凝练出来的新颖的控制科学问题，有很强的应用背景。下面几个实际应用讨论了随机分布控制的应用前景。

(1) 化工过程中聚合物的分子量分布控制[24,39,40]。聚合物的分子量分布是评价聚合物质量的一个重要指标，对化工厂的经济效益具有重要影响，所以聚合物生产加工对分子量分布控制有着很高的要求。聚合物的分子量分布可以用一个 PDF 来表示。影响化工过程聚合物分子量分布的因素众多，目前主要通过机理建模的方法得到产品的分子量分布信息。控制系统的目的是使描述分子量分布的 PDF 的形状符合理想的高聚物产品分子量分布。由于不同产品理想分布的形状差别很大，其相应的 PDF 往往具有非对称和不规则的特点。

(2) 造纸过程中的灰度分布控制[16,20,24,27]。在造纸过程中，控制系统可以建模为一个复杂的多变量系统，纸张的质量可以由 60 多个物理特性来描述。控制的关键要求是使纸张的二维质量分布尽可能均匀。这里纤维、填料等原材料都有较强的随机因素，而且系统也带有很强的非线性。随着数字摄像和图像处理技术的发展，目前可以获取纸张二维质量的灰度分布函数，进而得到灰度分布量的 PDF。王宏和岳红等已经在英国曼彻斯特大学的造纸样机上建立了一个简单的闭环控制系统，并实现了以分布形状、最小熵和最小方差为目标的多种控制算法。

(3) 燃烧过程中的温度场分布控制[10,24]。燃烧过程是能量转化和材料加工过程的一个重要组成部分，它在钢铁生产、火力发电和航空发动机中都是一个对控制要求比较高的环节。衡量燃烧过程效益的一个重要指标是燃烧室温度场的分布，这种分布按照常规的处理办法可以通过物理原理建立一组偏微分方程 (PDE)，并利用有限元计算方法来实现对燃烧室温度场的分析和效益计算，这实际上也是一个随机分布系统。控制目标是通过合理选择燃料输入和过程参数，使火焰分布三维图形的联合 PDF 满足要求。

(4) 惯性组合导航系统的标定对准技术。惯性组合导航系统实际上是一个多传感器的信息融合系统，多传感器的随机干扰有时是非高斯噪声。其中的标定和对准系统含有非线性、不确定性等复杂动态特性，传输过程同时含有时滞动态特性，因此对于高斯噪声，即使经过非线性映射及非线性融合也会产生非高斯输出。

尽管研究非高斯随机分布系统的意义重大，但是理论研究具有很强的挑战性。首先，控制理论面临的过程对象相当复杂，研究的目标和对象都超出了常规控制方法的研究范畴；其次，工程上迫切希望得到易于工程实现的在线控制策略，目前这

也是很难达到的。对于这类非线性动态随机控制对象，一个在理论和工程上都迫切需要解决的问题是：建立符合过程对象基本动态特征而又易于分析和综合的随机分布系统控制模型，对于不同的实际过程中可以量测的输出或者输出的 PDF，提出不同的优化指标来确定可以工程实现的确定性的控制策略，使得随机输出 PDF 或者其他统计信息满足系统的性能要求。进一步，研究非高斯随机分布系统的滤波和故障检测与诊断 (FDD) 的新方法，特别是建立利用系统的统计特性进行动态滤波、估计以及 FDD 的新框架。

1.2 研究动态与发展现状

对于非高斯随机分布控制问题，20 世纪 90 年代一些学者已经开展了一系列的研究工作[41-49]。例如，Challa 和 Friedman 等研究了一系列基于贝叶斯估计的递推估计方法[41,42]；Sun 和 Forbes 等采用静态优化、方程逼近等手段研究了 PDF 形状控制问题[43,44,46,47]。

从 1998 年起，王宏等针对具有造纸机背景的非高斯系统 PDF 控制问题，提出了输出 PDF 的 B 样条神经网络模型逼近以及梯度优化方法。随后，郭雷等把系统建模、稳定性分析、鲁棒控制和状态估计的研究方法与非高斯 PDF 控制有机结合起来。经过十几年的努力，王宏和郭雷系统地建立了随机分布系统的建模、分析和控制理论体系[10-39]。

非高斯系统的随机分布控制问题依赖于无穷维分布参数系统，具体的研究涉及模型建立、控制器设计、系统分析和故障诊断等很多方面。针对每一个方面，不同类型的问题也有不同的解决方法，已经形成一定的理论研究体系，这也是最小方差控制等传统的高斯控制方法向非高斯系统的推广。目前以及将来的研究热点可以总结为如下几个方面。

(1) 随机分布系统的建模问题。利用系统辨识、图像处理、数据分析、神经网络 (NN)、模糊模型以及其他数学物理建模方法去简化建模过程。具体的研究工作包括：基于数据建立输入输出 PDF 特征描述方法；建立基于动静混合智能优化方法的两步分布系统模型；建立非线性、非高斯系统基于分布泛函优化的随机分布系统模型；建立高维约束空间下非线性输入输出 PDF 映射模型；提出基于统计信息集合的新型随机分布控制模型方法；建立多变量自回归移动平均模型等。

(2) 随机分布系统控制器设计及稳定性分析问题。结合非线性控制、自适应控制、学习控制和最优控制原理研究全局和局部的稳定性和跟踪收敛性。具体的研究工作包括：提出含有非线性、不确定动态的多维时滞权动态系统 PI/PID 随机结构控制算法，建立随机分布系统稳定性分析和渐近跟踪控制方法；提出满足超椭球、超平面状态约束的 PI/PID 跟踪控制方法，解决多变量随机系统的约束 PID 跟踪

分布控制问题；提出具有自学习能力的随机分布迭代学习控制算法，提高系统的自适应调节能力；提出具有多步预测性能优化指标的新型非线性随机分布跟踪控制方法等。

(3) 随机分布系统鲁棒控制问题。随机分布系统鲁棒控制是一类从实际工程(特别是工业间歇过程) 中产生的新颖的控制科学问题，控制对象复杂且外部环境多变，往往伴随着非高斯噪声，且存在数据建模所产生的模型不确定和建模误差，同时系统中还可能受到外部扰动、负载干扰、死区现象以及参数摄动等多源未知干扰的影响。具体的研究工作包括：结合分布系统研究包括广义 H_∞、H_2/H_∞、L_1、保性能、耗散等多种干扰抑制指标；提出多优化指标及多目标随机分布控制算法；提出满足 PDF 积分和正约束的复合抗干扰控制和滤波方法，解决多源干扰条件下的分布控制和干扰估计问题等。

(4) 滤波理论以及故障诊断理论。已有文献中关于随机估计及 FDD 的成果多局限于高斯系统，与随机分布控制问题相对应，非高斯系统基于随机分布的动态滤波和 FDD 问题也具有重要的实际意义和理论价值。具体的研究工作包括：提出基于输出 PDF 的估计与故障检测判据，拓展传统的依赖于量测值的估计与 FDD 理论体系；设计基于输出 PDF 的自学习估计与故障诊断滤波器设计准则，推广卡尔曼滤波理论以及传统的关于确定性系统的估计和 FDD 方法。

在实际应用方面，东北大学柴天佑院士研究团队已经建立了国际上首个随机分布选矿优化系统；中南大学桂卫华院士研究团队成功地将随机分布控制方法应用于电解铝过程中。美国 Honeywell 公司指出造纸过程中的随机分布分析方法是一种“groundbreaking”的质量控制和故障分析新技术；国际自动控制联合会(IFAC) 已将这一方向列为应用随机控制的新方向，两种国际学术刊物已经为此组织并同时出版了专辑。从很多实际成果中可以看出，随机分布控制当前还是一项很有挑战性的工作，令人鼓舞的是一些领域已经能够提供可靠技术在线获取所需的输出分布。随着测量技术的进一步发展，随机分布控制的工业应用前景将会更加突出。

1.2.1　非高斯随机分布系统的智能学习模型

假设 $\eta(t) \in [a,b]$ 为描述动态随机系统输出的一致有界随机变量，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为系统的控制输入向量，用于控制系统输出随机变量 $\eta(t)$ 的分布形状。进一步，随机变量 $\eta(t)$ 的分布形状可以用它的概率密度函数$\gamma(y,u(t))$ 来表述：

$$P\{a \leqslant \eta(t) < \xi, u(t)\} = \int_a^{\xi} \gamma(y,u(t))\mathrm{d}y \tag{1.1}$$

式中，$P\{a \leqslant \eta(t) < \xi, u(t)\}$ 表示系统在控制输入的作用下，输出随机变量 $\eta(t)$ 落在区间 $[a,\xi)$ 内的概率。

一般来讲，PDF 受控制作用的动态影响，其数学模型的分析通常采用偏微分方程理论。但是对于实际问题，PDF 又是一个具有积分约束的正非线性函数，很难得到其准确的函数表达形式，通常只能得到分布样本，因此需要用近似模型来描述 PDF。在开始这项研究工作时，利用 B 样条神经网络模型去逼近 PDF $\gamma(y,u(t))$ 成为建立数学模型的出发点[10,24]，将无穷维的分布函数控制问题转化为有限维系统的控制问题，方便进一步的研究。这种方法包括两个主要步骤：第一，利用 B 样条基函数建立可测的输出 PDF 和权系数之间的关系；第二，通过辨识建立控制输入和这些具有积分约束的动态权系数之间的动态模型。通常，考虑应用如下三种常用的 B 样条模型。

(1) 线性 B 样条模型[12,14,29]：

$$\gamma(y,u(t))=\sum_{i=1}^{n}B_i(y)w_i(u(t))+e_0,\quad y\in[a,b] \tag{1.2}$$

式中，$w_i(u(t))$ 是与控制输入 $u(t)$ 有关的权值；$B_i(y)$ 是预先选定的基函数；e_0 是逼近误差。线性 B 样条模型具有简单、直观的特点，但数值的鲁棒性较弱。当样条基函数个数较少时，由反馈控制所产生的权值有时会出现负值，无法得到正确的结果。

(2) 方根 B 样条模型[15,16,25,30-32]：为了克服线性 B 样条模型的缺点，引入方根 B 样条模型，中心思想是用线性 B 样条来逼近 PDF 的平方根。具体数学表示形式如下：

$$\sqrt{\gamma(y,u(t))}=\sum_{i=1}^{n}B_i(y)w_i(u(t))+e_0,\quad y\in[a,b] \tag{1.3}$$

(3) 有理 B 样条模型[21,28]：以上的线性 B 样条模型和方根 B 样条模型中，因为要考虑 PDF 在定义区间内积分为 1 的条件，必须对权值进行约束。对于采用 n 个基函数的函数逼近，实际上只能有 $n-1$ 个权值是相互独立的，这增加了模型表示的复杂性，这一类问题在设计方根 B 样条模型的控制器时尤为突出。具体的有理 B 样条模型设计如下：

$$\gamma(y,u(t))=\frac{\sum_{i=1}^{n}B_i(y)w_i(u(t))}{\sum_{i=1}^{n}b_iw_i(u(t))}+e_0,\quad y\in[a,b] \tag{1.4}$$

式中，$b_i=\int_a^b B_i(y)\mathrm{d}y>0$。这种表示形式自然满足了 PDF 在其定义域内积分等于 1 的条件。