兰州大学110周年校庆纪念文库

物理学核心课程习题精讲系列

数学物理方法学习指导

杨孔庆 黄 亮 赵 佩 /编著

科 学 出 版 社

兰州大学110周年校庆纪念文库
物理学核心课程习题精讲系列

数学物理方法学习指导

杨孔庆　黄　亮　赵　佩　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是杨孔庆编写的《数学物理方法》(高等教育出版社，2012 年出版)的配套教辅，对“数学物理方法”课程中的线性空间及线性算符、复变函数、积分变换与δ函数、数学物理方程、变分法初步这五大部分内容的每一章给出了内容提要，并且对杨孔庆编写的《数学物理方法》教材中的习题做了详细的解答.

本书作为“数学物理方法”课程的辅助学习教材，可作为物理学和应用物理学专业的教师和学生的参考书，以期提高该课程的教学质量及学生对该课程的知识点的理解和掌握，亦可供其他专业的教师和学生参考.

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方法学习指导/杨孔庆，黄亮，赵佩编著. —北京：科学出版社，2019.8

（兰州大学 110 周年校庆纪念文库）

ISBN 978-7-03-062193-1

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①杨…　②黄…③赵…　Ⅲ. ①数学物理方法-高等学校-教学参考资料　Ⅳ. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 181870 号

责任编辑：昌　盛　陈曰德　罗　吉 / 责任校对：杨聪敏

责任印制：张　伟 / 封面设计：黄华斌

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2019 年 8 月第　一　版　开本：720 × 1000　B5

2019 年 9 月第二次印刷　印张：27 1/2

字数：554 000

定价：69.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

萃英立根本，昆仑写精神. 2019 年 9 月 17 日，兰州大学将迎来 110 周年校庆. 百十年来，一代代兰大人与国家、民族同呼吸、共命运，屹立西部大地，蕴育时代精英，为世界、为祖国培养了一大批活跃在各行各业的优秀人才，有力地支持了国家特别是祖国西部地区的建设发展.

长期以来，兰州大学始终坚持正确办学方向，落实立德树人根本任务，立足地域特色，发挥科研优势，深度融入参与国家发展战略，主动对接服务地方经济社会发展，“将论文写在中国大地上”，赢得了国内外的广泛认可；熔铸成以“自强不息，独树一帜”为核心的兰大精神，形成了“勤奋，求实，创新”的良好学风，探索走出了一条在西部地区创办高水平大学的成功之路，为中国高校扎根祖国大地创办世界一流大学提供了重要借鉴.

值 110 周年校庆之际，我校策划组织出版《兰州大学 110 周年校庆纪念文库》，旨在展现奋战在教学科研一线的兰大人的家国情怀、理论思考和学术积累. 丛书作者中有致力于教书育人的教学名师，也有在科研一线硕果累累的科学大家，更有长期坚守在教学科研一线、受学生爱戴的“普通”教师. 丛书内容丰富，涵盖理、工、农、医、人文、社科等诸多学科，其中观点颇多见解. 恕我才识单调，难以一一点评. 在此，谨付梓以供学界参考指正.

新时代新起点，所有兰大人将汇聚成推动兰州大学事业蓬勃发展的强大合力. 面向未来，全体兰大人将继续坚守奋斗，以矢志不渝的信念、时不我待的精神、担当奉献的情怀投身中国特色世界一流大学建设，为实现中华民族伟大复兴贡献兰大力量！

是为序.

严纯华

中国科学院院士、兰州大学校长

2019 年 3 月 26 日

前　言

值此兰州大学建校 110 周年之际，兰州大学组织出版《兰州大学 110 周年校庆纪念文库》，本书荣幸获列于此文库中，作者以此向兰州大学建校 110 周年献礼.

兰州大学以重视本科基础教学著称，“数学物理方法”课程是物理专业及其相关专业的重要主干课，是后续专业课程的数学基石. 本书是作者之一杨孔庆编著的《数学物理方法》(高等教育出版社，2012 年出版)的配套教辅，可作为“数学物理方法”课程教师的参考图书，作者期望本书的出版能为提高该课程的教学质量并加深学生对该课程的数学物理知识点的理解和掌握做出一定的贡献.

本书与主教材对应，共有五篇二十二章. 第一篇是线性空间及线性算符(共三章)：主要介绍三维欧氏空间中的向量分析及希尔伯特空间中一些物理上常用的算符及其性质. 第二篇是复变函数(共五章)：介绍解析函数的性质及其复积分；复变函数的级数展开；留数定理及其在实积分中的应用. 第三篇是积分变换与δ函数(共四章)：介绍傅里叶变换和拉普拉斯变换以及它们的基本性质；δ函数及其基本性质；小波变换. 第四篇是数学物理方程(共八章)：介绍三类方程(波动方程、输运方程、泊松方程)的数学建模及其定解问题；施图姆-刘维尔本征值问题及三类方程在笛卡儿坐标系下的分离变量解法；三类方程在球坐标系和柱坐标系下的分离变量解法；二阶线性变系数常微分方程的级数解法；球函数和柱函数及它们的性质；三类方程的格林函数解法、行波解法、“冲量定理”解法和积分变换解法；非线性方程及其“齐次平衡法”解法简介. 第五篇是变分法初步(共两章)：介绍泛函变分的基本概念；变分原理——拉格朗日变分原理、哈密顿原理、诺德定理.

本书对应于杨孔庆编著的教材《数学物理方法》的每一章，分别给出内容提要和习题详解两个部分. 内容提要主要是简要地回顾教材中主要的知识点，方便读者们查找翻阅. 习题详解部分对教材的课后习题(除第十二章“小波变换初步”和第二十章“非线性数学物理方程初步”作为阅读材料没有习题，及有少部分涉及作图解答的习题外)给出了详细的参考解答，并且对部分习题给出了几种不同的解答方式，希望读者对这些题目有一个较为完整的数学图像，对得到的数学结果尽可能给出较合理的物理解释，从而进一步加深对课程内容的理解.

原教材中的题目部分来自于教材中所列的参考书目(在此不一一列举)，部分来自于作者对该课程中一些内容的思考. 其中有一些题目看似比较简单，实际上需要综合考虑多种因素并通过某些计算技巧才能解答出来. 对这些题目的选择主

要用于考察并锻炼学生对物理概念、物理图像的理解及培养正确的数学建模能力，以及课程学习过程中需要掌握的计算技巧的熟练运用. 同时在数学物理方程这一部分，虽然讲授的是经典波动方程，但在习题中给出了关于量子力学薛定谔方程的问题. 这时并不是要求学生对量子力学有深入的理解，而是单纯从数学物理方程的角度出发，介绍如何进行分离变量，如何求得本征模式和本征频率(能量)，让学生去把握不同物理问题中数学物理方程的共性，从而做到举一反三.

杨孔庆编著的《数学物理方法》已被多所高校作为教材使用，也有部分高校作为该课程的参考书，很多使用并关心该教材的老师们提出了宝贵意见和建议，其中的部分意见和建议已融入本书的内容，在此向各位老师表示衷心的感谢.

本书部分题目的解答得益于作者们在讲授“数学物理方法”课程中师生们的反馈和讨论，在此对兰州大学、西北大学、陕西师范大学的师生们表示感谢. 同时对使用本教材的西北师范大学、中国科学院大学、集美大学等学校的老师对习题解答的有益讨论和意见反馈表示感谢.

出版前期作者曾多次与科学出版社昌盛和陈曰德编辑沟通出版事宜，对他们的热情和细心工作表示感谢，感谢科学出版社的支持. 作者之一杨孔庆教授近几年在兰州大学萃英学院讲授“数学物理方法”课程，深感萃英学院学生的聪慧和勤奋好学，真正做到教学相长，在此表示感谢.

感谢萃英学院在本书出版经费上给予的资助.

衷心祝愿百年兰大，再创辉煌！

作　者
2019 年 4 月

目　录

第一篇　线性空间及线性算符

第二篇　复变函数

第三篇　积分变换与δ函数

第四篇　数学物理方程

第五篇　变分法初步

第一篇　线性空间及线性算符

第一章　$\mathbf{R}^3$空间的向量分析

内 容 提 要

一、$\mathbf{R}^3$ 中向量的代数运算

定义在$\mathbf{R}^3$空间中的向量的集合$\{\mathbf{0},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots\}$，定义了集合中元素的合成法则："加法""数乘""标量积"和"向量积"，构成了$\mathbf{R}^3$中向量的代数运算.

二、一个求和约定和两个运算符号

1. 爱因斯坦(Einstein)求和约定

在同一代数项中见到两个重复指标(只许两个重复指标，多于两个重复指标，此约定失效)就自动进行求和，如果特别指出该重复指标不求和，此约定失效. 例如

$$\boldsymbol{A}=A_i\boldsymbol{e}_i=\sum_{i=1}^{3}A_i\boldsymbol{e}_i$$

并称求和指标"i"为"哑标"，即可用其他字母代替此求和指标，例如

$$\boldsymbol{A}=A_i\boldsymbol{e}_i=A_j\boldsymbol{e}_j=A_k\boldsymbol{e}_k$$

2. 克罗内克(Kronecker)δ 符号：δ_{ij}

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

例如，$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}$.

3. 三阶单位全反对称张量(或称为三阶列维-齐维塔(Levi-Civita)符号)

$$\varepsilon_{ijk},\quad i,j,k=1,2,3$$

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1, & ijk=123,231,312,\cdots.\text{即相邻两指标经过偶次对换}\\ -1, & ijk=213,321,132,\cdots.\text{即相邻两指标经过奇次对换}\\ 0, & ijk\text{中有两个指标相同}\end{cases}$$

例如，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i A_j B_k$.

4. 一个常用的运算规则

由于 ε_{ijk} 是全反对称张量，有 $\varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{jik}$，即对于 i,j 指标是反对称的；而 $\delta_{ij}=\delta_{ji}$ 对于 i,j 指标是对称的，则有

$$\varepsilon_{ijk}\delta_{ij}=0$$

对于一般的两个量(张量)，一个有两个反对称指标，如 $A_{ij}=-A_{ji}$，而另一个有两个对称指标，如 $S_{ij}=S_{ji}$，对 i,j 指标求和，必定为零，即

$$A_{ij}S_{ij}=0$$

这个规则很容易证明，且在我们的运算中经常用到.

三、在直角坐标系下，$\mathbf{R}^3$ 中的向量分析的工具——哈密顿(Hamilton)算符

哈密顿算符 ∇ 作用在空间的几何客体上，表示几何客体在空间的变化率，它是不依赖于坐标系选择的微分算符. 在不同的坐标系中，哈密顿算符 ∇ 有不同的形式，如果它直接作用在标量函数上，则描述该函数沿坐标轴的变化率.

在直角坐标系下，哈密顿算符的形式为

$$\nabla=\boldsymbol{e}_i\partial_i=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

四、$\mathbf{R}^3$ 中的标量场和向量场

1. 标量场(标量函数)

定义在 $\mathbf{R}^3$ 中的函数(无方向性).

例如，$\varphi(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{r}\in\mathbf{R}^3$.

2. 向量场(向量函数)

定义在 $\mathbf{R}^3$ 中的有方向的向量函数.

例如，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=A_i(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_i=A_1(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_1+A_2(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_2+A_3(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{r}\in\mathbf{R}^3$，其中，$A_i(\boldsymbol{r})$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的标量函数.

五、标量场 $\varphi(\boldsymbol{r})$ 的梯度场

$$\nabla\varphi=\boldsymbol{e}_i\partial_i\varphi=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$$

其中，$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$是$\mathbf{R}^3$中的标量函数.

该梯度场是一个向量场. 对于$\mathbf{R}^3$中的一个确定的点，其对应的是一个确定的向量，就是标量场$\varphi(\boldsymbol{r})$在该点的梯度.

六、向量场$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$的散度场

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\partial_i A_i=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

其中，$\dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}$是$\mathbf{R}^3$中的标量函数.

该散度场是一个标量场. 对于$\mathbf{R}^3$中的一个确定的点，其对应的是一个确定的数值，就是向量场$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$在该点的散度，如果该点的散度不为零，就表示在该点有产生此散度场的点源(散度的值为正)或是此散度场的点汇(散度的值为负)，简称为“源”或“汇”. 数值的大小表示“源”或“汇”的大小.

七、向量场$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$的旋度场

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k=(\partial_2 A_3-\partial_3 A_2)\boldsymbol{e}_1+(\partial_3 A_1-\partial_1 A_3)\boldsymbol{e}_2+(\partial_1 A_2-\partial_2 A_1)\boldsymbol{e}_3$$

其中，$\partial_i A_j-\partial_j A_i$是$\mathbf{R}^3$中的标量函数.

该旋度场(也称为旋量场)是一个向量场. 对于$\mathbf{R}^3$中的一个确定的点，对应的一个确定的向量就是向量场$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$在该点的旋度. 如果此向量不为零，就表示该点有产生此旋量场的线源，此向量是线源在该点的切向量.

八、拉普拉斯(Laplace)算符∇^2

拉普拉斯算符的定义

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$$

直角坐标系下拉普拉斯算符的表达式

$$\begin{aligned}\nabla^2&=\nabla\cdot\nabla=(\boldsymbol{e}_i\partial_i)\cdot(\boldsymbol{e}_j\partial_j)=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j\partial_i\partial_j=\delta_{ij}\partial_i\partial_j=\partial_i\partial_i\\&=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\end{aligned}$$

九、两个重要的等式

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=0$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$$

这两个式子在任何坐标系中皆成立，它们是普遍的几何规律，也是描述很多物理规律的数学表达式.

第一个式子说明，对一个纯标量势场，其梯度场是个无旋场，即其梯度场的旋度为零；第二个式子说明，对一个纯旋量场，其散度场为零，即纯旋量场是个无散度的场.

例如，如果φ表示静电场的电势，$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$表示静电场，则$\nabla\times(\nabla\varphi)=0$说明静电场是无旋场，是保守场.

如果$\boldsymbol{A}$表示磁向量势，$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$是静磁场，则$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$表示静磁场不是点磁荷产生的，即不存在点磁荷(磁单极).

习 题 详 解

1.1 $\boldsymbol{C}$为$\mathbf{R}^3$空间的已知向量，若有向量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，且$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，求$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$向量.

解 由已知$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，两式相加可得$2\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{C}$，即$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$. 即可得$\boldsymbol{B}=0$，即$\boldsymbol{B}$为零向量.

1.2 $\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{D}$为$\mathbf{R}^3$空间的已知向量，若有向量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，且$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}$，求$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$向量.

如果在笛卡儿(Cartesian)坐标系中$\boldsymbol{C}=c_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{D}=d_i\boldsymbol{e}_i\ (i=1,2,3)$，请写出$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$向量的具体表达式.

解 由已知$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}$，两式相加可得$\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})$，两式相减可得$\boldsymbol{B}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D})$.

在笛卡儿坐标系下，设$\boldsymbol{A}=a_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{B}=b_i\boldsymbol{e}_i$，则有

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(c_i+d_i)\boldsymbol{e}_i，可得\ a_i=\frac{1}{2}(c_i+d_i)$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}(c_i-d_i)\boldsymbol{e}_i，可得\ b_i=\frac{1}{2}(c_i-d_i)$$

1.3 有向量$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$和$\boldsymbol{r}_3$如题1.3图所示，请证明余弦定理

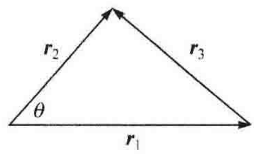
$$r_3^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta$$

其中，$|\boldsymbol{r}_1|=r_1$，$|\boldsymbol{r}_2|=r_2$.

证 由于$\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$，则有

$$r_3^2 = |\boldsymbol{r}_3|^2 = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\cdot(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$$
$$= \boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_1 - 2\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2\cos\theta$$

得证.



题 1.3 图

1.4　请用向量运算(不用坐标系)直接证明

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$$

请用笛卡儿坐标系再证明一遍上述结论.

证　在不考虑坐标系的情况下

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$$
$$= A^2 - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} - B^2$$
$$= A^2 - B^2$$

其中，$A = |\boldsymbol{A}|$，$B = |\boldsymbol{B}|$.

在笛卡儿坐标系中：设 $\boldsymbol{A} = a_i\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{B} = b_i\boldsymbol{e}_i$，有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = (a_i + b_i)\boldsymbol{e}_i\cdot(a_j - b_j)\boldsymbol{e}_j$$
$$= (a_i + b_i)(a_j - b_j)\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$$
$$= (a_i a_j - a_i b_j + b_i a_j - b_i b_j)\delta_{ij}$$
$$= a_i a_i - a_i b_i + b_i a_i - b_i b_i$$
$$= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$$

得证.

1.5　在 $\mathbf{R}^3$ 空间中，在空间转动 $\boldsymbol{A}$ 的变换下(即直角坐标系的转动变换)，向量 $\boldsymbol{X}$ 变为 $\boldsymbol{X}'$，有

$$\boldsymbol{X}' = A\boldsymbol{X}$$

且满足 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置，$\boldsymbol{I}$ 为单位阵，请证明：两个向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的标量积 $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}$ 在此转动变换下为不变量.

证　设 $\boldsymbol{X} = x_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{X}' = A\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y} = y_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{Y}' = A\boldsymbol{Y}$，有

$$\boldsymbol{X}'\cdot\boldsymbol{Y}' = (A\boldsymbol{X})\cdot(A\boldsymbol{Y}) = (A\boldsymbol{X})_i(A\boldsymbol{Y})_i = (A_{ij}x_j)^{\mathrm{T}}(A_{ik}y_k)$$
$$= x_j A_{ji} A_{ik} y_k = x_j\left(A^{\mathrm{T}}A\right)_{jk} y_k = x_j\delta_{jk}y_k = x_j y_j = \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}$$

故 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的内积在空间转动 $\boldsymbol{A}$ 的变换下为不变量.

1.6　请证明：在 $\mathbf{R}^3$ 空间中向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2 - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2$$