

国家新闻出版改革发展项目库入库项目
普通高等学校少数民族预科教材

GAODENG SHUXUE
XITI QUANJIE

高等数学习题全解

主 编 王学严

副主编 梅 婷 张 虎 陈 曦



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

国家新闻出版改革发展项目库入库项目
普通高等学校少数民族预科教材

高等数学学习题全解

主 编 王学严

副主编 梅 婷 张 虎 陈 曦



北京邮电大学出版社
[www. buptpress. com](http://www.buptpress.com)

内 容 简 介

本书内容包括“函数、极限与连续”“导数与微分”“微分中值定理及导数的应用”“不定积分”“定积分及其应用”5个章节。

本书通过将题型分类成“基础题”和“进阶题”，适合于学生掌握基础知识及拓展思维能力的不同目标；通过为每一道习题提供详细解答过程以及部分题目一题多解，为使用者带来更为充分的参考体验和价值。

本书覆盖了普通高等学校少数民族预科会考(质量监测)(2015—2017年)的全部考查知识点，同时也是普通高等学校高等数学一元函数微积分学的主体内容。既适用于高等学校少数民族预科院校的教师、学生，也可以作为普通高等学校学生学习高等数学课程的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解 / 王学严主编. -- 北京 : 北京邮电大学出版社, 2019. 6

ISBN 978-7-5635-5739-4

I. ①高… II. ①王… III. ①高等数学—高等学校—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 098873 号

书 名：高等数学习题全解

主 编：王学严

责任编辑：满志文

出版发行：北京邮电大学出版社

社 址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)

发 行 部：电话：010-62282185 传真：010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销：各地新华书店

印 刷：北京玺诚印务有限公司

开 本：787 mm×1 092 mm 1/16

印 张：14.5

字 数：368 千字

版 次：2019 年 6 月第 1 版 2019 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5739-4

定 价：39.00 元

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

前 言

少数民族预科教育是我国高等教育的特殊层次,起着“承上启下”的作用,即在预科教育过程中,一方面要对原有的中学知识进行巩固提高,称为“补”的部分;另一方面也要对大学课程进行一定程度的学习,培养大学学习的方法、习惯并打下知识基础,称为“预”的部分。“预补结合”是当前预科教育工作者对预科教育模式的普遍认同。预科阶段的教育教学质量直接关乎预科生升入大学阶段的学习效果,因此,做好预科教育至关重要,预科教材的优化和提高是做好预科教育的关键环节之一。

随着我国教育事业不断发展和新时期教育目标的制定,对预科教育教学质量也提出了更高的要求。2015年教育部民族教育司组织预科院校教师制定了包括“高等数学”在内的4门主要课程预科教学大纲,并从2015年起,开始实施少数民族预科会考(质量监测),对预科教学起到了重要的方向性指引以及教学质量监控。

北京邮电大学民族教育学院自2004年首次开始招生培养预科生至今,已走过了十余年的历程,在这十余年的预科生培养过程中,为了把预科教育办好,完成党和国家交给的历史任务,学校、学院教职员倾注了巨大的心血。在此过程中,我院教师不断改革和创新预科生培养模式,积累了丰富的教学经验,对预科生的前期基础以及预科阶段应该达到的教育目标具有深刻的认识,为教材编写提供了重要的经验基础。

本书作为高等数学教材的辅助资料,紧密围绕预科学生的特点和高等数学课程对学生知识、能力的要求,在当前为数不多的预科教材中,具有鲜明的自身特点。其特点在于:(1)每章的第一部分是分文、理科的教学目标,以及考核要求,本部分内容采用的是教育部民族教育司2015年组织制定并沿用至今的教学大纲和会考(质量监测)大纲,让教师的教学和学生的学习有的放矢;(2)本书每个小节的题目均划分了“基础题”和“进阶题”两部分,“基础题”侧重于高等数学学习的基本要求,“进阶题”便于学有余力的同学进一步提高对高等数学的学习水平,解决高等数学教学过程中常常出现的“吃不了”和“吃不饱”的现象;(3)本书力争使学生深刻理解高等数学的相关知识,每一道小题都有详细的分析和解答;(4)为了培养学生多方面的思维能力和对知识的全面掌握,部分题目给出了一题多解;(5)为了让学生对知识点的领会更深刻,部分题目提供了易错点分析、解题说明等。

参与本书编写的骨干力量为北京邮电大学民族教育学院的一线教师,他们是王学严、梅婷、张虎、陈曦、刘学和樊玲等老师,作者们将自己多年高等数学的一线教学经验和体会很好地融入了本书的编写内容之中。编写组老师还作为骨干教师代表参与了高等数学教学大纲的制

定和高等数学会考(质量监测)的命题工作,为本书的编写起到了高屋建瓴的作用。同时,来自北京邮电大学的田建改博士、袁航博士,以及来自民族教育学院目标院校——对外经济贸易大学的零芳同学也为教材的编写提供了重要帮助。

由于时间有限,编写仓促,书中难免存在问题及不足之处,敬请广大师生批评指正并给予谅解。

编 者

目 录

第 1 章 函数、极限与连续	1
教学目标和考核要求	1
1.1 函数	5
1.2 数列的极限	8
1.3 函数的极限	10
1.4 无穷小和无穷大	12
1.5 函数的连续性与间断点	14
1.6 连续函数的运算和初等函数的连续性	15
1.7 闭区间上连续函数的性质	16
第 1 章 测试题	17
第 1 章 习题详解	20
第 2 章 导数与微分	41
教学目标和考核要求	41
2.1 导数的概念	43
2.2 函数的求导法则和求导公式	45
2.3 隐函数和由参数方程确定的函数的求导方法	47
2.4 高阶导数	48
2.5 函数的微分	49
第 2 章 测试题	51
第 2 章 习题详解	55
第 3 章 微分中值定理及导数应用	82
教学目标和考核要求	82
3.1 微分中值定理	84
3.2 洛必达法则	86
3.3 函数的单调性与曲线的凹凸性	88
3.4 函数的极值与最值	90
3.5 函数图形的描绘	92
第 3 章 测试题	93
第 3 章 习题详解	95

第 4 章 不定积分	122
教学目标和考核要求.....	122
4.1 不定积分的概念和性质	123
4.2 换元积分	125
4.3 分部积分法	127
4.4 有理函数的不定积分	129
4.5 不定积分的应用——微分方程初步	129
第 4 章 测试题.....	130
第 4 章 习题详解.....	133
第 5 章 定积分及其应用	158
教学目标和考核要求.....	158
5.1 定积分的概念	160
5.2 定积分的性质	162
5.3 微积分基本定理	163
5.4 定积分的计算	166
5.5 广义积分	168
5.6 定积分的应用	169
第 5 章 测试题.....	170
第 5 章 习题详解.....	174
2015 年预科高数理科会考(质量监测)试题及答案	204
2015 年预科高数文科会考(质量监测)试题及答案	208
2016 年预科高数理科会考(质量监测)试题及答案	212
2016 年预科高数文科会考(质量监测)试题及答案	219

第1章 函数、极限与连续

教学目标和考核要求

【理科·教学内容及目标】

一、教学内容

1. 映射与函数

- (1) 集合与映射。
- (2) 函数的概念。
- (3) 基本初等函数: 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数。
- (4) 反函数、复合函数、初等函数。
- (5) 用极坐标、参数方程表示的函数。

注: 一元微积分涉及的相关预备知识由各学校在教学中予以补充, 如二项式定理、绝对值不等式等。

2. 极限

- (1) 数列的极限: 数列极限的定义和性质。
- (2) 数列极限存在的两个准则。
- (3) 函数的极限: 函数极限的定义, 左极限与右极限的定义, $x \rightarrow x_0$ 时函数极限存在的充分必要条件, 利用极限概念分析函数的变化趋势, 极限的四则运算法则。
- (4) 两个重要极限。
- (5) 无穷小量和无穷大量。
- (6) 无穷小量阶的比较。

3. 连续

- (1) 函数连续的定义, 左连续与右连续。
- (2) 函数的间断点及其分类。
- (3) 连续函数的运算, 反函数和复合函数的连续性与初等函数的连续性。
- (4) 闭区间上连续函数的性质: 最大值与最小值定理、有界性定理、介值定理(包括零点定理)。

二、教学目标

1. 映射与函数

- (1) 理解集合、映射、函数的概念, 会求函数的定义域和值域, 掌握函数的复合运算, 会求一些简单函数的反函数。

(2)掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念、性质和图像。

(3)掌握三角函数(正弦、余弦、正切、余切、正割、余割)的概念、性质和图像;掌握三角函数的常用变换公式。

(4)掌握反三角函数(反正弦、反余弦、反正切、反余切)的概念、性质和图像。

(5)理解初等函数的概念。

(6)了解函数的极坐标和参数方程的表示。

2. 极限

(1)理解极限概念(用“ $\epsilon - N$ ”“ $\epsilon - X$ ”和“ $\epsilon - \delta$ ”语言证明极限不做要求)和性质。

(2)掌握左、右极限的求法;掌握极限存在与左、右极限存在的关系。

(3)了解单调有界数列必收敛准则;会用夹逼准则求简单极限。

(4)掌握极限四则运算法则;理解复合函数的极限运算。

(5)掌握用两个重要极限求极限的方法。

(6)理解无穷小量、无穷大量的概念及性质;掌握无穷小量阶的比较。

(7)掌握利用“有界函数和无穷小的积仍是无穷小”求极限的方法。

(8)掌握用等价无穷小替换求极限的方法。

(9)掌握分段函数在分段点处极限存在性的讨论方法。

3. 连续

(1)理解增量的概念。

(2)理解函数连续性的概念;掌握连续性与左、右连续的关系;理解函数连续性与极限之间的关系。

(3)理解函数间断点的概念;掌握求函数间断点的方法并判断其类型。

(4)理解反函数和复合函数的连续性。

(5)理解初等函数在其定义区间连续的有关结论。

(6)掌握利用函数连续性求极限的方法(包括函数运算与极限运算的换序、函数在连续点的极限等)。

(7)掌握分段函数在分段点处连续性的讨论方法。

(8)理解在闭区间上连续函数的性质;掌握用零点定理判断方程根的存在性。



【理科·考核内容及要求】

一、考核内容

数列极限、函数极限、极限的运算法则、两个重要极限、无穷小的概念与阶的比较、函数的连续性和间断点、闭区间上连续函数的性质。

二、考核要求

(1)理解极限概念(用“ $\epsilon - N$ ”“ $\epsilon - X$ ”和“ $\epsilon - \delta$ ”语言证明极限不做要求)和性质。

(2)掌握左、右极限的求法,掌握极限存在与左、右极限存在的关系。

(3)会用夹逼准则求简单极限。

(4)掌握极限四则运算法则,理解复合函数的极限运算。

- (5)掌握用两个重要极限求极限的方法。
- (6)理解无穷小量、无穷大量的概念及性质,掌握无穷小量阶的比较。
- (7)掌握利用“有界函数和无穷小的积仍是无穷小”求极限的方法。
- (8)掌握用等价无穷小替换求极限的方法。
- (9)掌握分段函数在分段点处极限存在性的讨论方法。
- (10)理解增量的概念。
- (11)理解函数连续性的概念,掌握连续性与左、右连续的关系,理解函数连续性与极限之间的关系。
- (12)理解函数间断点的概念,掌握求函数间断点的方法并判断其类型。
- (13)理解反函数和复合函数的连续性。
- (14)理解初等函数在其定义区间连续的有关结论。
- (15)掌握利用函数连续性求极限的方法(包括函数运算与极限运算的换序、函数在连续点的极限等)。
- (16)掌握分段函数在分段点处连续性的讨论方法。
- (17)理解在闭区间上连续函数的性质(最大值最小值定理、有界性定理、介值定理、零点定理);掌握用零点定理判断方程根的存在性。

【文科·教学内容及目标】

一、教学内容

1. 函数

- (1)集合。
- (2)函数的概念。
- (3)基本初等函数:幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数。
- (4)反函数、复合函数、初等函数。

注:一元微积分涉及的相关预备知识由各学校在教学中自行予以补充,如二项式定理、绝对值不等式等。

2. 极限

- (1)数列的极限:数列极限的定义和性质。
- (2)数列极限存在的两个准则。
- (3)函数的极限:函数极限的定义,左极限与右极限的定义, $x \rightarrow x_0$ 时函数极限存在的充分必要条件,利用极限概念分析函数的变化趋势,极限的四则运算法则。
- (4)两个重要极限。
- (5)无穷小量和无穷大量。
- (6)无穷小量阶的比较。

3. 连续

- (1)函数连续的定义,左连续与右连续。
- (2)函数的间断点及其分类。
- (3)连续函数的运算,复合函数的连续性与初等函数的连续性。

(4)闭区间上连续函数的性质:最大值与最小值定理、有界性定理、介值定理(包括零点定理)。

二、教学目标

1. 函数

(1)理解函数的概念,会求函数的定义域和值域,掌握函数的复合运算,会求一些简单函数的反函数。

(2)掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念、性质和图像。

(3)掌握三角函数(正弦、余弦、正切、余切、正割、余割)的概念、性质和图像,掌握三角函数的常用变换公式。

(4)掌握反三角函数(反正弦、反余弦、反正切、反余切)的概念、性质和图像。

(5)理解初等函数的概念。

2. 极限

(1)理解极限概念(用“ $\epsilon-N$ ”“ $\epsilon-X$ ”和“ $\epsilon-\delta$ ”语言证明极限不做要求)和性质。

(2)会求函数的左、右极限,掌握极限存在与左、右极限存在的关系。

(3)了解极限存在的两个准则(夹逼准则和单调有界数列必收敛准则)。

(4)掌握极限四则运算法则,理解复合函数的极限运算。

(5)掌握用两个重要极限求极限的方法。

(6)理解无穷小量、无穷大量的概念及性质,掌握无穷小量阶的比较。

(7)掌握利用“有界函数和无穷小的积仍是无穷小”求极限的方法。

(8)掌握用等价无穷小替换求极限的方法。

3. 连续

(1)理解增量的概念。

(2)理解函数连续性的概念,理解函数连续与左、右连续的关系,理解函数连续性与极限之间的关系。

(3)了解函数间断点的概念。

(4)了解反函数和复合函数的连续性。

(5)理解初等函数在其定义区间连续的相关结论。

(6)会用函数连续性求极限(包括函数运算与极限运算的换序、函数在连续点的极限等)。

(7)理解在闭区间上连续函数的性质;会用零点定理判断方程根的存在性。

【文科·考核内容及要求】

一、考核内容

数列极限、函数极限、极限的运算法则、两个重要极限、无穷小的概念与阶的比较、函数的连续性和间断点。

二、考核要求

- (1)理解极限概念(用“ $\epsilon - N$ ”“ $\epsilon - X$ ”和“ $\epsilon - \delta$ ”语言证明极限不做要求)和性质。
- (2)会求左、右极限,掌握极限存在与左、右极限存在的关系。
- (3)掌握极限四则运算法则,理解复合函数的极限运算。
- (4)掌握用两个重要极限求极限的方法。
- (5)理解无穷小量、无穷大量的概念及性质,掌握无穷小量阶的比较。
- (6)掌握利用“有界函数和无穷小的积仍是无穷小”求极限的方法。
- (7)掌握用等价无穷小替换求极限的方法。
- (8)掌握分段函数在分段点处极限存在性的讨论方法。
- (9)理解增量的概念。
- (10)理解函数连续性的概念,理解函数连续与左、右连续的关系,理解函数连续性与极限之间的关系,掌握分段函数在分段点处连续性的讨论方法。
- (11)会求函数间断点。
- (12)理解初等函数在其定义区间连续的相关结论。
- (13)会用函数连续性求极限(包括函数运算与极限运算的换序、函数在连续点的极限等)。
- (14)会用零点定理判断方程根的存在性。

1.1 函 数

【基础题】

一、选择题

1. 下列函数中,()不是基本初等函数。

A. $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$	B. $y = \ln x^2$	C. $y = \tan x$	D. $y = \sqrt[3]{x^5}$
-------------------------------------	------------------	-----------------	------------------------
2. 函数 $f(x) = \frac{1}{\lg|x-5|}$ 的定义域是()。

A. $(-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$	B. $(-\infty, 6) \cup (6, +\infty)$
C. $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$	D. $(-\infty, 4) \cup (4, 5) \cup (5, 6) \cup (6, +\infty)$
3. 函数 $y = 10^{x-1} - 2$ 的反函数是()。

A. $y = \frac{1}{2} \lg \frac{x}{x-2}$	B. $y = \log_x 2$
C. $y = \log_2 \frac{1}{x}$	D. $y = 1 + \lg(x+2)$
4. 函数 $y = \cos^2(3x+1)$ 的复合过程为()。

A. $y = \cos^2 u, u = 3x+1$	B. $y = u^2, u = \cos(3x+1)$
C. $y = u^2, u = \cos v, v = 3x+1$	D. $y = (\cos u)^2, u = 3x+1$
5. 如果函数 $f(x) = x^2 + 2(a-1)x + 2$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上是减少的,那么实数 a 的取值范围是()。

A. $a \leq -3$	B. $a \geq -3$	C. $a \leq 5$	D. $a \geq 5$
----------------	----------------	---------------	---------------

6. 在下列四个式子中,有意义的为()。

- A. $\arcsin\sqrt{2}$ B. $\arcsin\frac{\pi}{4}$ C. $\sin(\arcsin 2)$ D. $\arcsin(\sin 2)$

7. 以下三角函数的平方关系中,不正确的是()。

- A. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ B. $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$
 C. $\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$ D. $\sec^2\alpha + \csc^2\alpha = 1$

8. 过点(1,0)且与直线 $x-2y-2=0$ 平行的直线方程是()。

- A. $x-2y-1=0$ B. $x-2y+1=0$
 C. $2x+y-2=0$ D. $x+2y-1=0$

9. 圆 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ 的圆心坐标和半径分别是()。

- A. (3, -2), $r=16$ B. (3, -2), $r=4$
 C. (-3, 2), $r=16$ D. (-3, 2), $r=4$

10. 圆 $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 的面积为()。

- A. 3π B. 6π C. 9π D. 12π

二、填空题

1. $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\alpha\right) =$ _____。

2. 若 $\sin(\arccos x) = \frac{1}{2}$, 则 $x =$ _____。

3. 求下列反正弦函数值

(1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} =$ _____。 (2) $\arcsin 0 =$ _____。

(3) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) =$ _____。 (4) $\arcsin 1 =$ _____。

4. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____。

5. 函数 $y = 2\arcsin(5-2x)$ 的定义域是 _____, 值域是 _____。

三、计算题

1. 求下列函数的反函数及其定义域。

(1) $y = \frac{1-x}{1+x}$; (2) $y = \ln(x+2) + 1$;

(3) $y = 3^{2x+5}$; (4) $y = 1 + \cos^3 x, x \in [0, \pi]$ 。

2. 用反三角函数值的形式表示下列各式中的 x 。

(1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{5}$, 求 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时的 x 。

(2) 求 $\tan x = -\frac{1}{4}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

3. 已知角 α 的终边经过点 $P(2, -3)$, 求 α 的六个函数制值。

四、证明题

设下面所考虑的函数都是定义在对称区间 $(-1, 1)$ 上的, 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2)两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

进阶题

一、选择题

1. 下列各函数中是相同的函数有()。

A. $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$ B. $f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$

C. $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x - \tan^2 x$ D. $f(x)=\frac{x^3}{x}, g(x)=x^2$

2. 已知 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加函数, 则函数 $g(x)=2^{-f(x)}$ 是()。

A. 单减函数 B. 单增函数 C. 非单调函数 D. 不能确定

二、填空题

1. 若 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+3$, 则 $f(x)=$ _____。

2. 设 $f(x)=\ln x$, 且函数 $\phi(x)$ 的反函数 $\phi^{-1}(x)=\frac{2(x+1)}{x-1}$, 则 $f[\phi(x)]=$ _____。

3. 已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}, \theta \in (0, \pi)$, 则 $\cot \theta =$ _____。

三、计算题

1. 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \tan(\pi - \beta) = \frac{1}{2}$, 求 $\tan(\alpha - 2\beta)$ 的值。

2. 已知 $-\frac{\pi}{2} < x < 0, \sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ 。

(1) 求 $\sin x - \cos x$ 的值;

(2) 求 $\frac{3 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\tan x + \cot x}$ 的值。

3. 用反正弦函数值的形式表示下列各式中的 x 。

(1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{5}$, 求 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时的 x 。

(2) 求 $\sin x = -\frac{1}{4}$, 求 $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ 时的 x 。

4. 已知 $\arcsin x \geq \arcsin(1-x)$, 求 x 的取值范围。

5. 求下列各式的值:

(1) $\sin\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]$;

(2) $\tan\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{6}\right]$;

(3) $\cos^2\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5}\right)$;

(4) $\sin\left(\arctan \frac{12}{5} - \arcsin \frac{3}{5}\right)$ 。

二、填空题

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nr^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n} =$ _____。

三、计算题

求下列数列的极限：

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 1}{4n^3 + 2n + 3}$;

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2n}{n^2}$;

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$ 。

进阶题

一、选择题

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = (\quad)$ 。

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} = \infty$

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{1}{2}$

D. 极限不存在

2. 设 $x_n = \frac{n}{2} [1 + (-1)^n]$, 则()。

A. $\{x_n\}$ 有界

B. $\{x_n\}$ 无界

C. $\{x_n\}$ 单调增加

D. $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 为无穷大

3. $\lim_{n \rightarrow 1} \sqrt{e^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{2}{n}} \cdot \cdots \cdot e^{\frac{n-1}{n}} \cdot e} = (\quad)$ 。

A. 1

B. \sqrt{e}

C. e

D. 0

二、填空题

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5}{5n + 3} \sin \frac{2}{n} =$ _____。

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} =$ _____。

3. 设 $a > b > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}} =$ _____。

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n) (|q| < 1) =$ _____。

三、计算题

求下列数列的极限：

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}$;

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right)^n$ 。

四、证明题

证明下列数列极限存在并求其值: $x_1 = \sqrt{2}, \dots, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, n=1, 2, \dots$

1.3 函数的极限

基础题

一、选择题

- 若函数 $f(x)$ 在某点 x_0 极限存在, 则()。
 - $f(x)$ 在 x_0 的函数值必存在且等于极限值
 - $f(x)$ 在 x_0 的函数值必存在, 但不一定等于极限值
 - $f(x)$ 在 x_0 的函数值可以不存在
 - 如果 $f(x)$ 存在则必等于函数值
- 若 $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$, 则下列正确的是()。

A. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$	B. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{ f(x) } = \sqrt{ A }$
C. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -A$	D. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$
- 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 的值是()。

A. $+\infty$	B. 0	C. $-\infty$	D. 不存在
--------------	------	--------------	--------
- 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义是其在 x_0 处极限存在的()。

A. 充分非必要条件	B. 必要非充分条件
C. 充要条件	D. 无关条件
- 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x \sin \frac{1}{x} + a & (x > 0) \end{cases}$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 则 $a =$ ()。

A. -1	B. 0	C. 1	D. 2
-------	------	------	------
- 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则()。
 - 当 $g(x)$ 为任意函数时, 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立
 - 仅当 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ 时, 才有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立
 - 当 $g(x)$ 为有界时, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立
 - 仅当 $g(x)$ 为常数时, 才能使 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$ 成立
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} =$ ()。

A. -1	B. 1	C. 0	D. 不存在
-------	------	------	--------

二、填空题

- 如果 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin mx}{2x} = \frac{2}{3}$, 则 $m =$ _____。