- 北京市海淀区学校信息中心策划
- 陶伯英等高考命题研究专家审订
- 教育图书专家希扬担任本书顾问
- 根据教育部新课程标准教材编写

21世纪名师导考系列丛书

名师解读 高考命题走势

gaokaomingtizoushi

数学

本册主编：宋质彬

本册审订：储瑞年

内蒙古人民出版社

名师解读

高考命题走势

数学

本册主编　宋质彬
审　　定　储瑞年

内蒙古人民出版社

责任编辑：咏　梅

图书在版编目(CIP)数据

名师解读高考命题走势．数学/宋质彬编，一呼和浩特　内蒙古人民出版社，2003.5

ISBN7—204—06835—1

Ⅰ名…Ⅱ宋…Ⅲ数学课—高中—升学参考资料Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 039166 号

名师解读高考命题走势·数学

宋质彬　主编

内蒙古人民出版社发行

(呼和浩特市新城西街 20 号)

天津市宝文印务有限公司印刷

开本 880×1230　1/16　印张 78.5 印张　字数 128 千

2003 年 5 月第 1 版　2003 年 5 月第 1 次印刷

印数：1—10000 套

ISBN7—204—06835—1/G·1582

全套 5 册定价：96.00 元(本册单价：20.00 元)

《名师解读高考命题走势》丛书

编委会、顾问名单

卷头语

2004年,全国将有25个省市进入新课程版教材高考模式。

高考命题的新趋势是什么?

新课程版教材怎样考?

用什么思路指导高考备考?

如何打造高考复习的新理念?

对于这些牵动着千万考生心的热点问题,《名师解读高考命题走势》一书的策划者、编写者、审定者一定会给你完满的答复与解决。

由北京市海淀区学校信息中心策划;

由海淀、启东等高考状元校上百名特高级教师执笔撰写;

由陶伯英、曹居东、李敬德等高考命题人审定;

由教育图书专家、《三点一测》主编希扬担任顾问。

这些在教育界、出版界重如九鼎的人编的书,必定是:

一部含金量高的书;

一部信息量大的书;

一部导向正确的书;

一部对2004年高考复习将有决定影响的书。

这套丛书,对"备战"高考的莘莘学子,无疑将是达到理想境地的津梁!

编者

目　录

第一部分　数学基础知识及强化训练

第二部分　数学思想方法及数学解题方法

第一部分　数学基础知识及强化训练

考点1　集合与映射

命题趋势走向

集合知识是高等数学的重要基础知识，集合语言是重要的数学语言.作为工具，集合渗透于中学数学的各个方面，函数、方程、不等式、排列组合、曲线及动点轨迹等主干知识更常与集合知识网络交汇，提高学生对数学本质的认识和数学语言的阅读、理解能力.

集合是高考每年必考的知识点之一，主要考查集合的概念，交、并、补运算及有关术语、符号，数轴与韦恩图.

题型多为选择题、填空题中的容易题，且多在第1题位置，但以集合语言为工具的中等难度的选择题、填空题可能出现，也可能出现中等难度的解答题.

映射是深入认识函数概念的基础，是沟通两个集合中元素之间关系的桥梁，是近代数学的重要概念之一，但抽象性强，中学不宜深入研究，考纲要求为"了解"层次.近年已经两次在容易题中考查，再加大难度的可能性不大.

名师点拨解疑

【例题1】设集合 $M=\left\{x \middle| x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x \middle| x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.则

A. $M=N$　　B. $M\subset N$

C. $M\supset N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

（2002年全国高考题）

分析：本小题考查集合的概念及整数的性质.

解法1：$\because x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2k+1}{4}(k\in\mathbf{Z})$

$\therefore M=\left\{\cdots,-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4},\frac{9}{4},\cdots\cdots\right\}$.

$\because x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}=\frac{k+2}{4}(k\in\mathbf{z})$，

$\mathrm{N}=\left\{\cdots,-\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1,\cdots\right\}$.

$\therefore \mathrm{M}\subset\mathrm{N}$　　选B.

解法2：将集合 $\mathrm{M}=\left\{x \mid x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

$N=\left\{x \mid x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

转换为集合 $M'=\{y\mid y=4x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，

$N'=\{y\mid y=4x=k+2,k\in\mathbf{Z}\}$.

显然 $M'\subset N'$，$\therefore M\subset N$.$\therefore$ 选B.

解法3：将集合 $M=\left\{x\mid x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，

$N=\left\{x\mid x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

转换为集合 $M'=\left\{y\mid y=\pi k=\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，

$N'=\left\{y\mid y=4x=\frac{\pi k}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

由三角互数的知识易知 $M'\subset N'$，$\therefore M\subset N$，$\therefore$ 选B.

【点拨解疑】 ① 本小题加大了对集合语言的考查力度，因而难度稍有增加，位置后推至第5小题，反映出高考对集合知识考查的新动向，不能总认为集合试题只考第1小题的送分题.

② 本题直接解法应从分式结构出发，运用整数奇偶性求解，但由选择题的特殊结构，用特殊值法.如取 $k=1,2,3,4\cdots$，即可简捷获解，简解就是好解，时间就是分数，是解数学高考选择题的基本原则.切记.

③ 利用集合的性质，将题目中的已知集合等价转换为熟悉的，简单的集合后，再行判断，也是一种优秀的解题策略.

【例题2】 若集合 $S=\{y|y=3^x,x\in\mathbf{R}\}$，$T=\{y|y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $S\cap T$ 是(　　).

A. S　　B. T　　C. $\varnothing$　　D. 有限集

（2000年上海高考题）

分析：本小题考查集合的概念和函数值域的知识.

解：集合 S 是函数 $y=3^x$ 的值域，$S=\{y|y>0\}$.同理集合 $T=\{y|y\geqslant-1\}$，所以 $S\cap T=\{y|y>0\}=S$.

【点拨解疑】 这是以集合语言为载体，考查主干知识（函数值域）的范例，解题关键是准确理解集合运算与函数值域.

【例题3】 已知集合 $A=\{x|-2k+6<x<k^2-3\}$，$B=\{x|-k<x<k\}$，若 $A\subset B$，求实数 k 的取值范围.

分析：注意 $\varnothing$ 是任何集合的真子集.

解：由 $A\subset B$，知 $B\neq\varnothing$，即 $-k<k\Rightarrow k>0$.

（Ⅰ）若 $A=\varnothing$，即 $-2k+6\geqslant k^2-3\Rightarrow k^2+2k-9\leqslant0\Rightarrow -1-\sqrt{10}\leqslant k\leqslant-1+\sqrt{10}$，要使 $A\subset B$ 须 $0<k\leqslant-1+\sqrt{10}$

（Ⅱ）若 $A\neq\varnothing$，要使 $A\subset B$，

$$\begin{cases}-k<k,\\-k\leqslant-2k+6,\\k^2-3\leqslant k,\\-2k+6<k^2-3.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k>0,\\k\leqslant6,\\\frac{1-\sqrt{13}}{2}\leqslant k\leqslant\frac{1+\sqrt{13}}{2},\\k<-1-\sqrt{10}\text{或}k>-1+\sqrt{10}.\end{cases}$$

解得 $-1+\sqrt{10}<k\leqslant\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

由（Ⅰ）、（Ⅱ）知所求 k 的取值范围是 $(0,\frac{1+\sqrt{13}}{2}]$.

【点拨解疑】 含参数的集合问题,常根据集合元素的性质来解.注意把集合的运算关系转译为包含关系,例如 $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$, $A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$,数形结合思想常能简化计算,本例可利用数轴直观求解.

【例题4】 设集合 $M=\{-1,0,1\}$, $N=\{2,3,4,5,6\}$.映射 $f:M\to N$,使对任意的 $x\in M$,都有 $x+f(x)+xf(x)$ 是奇数,这样的映射 f 的个数是多少?

分析:由映射定义依次考虑 M 中每一个元素根据映射 f 对应 N 中的唯一元素的所有情形,有序不乱是关键.

略解:(1) 当 x 为奇数时,若 $f(x)$ 为奇数,则 $x+f(x)+x\cdot f(x)$ 为奇数,若 x 取 -1, $f(x)$ 则可取 3 或 5,共有映射 f 2 个;若 $f(x)$ 为偶数,则 $x+f(x)+xf(x)$ 为奇数,x 仍取 -1,而 $f(x)$ 取 2 或 4 或 6,又有不同的映射 f 3 个.所以 M 中元素 -1 有 5 个映射.同理 M 中元素 1 也有 5 个映射.(2) 当 x 为偶数时,若 $f(x)$ 为奇数,则 $x+f(x)+xf(x)$ 为奇数,M 中取 0, $f(x)$ 则可取 3 或 5,有 2 个映射;若 $f(x)$ 为偶数,则 $x+f(x)+xf(x)$ 为偶数,不合题意.分三步完成,由分步计数原理,共有映射 $5\times5\times2=50$.

【点拨解疑】 当情境新颖,读不懂题意,找不到解题的突破口时,深入挖掘题目的隐含条件,如本题中 $-1,1,3,5$ 为奇数,0,2,4,6 为偶数,透彻理解已知条件 $x+f(x)+xf(x)$ 可能为奇+奇+奇×奇等情形,从而转化为数论知识是解信息迁移题的重要策略.

【例题5】 已知集合 $A=\left\{y\left|y=\left(\frac{2}{3}\right)^x,x\in\mathbf{R}\right.\right\}$,集合 $B=\{x|(m+2)x^2+2mx+1\leqslant0\}$,试讨论是否存在实数 m,使 $B\subseteq A$ 成立.

分析:这是存在型探索性问题.一般先假设实数 m 存在,然后进行推证和计算.由指数函数的值域易知 $A=\mathbf{R}^+$,再将 $B\subseteq A$ 转化为含参数 m 的二次不等式的解的存在性讨论.

解:$A=\left\{y\left|y=\left(\frac{2}{3}\right)^x,x\in\mathbf{R}\right.\right\}=\mathbf{R}^+$.

① 当 $m+2=0$,即 $m=-2$ 时,

$B=\left\{x\left|x\geqslant\frac{1}{4}\right.\right\}$,有 $B\subseteq A$;

② 当 $m+2<0$,即 $m<-2$ 时,

$B=\left\{x\left|x\leqslant\frac{-m+\sqrt{m^2-(m+2)}}{m+2}<0\right.\right.$ 或

$\left.x\geqslant\frac{-m-\sqrt{m^2-(m+2)}}{m+2}>0\right\}$,所以 $B\subseteq A$ 不成立;

③ 当 m 满足 $\begin{cases}m+2>0,\\ \Delta=4m^2-4(m+2)\geqslant0,\\ x_1+x_2=-\dfrac{2m}{m+2}>0,\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{m+2}>0.\end{cases}$

即 $-2<m<-1$ 时,

$B=\{x\mid0<x_1\leqslant x\leqslant x_2\}$,所以 $B\subseteq A$ 成立;

④ 当 m 满足 $\begin{cases}m+2>0,\\ \Delta=4m^2-4(m+2)<0.\end{cases}$

即 $-1<m<2$ 时,

$B=\varnothing$,所以 $B\subseteq A$ 成立.

综上所述,存在实数 m,且 $m\in[-2,2)$ 时,$B\subseteq A$ 成立.

【点拨解疑】 关于参数的存在型问题是数学探索性问题中一类常见问题.其解题的一般思路是:假设满足题设条件的参数存在,然后进行推理和运算,如果能求出满足题设条件的参数值,即得到存在的结论;如果推证得出矛盾或运算中参数无解,则得出不存在的结论.

基础知识练习

一、选择题

1. 设全集为 $\mathbf{R}$, $A=\{x|x^2-5x-6>0\}$, $B=\{x||x-5|<a\}$(a 是常数),且 $11\in B$,则( )

A. $C_{\mathbf{R}}A\cup B=\mathbf{R}$ B. $A\cup C_{\mathbf{R}}B=\mathbf{R}$
C. $C_{\mathbf{R}}A\cup C_{\mathbf{R}}B=\mathbf{R}$ D. $A\cup B=\mathbf{R}$

(1998 年上海高考题)

2. 记有限集 A 的元素个数为 card(A).若 card(P) = 10, card(Q) = 20, card($P\cup Q$) = 23,则 card($P\cap Q$) 为( )

A. 3 B. 7 C. 13 D. 30

3. 若全集 $U=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$, $A=\left\{(x,y)\left|\frac{y-3}{x-2}=1,x,y\in\mathbf{R}\right.\right\}$, $B=\{(x,y)|y=x+1,x,y\in\mathbf{R}\}$,则 $(C_UA)\cap B$ 是( )

A. C_UA B. B C. $\varnothing$ D. $\{(2,3)\}$

4. 已知集合 $M=\{1,2,3\}$ 那么满足关系 $M\cup N=M$ 的集合 N 的个数为( )

A. 1 B. 7 C. 8 D. 10

二、填空题

5. 若集合 $\{x|ax^2+3x+1=0\}$ 中有且只有一个元素,则实数 a 的取值集合是________.

6. 已知集合 $A=\{y|y=x^2-2x-3,x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y|y=-x^2+2x+13,x\in\mathbf{R}\}$, 则 $A\cap B=$________.

高考常考题强化训练

一、选择题

1. 已知集合 $M=\left\{a\left|\frac{6}{5-a}\in\mathbf{N}\text{且 }a\in\mathbf{Z}\right.\right\}$,则 $M=$( )

A. $\{2,3\}$ B. $\{1,2,3,4\}$
C. $\{1,2,3,6\}$ D. $\{-1,2,3,4\}$

2. 设集合 $A=\{x|x\in\mathbf{Z}\text{且 }-10\leqslant x\leqslant-1\}$, $B=\{x|x\in\mathbf{Z}\text{且 }|x|\leqslant5\}$,则 $A\cup B$ 中元素的个数是( )

A. 11 B. 10 C. 16 D. 15

(2000 年全国高考题)

3. 设方程 $2x^2+3px+2=0$ 的解集为 A, $2x^2+x+q=0$ 的解集为 B,已知 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$,那么 $A\cup B$ 是( )

A. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ B. $\left\{\frac{1}{2},2\right\}$
C. $\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$ D. $\left\{-1,\frac{1}{2},2\right\}$

4. 已知 $A=\{a,a+d,a+2d\}$, $B=\{a,aq,aq^2\}$,若 $A=B$,

则 q 的值是(　　)

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. 1, $-\frac{1}{2}$

5. 设集合 $M=\{x\mid x>2\}$, $N=\{x\mid x<3\}$, 那么"$x\in M$ 或 $x\in N$"是"$x\in M\cap N$"的(　　)

A. 充分但非必要条件　　B. 必要但非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分又非必要条件

6. 已知 $M=\left\{x\mid x=\cos\frac{5k\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}\right\}$, $N=\left\{y\mid y=\cos\frac{n\pi}{4}, n\in\mathbf{Z}\right\}$, 则 M、N 之间的关系是(　　)

A. $M\subsetneqq N$　　B. $M\supsetneqq N$　　C. $M\neq N$　　D. $M=N$

7. 点集 $\left\{(x,y)\mid \lg(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9})=\lg x+\lg y\right\}$ 中元素个数为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 多于 2

二、填空题

8. 设 I 是全集, 非空集合 P, Q 满足 $P\subset Q\subset$ I, 若含 P、Q 的一个集合运算表达式, 使运算结果为 $\varnothing$, 则这个运算表达式可以是_____________(只要写出一个表达式).

(2000 年上海春季高考题).

9. 集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$, $B=\left\{(x,y)\mid \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, a>0, b>0\right\}$, 若 $A\cap B$ 只有一个元素, 则 $a\cdot b$ 的最小值是________.

10. 已知集合 $A=\{1,3\}$, $B=\{x\mid mx-3=0\}$, 且 $A\cup B=A$, 则 m 的值为________________.

三、解答题

11. 已知 R 为全集, $A=\left\{x\mid \log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2\right\}$, $B=\left\{x\mid \frac{5}{x+2}\geqslant 1\right\}$, 求 $C_R A\cap B$.

12. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+(P+2)x+1=0, x\in\mathbf{R}\}$, 且 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$, 求实数 P 的取值范围.

13. 集合 A、B 各有 12 个元素, 集合 $A\cap B$ 有 4 个元素, 集合 C 满足条件: (1) $C\subseteq(A\cup B)$; (2) C 中含有 3 个元素; (3) $C\cap A\neq\varnothing$. 这样的集合 C 共有多少个.

14. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x=n, y=an+b, n\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{(x,y)\mid x=m, y=3m^2+15, m\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$, 是坐标平面内的点集, 问是否存在实数 a、b, 使得 $A\cap B\neq\varnothing$, $(a,b)\in C$ 同时成立.

考点2　简易逻辑

命题趋势走向

逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科,逻辑知识是我们学习数学及认识问题,研究问题不可缺少的工具,是高考新增内容,复习中应引起重视.

考试要求为:

(1)了解命题的概念和含有"或"、"且"、"非"的复合命题的构成,理解逻辑联词"或"、"且"、"非"的含义.

(2)初步掌握四种命题及其关系,会利用数学知识判断充分、必要条件、充要条件.

(3)初步掌握反证法.

本届试题中可能有关于本考点的选择题、填空题中的容易题,也可能在中等难度的解答题中考查反证法.

名师点拨解疑

【例题1】 写出下列命题的否定:

(1)不论 a 取什么实数,$x^2+x-a=0$ 必有实根

(2)存在一个实数 x,使得 $x^2+x+1\leqslant 0$.

解:(1)原命题相当于"对所有的实数 a,$x^2+x-a=0$ 都有实根".它的否定是"对所有的实数 a,$x^2+x-a=0$ 不都有实根",即"至少有一个实数 a,使得 $x^2+x-a=0$ 没有实根."

(2)原命题的否定指"不存在使得 $x^2+x+1\leqslant 0$ 的实数 x"即"对所有的实数 x,有 $x^2+x+1>0$".

【点拨解疑】 "命题的否定"和"命题的否命题"不是一回事,要注意区别.前者指条件不变只否定结论,后者指既否定条件又否定结论.

【例题2】 (1)试判断命题"一次函数 $f(x)=kx+h(k\neq 0)$,若 $m<n$,$f(m)>0$,$f(n)>0$,则对任意 $x\in(m,n)$ 都有 $f(x)>0$"是真命题还是假命题?并说明理由.

(2)利用(1)题的结论,试判断命题"若 a、b、c 均为实数,且 $|a|<1$,$|b|<1$,$|c|<1$,则 $ab+bc+ca>-1$"是真命题还是假命题,并说明理由.

分析:(1)从几何角度思考,易知一次函数的图像是一条直线,如果直线上两点都在 x 轴的上方,那么这两点间的线段必在 x 轴上方,由此可判断题设命题为真命题,再根据一次函数的单调性给予证明.

(2)为利用(1)题的结论,应考虑构造一次函数,将题设命题变形为(1)的形式判断真假,并给予证明.

解:(1)当 $k>0$ 时,$f(x)=kx+h$ 是增函数,

因为 $f(m)>0$,所以当 $x\in(m,n)$ 时,$f(x)>f(m)>0$ 总成立.

当 $k<0$ 时,$f(x)=kx+h$ 是减函数,因为 $f(n)>0$,所以当 $x\in(m,n)$ 时,$f(x)>f(n)>0$ 总成立.

综上所述,当 $x\in(m,n)$ 时,$f(x)>0$ 总成立,所以给出的命题是真命题.

(2)令 $f(x)=(b+c)x+bc+1(|b|<1,|c|<1)$,又知 $a\in(-1,1)$,且 $f(a)=(b+c)a+bc+1=ab+bc+ca+1$.

当 $b+c=0$,即 $b=-c$ 时,$f(a)=-c^2+1>0$,得 $ab+bc+ca+1>0$,即 $ab+bc+ca>-1$.

当 $b+c\neq 0$ 时,因为 $|b|<1$,$|c|<1$,所以 $f(1)=(b+c)+bc+1=(1+b)(1+c)>0$;$f(-1)=-(b+c)+bc+1=(1-b)(1-c)>0$.

根据(1)题结论,当 $x\in(-1,1)$ 时,成立 $f(x)>0$.因为 $|a|<1$,所以 $f(a)=ab+bc+ca+1>0$ 成立,即 $ab+bc+ca>-1$,故(2)题题给命题是真命题.

【点拨解疑】 (1)判断一个命题是真命题应作出证明,判断一个命题是假命题只需作出一个反例即可.

(2)判断命题的真假应灵活思维,从不同角度审视命题的条件和结论,本例(1)题先从几何角度作出判断,再从函数性质给予证明;(2)题从题设条件出发运用函数思想指导构造一次函数,通过等价变形,从而说明命题为真,这些常用的重要思维方法应仔细体会.

【例题3】 设 $x,y\in\mathbf{R}$,求证:$|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 $xy\geqslant 0$.

分析:充分性是证 $xy\geqslant 0\Rightarrow|x+y|=|x|+|y|$ 必要性是证:$|x+y|=|x|+|y|\Rightarrow xy\geqslant 0$

证明:充分性:①如果 $xy=0$,不妨设 $x=0$,于是 $|x+y|=|y|=|x|+|y|$;　②如果 $xy>0$,即 $x>0,y>0$ 或 $x<0,y<0$.

当 $x>0,y>0$ 时.　$|x+y|=x+y=|x|+|y|$.

当 $x<0,y<0$ 时.　$|x+y|=-|x+y|=-x-y=|x|+|y|$.

总之,当 $xy\geqslant 0$ 时,有 $|x+y|=|x|+|y|$.

必要性:由 $|x+y|=|x|+|y|$ 及 $x,y\in\mathbf{R}$,得

$(x+y)^2=(|x|+|y|)^2$,即 $x^2+2xy+y^2=x^2+2|xy|+y^2$.

所以,$xy=|xy|$,由此 $xy\geqslant 0$.

【例题4】 有金盒、银盒、铅盒各一个,只有一个盒子里有肖像,金盒上写有命题 p:肖像在这个盒子里;银盒上写有命题 q:肖像不在这个盒子里;铅盒上写有命题 γ:肖像不在金盒里.p,q,γ 中有且只有一个是真命题,问:肖像在哪一个盒子里?为什么?

解:因为 γ 即非 p,所以至少有且只有一个为真,因为 p,q,γ 有且只有一个真命题,则 q 为假命题,则非 q 是真命题,即肖像在银盒里.

【点拨解疑】 本题亦可分类讨论去处理,但没有此解法简便.

高考常考题强化训练

一、选择题

1. 下列四组条件中,甲是乙的充分不必要条件的是(　)

A. 甲:$a > b$　　乙:$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

B. 甲:$ab < 0$　　乙:$|a+b| < |a-b|$

C. 甲:$a = b$　　乙:$a + b = 2\sqrt{ab}$

D. 甲:$\begin{cases}0 < a < 1\\0 < b < 1\end{cases}$　　乙:$\begin{cases}0 < a+b < 2\\-1 < a-b < 1\end{cases}$

2. 命题"方程 $x^2 - 1 = 0$"的解是"$x = \pm 1$"中,使用逻辑联结词的情况是(　　)

A. 没有使用逻辑联结词

B. 使用了逻辑联结词"且"

C. 使用了逻辑联结词"或"

D. 使用了逻辑联结词"非"

3. 下列命题正确的是(　　)

A. 对所有的正实数 t,$\sqrt{t}$ 为正,且$\sqrt{t} < t$

B. 对实数 x,若 $x^2 - 3x - 4 = 0$,则 $x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$

C. 不存在实数 x,使得 $x < 4$ 且 $x^2 + 5x = 24$

D. 存在实数 x,使得 $|x+1| \leqslant 1$ 且 $x^2 > 4$

4. 用反证法证明命题"$a, b \in \mathbf{N}$, ab 可被 5 整除,那么 a, b 中至少有一个能被 5 整除".那么假设的内容是(　　)

A. a, b 都能被 5 整除　　B. a, b 都不能被 5 整除

C. a 不能被 5 整除　　D. a, b 有一个不能被 5 整除

二、填空题

5. 命题"$\sqrt{5}$ 的值不超过3"看作是"非p"形式时,p为______看作是"p或q"形式时,p为______,q为______.

6. 命题"各位数字之和是 3 的倍数的正整数可以被 9 整除",与它的逆命题,否命题及逆否命题中假命题有________个,真命题有________个.

三、解答题

7. 设 α、β 是方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的两个实根,试分析 $a > 2$ 且 $b > 1$ 是两根 α、β 均大于 1 的什么条件?

8. 设 $x, y \in \mathbf{R}$,求证:$|x+y| = |x| + |y|$ 成立的充要条件是 $xy \geqslant 0$.

9. 用反证法证明:若函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上是增函数,那么方程 $f(x) = 0$ 在区间$[a, b]$上至多只有一个实根.

10. 已知条件 $p: A = \left\{x \,\middle|\, \left|x - \frac{(a+1)^2}{2}\right| \leqslant \frac{(a-1)^2}{2}\right\}$,条件 $q: B = \{x \mid x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leqslant 0\}$.若条件 p 是条件 q 的充分条件.求实数 a 的取值范围.

11. 已知关于 x 的一元二次方程($m \in \mathbf{Z}$):

$mx^2 - 4x + 4 = 0$,　　①

$x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m - 5 = 0$,　　②

求方程 ①② 的根都是整数的充要条件.

考点3 函数的解析式、定义域与反函数

命题趋势走向

函数知识是高中数学的主体内容之一，函数思想是中学数学的重要基本数学思想，因而函数概念直接影响整个高中数学的学习和后继学习，函数概念的掌握水平是函数学习的重要标志之一.

函数概念、函数解析式与定义域，在近十年的高考中一直是考查频率最高的主干知识，内容上已延拓到包括分段定义函数、复合函数及抽象函数记号，考查力度呈上升趋势.函数定义域的考查，不仅渗透于各种函数问题中，要求考生熟练运用不等式(组)探求函数定义域，深刻理解定义域优先原则，并曾一度(1999年)要求考生能使用极限方法求定义域.

反函数的定义、函数图像位置关系和求简单的反函数，几乎年年都考，但要求不高.

名师点拨解疑

【例题1】 已知定义在R上的函数$f(x)$满足$f(\log_2 x)=x+\frac{a}{x}$，$a$为常数.

(1) 求函数$f(x)$的解析式及定义域；

(2) 如果$f(x)$为偶函数，求a的值；

(3) 当$f(x)$为偶函数时，用单调性的定义讨论$f(x)$的单调性.

分析：本例是已知复合函数$f[g(x)]$的解析式，求$f(x)$的解析式，一般常用换元法，换元时，应立即指出新元的取值范围，注意换元前后函数定义域的变化.

解：(1) 设$\log_2 x=t$，

$\therefore\ x=2^t, f(t)=2^t+\frac{a}{2^t}$，

$\therefore\ f(x)=2^x+\frac{a}{2^x}(x\in\mathbf{R})$.

(2) $\because\ f(x)$是偶函数，$\therefore\ f(x)=f(-x)$

即$2^{-x}+\frac{a}{2^{-x}}=2^x+\frac{a}{2^x}$，

即$2^x-2^{-x}-a\cdot2^x+a\cdot2^{-x}=0$，

$\therefore\ (2^x-2^{-x})(1-a)=0$.

$\because\ 2^x-2^{-x}$不能恒为0，$\therefore\ a=1$

(3) 当$a=1$时，$f(x)=2^x+\frac{1}{2^x}$，设$0<x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=(2^{x_1}+\frac{1}{2^{x_1}})-(2^{x_2}+\frac{1}{2^{x_2}})$$

$$=(2^{x_1}-2^{x_2})+\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{2^{x_1}\cdot2^{x_2}}$$

$$=(2^{x_1}-2^{x_2})(\frac{2^{x_1+x_2}-1}{2^{x_1+x_2}})$$

$\because\ 2^{x_1}-2^{x_2}<0, 2^{x_1+x_2}>0, 2^{x_1+x_2}-1>0$.

$\therefore\ f(x_1)-f(x_2)<0, f(x_1)<f(x_2)$，

$\therefore\ f(x)$在区间$(0,+\infty)$上是增函数，

$\because\ f(x)$为偶函数，

$\therefore\ f(x)$在区间$(-\infty,0)$上是减函数.

【点拨解疑】 ① 函数的确定分两步：(Ⅰ) 定义域非空，定义域必须是非空数集，坚持定义域优先原则，若定义域是空集，不再看第二步；(Ⅱ) 符合映射定义：任一，惟一，故映射法则+定义域，即解析式+定义域确定一个函数.

② 复合函数的解析式可分为下列情形探求.(Ⅰ) 已知$f[g(x)]$的表达式，求$f(x)$用换元法；(Ⅱ) 已知$f[g(x)]$的表达式结构简单易凑时，用观察法或配凑法；(Ⅲ) 已知函数解析式的基本结构的类型时，用待定系数法；(Ⅳ) 给出递推关系式时，用递推法；(Ⅴ) 参数法等.

【例题2】 已知$f(x)=x^2-1$，$g(x)=\begin{cases}x-1 & (x>0),\\ 2-x & (x<0).\end{cases}$求$f[g(x)]$和$g[f(x)]$的表达式.

分析：已知自变量x的范围，根据分段函数在不同区间的解析式，先求内层函数值，再由内到外确定对应解析式.

解：当$x>0$时，$g(x)=x-1$，$f[g(x)]=(x-1)^2-1=x^2-2x$；

当$x<0$时，$g(x)=2-x$，$f[g(x)]=(2-x)^2-1=x^2-4x+3$.

$$\therefore f[g(x)]=\begin{cases}x^2-2x & (x>0),\\ x^2-4x+3 & (x<0).\end{cases}$$

当$x>1$或$x<-1$时，$f(x)>0$，故

$g[f(x)]=f(x)-1=x^2-2$；

当$-1<x<1$时，$f(x)<0$，故

$g[f(x)]=2-f(x)=3-x^2$.

$$\therefore g[f(x)]=\begin{cases}x^2-2 & (x>1),\\ 3-x^2 & (-1<x<1),\\ x^2-2 & (x<-1).\end{cases}$$

【例题3】 在如图1-3-1所示的直角坐标系中，一运动物体经过点$A(0,9)$，其轨迹方程为$y=ax^2+c$，$(a<0)$，$D=(6,7)$为x轴上的给定区间.

(1) 为使物体落在D内，求a的取值范围；

(2) 若物体运动时又经过点$P(2,8.1)$，问它能否落在D内，说明理由.

(1996年上海高考题)

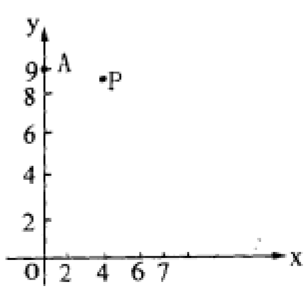

图1-3-1

分析：由二次函数及不等式知识易解.

解：(1) 把点A的坐标代入$y=ax^2+c$，有$9=a\cdot0+c$得$c=9$，$\therefore$ 物体运动轨迹方程为$y=ax^2+9$.

令$y=0$，则$x^2=-\frac{9}{a}$，又$6<x<7$，$36<x^2<49$，则

$36<-\frac{9}{a}<49$,因为 $a<0$,所以 $-\frac{1}{4}<a<-\frac{9}{49}$.

(2) 把 P 点坐标(2,8.1)代入方程 $y=ax^2+9$,$8.1=a\cdot 2^2+9$,得 $a=-\frac{9}{40}$,物体运动轨迹方程为 $y=-\frac{9}{40}x^2+9$,

$\because\ -\frac{1}{4}<-\frac{9}{40}<-\frac{9}{49}$,

$\therefore$ 物体能落在 D 内.

【点拨解题】 数学知识在其它学科中的应用是数学应用的重要方面,也是数学应用题的重要素材,应注意本例还可贴近生活,命制成飞船、人造卫星坠落到指定区域等实际应用题.

【例题 4】 求下列各函数的定义域:

(1) $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x}-1)^0}{\log_{(2x+1)}(32-4^x)}$;

(2) $g(x)=f(x+a)+f(x-a)$,其中函数 $y=f(x)$ 的定义域是[0,1].

分析:转换为等价的不等式(组)或混合组求解是解题关键.

解:(1) 要使函数有意义,应满足

$$\begin{cases}\sqrt{x}-1\neq 0,\\ 2x+1>0,\\ 2x+1\neq 1,\\ 32-4^x>0,\\ 32-4^x\neq 1.\end{cases}\quad 即\begin{cases}x\neq 1,x\geqslant 0,\\ x>-\frac{1}{2},\\ x\neq 0,\\ x<\frac{5}{2},\\ x\neq \log_2\sqrt{31}.\end{cases}$$

故其定义域为 $\left\{x\mid 0<x<\frac{5}{2}且 x\neq 1,x\neq\log_2\sqrt{31}\right\}$.

(2) $\because f(x)$ 的定义域是[0,1],故函数 $g(x)$ 的定义域应满足:

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1.\end{cases}\quad 即\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$$

① 当 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 0$ 时,$g(x)$ 的定义域为 $\{x\mid -a\leqslant x\leqslant 1+a\}$;

② 当 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ 时,$g(x)$ 的定义域为 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant 1-a\}$;

③ 当 $a>\frac{1}{2}$ 或 $a<-\frac{1}{2}$ 时,上述两区间的交集为空集,这时 $g(x)$ 不能构成函数.

【例题 5】 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & (x\geqslant 0)\\ 2x-1 & (x<0)\end{cases}$ 的反函数.

分析:依据反函数的定义,分别求出 $y=x^2-1(x\geqslant 0)$ 与 $y=2x-1(x<0)$ 的反函数,再合写成一个新的分段函数.

解:(1) 由 $y=x^2-1$,得 $x^2=y+1$,当且仅当 $y+1\geqslant 0$,即 $y\geqslant -1$ 时,x 在 $\mathbf{R}^-$ 上有唯一解,即 $x=\sqrt{y+1}$

$y=x^2-1(x\geqslant 0$ 的反函数是 $y=\sqrt{x+1}(x\geqslant -1)$.

(2) 由 $y=2x-1$ 得 $x=\frac{y+1}{2}$,

$\because x<0$ 即 $\frac{y+1}{2}<0$,得 $y<-1$.

$\therefore$ 当且仅当 $y<-1$ 时,① 在 $\mathbf{R}^-$ 上有惟一解.

$\therefore y=2x-1(x<0)$ 的反函数是 $y=\frac{x+1}{2}(x<-1)$.

由(1)、(2)知,

所求反函数为 $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & (x\geqslant -1),\\ \frac{x+1}{2} & (x<-1).\end{cases}$

【点拨解题】 求反函数的步骤:

① 求函数 $y=f(x)$ 的值域;

② 由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$;

③ 在 $x=f^{-1}(y)$ 中,将 x,y 互换得到 $y=f^{-1}(x)$;

④ 由 ① 求出的值域,标明反函数的定义域.

【例题 6】 某地为促进淡水鱼养殖业的发展,将价格控制在适当范围内,决定对淡水鱼养殖业提供政府补贴,设淡水鱼的市场价格为 x 元/千克,政府补贴为 t 元/千克,根据市场调查,当 $8\leqslant x\leqslant 14$ 时,淡水鱼的日供应量 P 千克与市场日需求量 Q 千克近似地满足关系 $P=1000(x+t-8)(x\geqslant 8,t\geqslant 0)$,$Q=500\sqrt{40-(x-8)^2}(8\leqslant x\leqslant 14)$.当 $P=Q$ 时的市场价格称为市场平衡价格.(1) 将市场平衡价格表示为政府补贴的函数,并求出函数的定义域;(2) 为使市场平衡价格不高于每千克 10 元,政府补贴至少为每千克多少元?

(1995 年全国高考题)

分析:数学应用题的解题关键是正确找到数学模型.函数应用题则是正确找到模型函数,为此应分为三步来求.第一步,分清哪一个是自变量,哪一个是函数,本例中政府补贴 t 是自变量,市价平衡价格 x 是 t 的函数;第二步,由题给等量关系建立函数解析式,本例中 $P=Q$ 就可求得 $x=f(t)$;第三步,求出函数的定义域.

解:(1) 依题意,由 $P=Q$ 得

$$1000(x+t-8)=500\sqrt{40-(x-8)^2},$$

化简得 $5x^2+(8t-80)x+(4t^2-64t+280)=0$,当判别式 $\triangle=800-16t^2\geqslant 0$ 时,可得

$$x=8-\frac{4}{5}t\pm\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$$

结合 $\triangle\geqslant 0,t\geqslant 0,8\leqslant x\leqslant 14$,得不等式组:

$$①\begin{cases}0\leqslant t\leqslant\sqrt{50},\\ 8\leqslant 8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 14;\end{cases}$$

$$②\begin{cases}0\leqslant t\leqslant\sqrt{50};\\ 8\leqslant 8-\frac{4}{5}t-\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 14.\end{cases}$$

解不等式组 ①,得 $0\leqslant t\leqslant\sqrt{10}$,不等式组 ② 无解,故所求函数关系式为 $x=8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$,定义域为 $[0,\sqrt{10}]$.

(2) 为使 $x\leqslant 10$ 应有 $8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 10$,化简得 $t^2+4t-5\geqslant 0$,解得 $t\geqslant 1$ 或 $t\leqslant -5$(舍去),由于 $t\geqslant 0$,知 $t\geqslant 1$,故政府补贴至少为每千克 1 元.

【点拨解题】 数学应用题的最大困难,一是生活背景不熟悉,不能用数学方法解释题目所给生活问题;二是读不懂题意,特别是题目中给予的临时性定义,专业用语和俚语.

对策:① 运用"主题词"浓缩题意,凸现主题,例如本题"主题词"为"淡水鱼养殖、市场平衡价格、政府补贴",立知"鱼价随政府补贴而变动"的函数关系;

② 扫除语言障碍,深入理解临时性定义的内涵,掌握数

量关系，特别是等量关系，本例中"市场平衡价格"定义中的 $P=Q$ 就是解题的灵魂；

③ 转化为熟悉的数学模型，解这个数学模型.

基础知识练习

一、选择题

1. 设函数 $f(x)=ax+b$，若 $f(1)=-2, f(-1)=0$，则(　　)

A. $a=1, b=-1$　　B. $a=-1, b=-1$

C. $a=-1, b=1$　　D. $a=1, b=1$

2. 与函数 $y=\sqrt{-2x^3}$ 有相同图像的一个函数是(　　)

A. $y=x\sqrt{-2x}$　　B. $y=-x\sqrt{-2x}$

C. $y=-\sqrt{2x^3}$　　D. $y=x^2\sqrt{\frac{-2}{x}}$

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f(xy)=f(x)+f(y)$，则下列各式错误的是(　　)

A. $f(1)=0$　　B. $f(x^3)=3f(x)\quad(x>0)$

C. $f(x)=0\quad(x>0)$　　D. $f(\sqrt{x})=\frac{1}{2}f(x)\quad(x>0)$

4. 已知 $f(x)=\frac{1}{1-x}(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq1)$，那么当 $x\neq0, x\neq1$ 时，下列四个式子中与 $f[f(x)]$ 相等的是(　　)

A. $\frac{1}{x-f(x)}$　　B. $\frac{1}{x+f(x)}$

C. $-\frac{1}{xf(x)}$　　D. $\frac{1}{xf(x)}$

5. 设 $x\in\mathbf{R}$，且 $f(x)-2f(\frac{1}{x})=x$，则 $f(x)$ 的表达式为(　　)

A. $f(x)=-\frac{x}{3}-\frac{2}{3x}$　　B. $f(x)=-\frac{x}{3}-\frac{1}{3x}$

C. $f(x)=-\frac{x}{3}-\frac{2}{5x}$　　D. $f(x)=\frac{x}{5}-\frac{1}{5x}$

6. 若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)(x,y\in\mathbf{R})$，则下列不恒成立的是(　　)

A. $f(0)=0$　　B. $f(3)=3f(1)$

C. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f(1)$　　D. $f(-x)\cdot f(x)<0$

7. 设 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-2,2]$，则函数 $f(x^2-1)$ 的定义域为(　　)

A. $[-1,\sqrt{3}]$　　B. $[-\sqrt{3},1]$

C. $[-2,2]$　　D. $[-4,4]$

8. 若函数 $f(x)$ 与函数 $y=(x-1)^2-1(x\leqslant0)$ 互为反函数，则 $f(x)$ 为(　　)

A. $f(x)=1+\sqrt{x+1}\quad(x\geqslant-1)$

B. $f(x)=1-\sqrt{x+1}\quad(x\geqslant0)$

C. $f(x)=1-\sqrt{x+1}\quad(x\geqslant-1)$

D. $f(x)=1-\sqrt{x+1}\quad(x\leqslant0)$

二、填空题

9. 函数 $y=\log_2\frac{2x-1}{3-x}$ 的定义域为________.

(2000 年上海高考题)

10. $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}(x>0)$，则 $f(x)=$________.

11. 若点 $(1,2)$ 既在函数 $f(x)=\sqrt{ax-b}$ 的图像上，又在函数 $f^{-1}(x)$ 的图像上，则 $f(x)$ 的解析式可以确定为________.

12. 设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(2-x)$，且 $f(x)=0$ 的两实根平方和为 10，图像过点 $(0,3)$，则 $f(x)$ 的解析式为________.

三、解答题

13. 设 $f(x)$ 是有理整函数，且 $f(x+1)+f(x-1)=2x^2-4x$，求 $f(1-\sqrt{2})$ 的值.

14. 已知 $f(x)=\frac{2x+1}{x+a}\quad(x\neq-a, a\neq\frac{1}{2})$.

(1) 求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$；

(2) 若 $f(x)=f^{-1}(x)$，求 a 的值；

(3) 作出满足 ② 中条件的 $y=f^{-1}(x)$ 的图像.

高考常考题强化训练

一、选择题

1. 已知 $f(x)=\begin{cases}x-5 & (x\geqslant6)\\ f(x+2) & (x<6)\end{cases}\quad(x\in\mathbf{N})$，则 $f(3)$ 的值等于(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2. 周长为定值 a 的扇形，它的面积 S 是这个扇形半径 R 的函数，则函数的定义域是(　　)

A. $\left(\frac{a}{2},a\right)$　　B. $\left(\frac{a}{2(1+\pi)},\frac{a}{2}\right)$

C. $(a,2a)$　　D. $(0,a)$

3. 定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$ 以 2 为周期，已知当 $x\in[2,3]$ 时 $f(x)=x$，则当 $x\in[-2,0]$ 时 $f(x)$ 的解析式是(　　)

A. $f(x)=x+1$　　B. $f(x)=2-x$

C. $f(x)=3-|x+1|$　　D. $f(x)=2+|x+1|$

4. 已知 $f(x^6)=\log_2 x$，那么 $f(8)$ 等于(　　)

A. $\frac{4}{3}$　　B. 8　　C. 18　　D. $\frac{1}{2}$

(2000 年春季高考题)

5. 函数 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 对于任意的实数 x,y 都有(　　)

A. $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$

B. $f(xy)=f(x)+f(y)$

C. $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

D. $f(x+y)=f(x)+f(y)$

(2001 年全国春季高考题)

6. 已知下列各函数中，是同一函数的是(　　)

①$f(x)=\lg x$　　$g(x)=\frac{1}{2}\lg x^2$

②$f(x)=\begin{cases}x+1 & x\in(-1,0)\\ x-1 & x\in(0,1)\end{cases}$　　$g(x)=f^{-1}(x)$

③$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$　　$g(x)=x+1$

④$f(x)=\tan 2x$　　$g(x)=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

⑤$f(x)=x^2+3x$　　$g(t)=t^2+3t$

A. ①③④　　B. ②③④　　C. ②⑤　　D. ①②④⑤

二、填空题

7. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，那么 $f(1)+f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f(4)+f\left(\frac{1}{4}\right)=$__________.

(2002 年全国高考题)

8. 在 $\triangle ABC$ 中(如图 1－3－2)，$BC=2$，$AB+AC=3$．中线 AD 的长为 y，若以 AB 的长为 x，建立 y 与 x 的函数关系是________，其定义域是________.

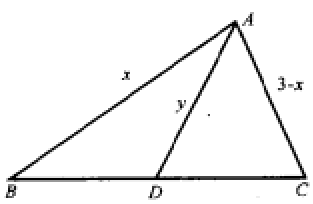

图 1－3－2

9. 已知 $f(x-1)=|x|-|x-2|$，且 $f[f(t)]=f(2002)-\frac{7}{2}$，那么实数 t 的值为_______.

10. 将进价为 40 元／个的商品标价 50 元／个出售时，每月能售出 500 个，每涨价 1 元，销售量就会减少 10 个，为使利润最高，售价应定为______元／个.

11. 已知 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$，记 $f_n(x)=f\{f[\cdots f(x)]\}$．则 $f_{2003}(2004)$ 等于_______.

12. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 **N**，且 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$，$f(y)=1$，则 $f(x)$ 的表达式为_______.

三、解答题

13. 试求函数 $y=4^x-2^{x+1}$ 的反函数.

14. 在直角坐标系中，设矩形 $OPQR$ 的顶点按逆时针顺序依次为 $O(0,0)$，$P(1,t)$，$Q(1-2t,2+t)$，$R(-2t,2)$，其中 $t\in(0,+\infty)$.

(1) 求矩形 $OPQR$ 在第一象限部分的面积 $S(t)$；

(2) 确定函数 $S(t)$ 的单调区间，并加以证明.

(1994 年上海高考题)

15. 有一个受到污染的湖泊，其湖水容积为 V 立方米，每天流出湖泊的水量等于流入湖泊的水量，都为 r 立方米。现假设下雨与蒸发正好平衡，且污染物质与湖水能很好地混合，用 $g(t)$ 表示某一时刻 t 每立方米湖水所含污染物质的克数，我们称其为在时刻 t 时湖泊污染质量分数．已知目前污染源以每天 P 克的污染物质污染湖水，湖水污染质量分数满足关系式：

$g(t)=\frac{P}{r}+\left[g(0)-\frac{P}{r}\right]\cdot e^{-\frac{r}{V}t}(P\geqslant 0)$，其中 $g(0)$ 是湖水污染的初始质量分数.

(1) 当湖水污染质量分数为常数时，求湖水污染的初始质量分数；