全国高职高专系列规划教材

高职应用数学

（下册）

宋剑萍　蔡云波　主编

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

全国高职高专系列规划教材

高职应用数学

（下册）

主　编　宋剑萍　蔡云波

副主编　李洁琼　陈禹默　胡　刚

　　　　崔　亚　赵　珊

策　划　蔡云波

主　审　宋剑萍

同济大学出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本教材适合高职学生和高技能应用型人才的学习使用，分上册和下册出版.

教材上册为集合论、函数、极限与连续、空间解析几何、导数与微分共5章内容.下册为线性代数、积分、常微分方程、概率与统计共4章内容.每章都配有专业案例、课后提升、知识小结框图和能力提升.通过手机扫描二维码，可观看微课视频和阅读数学文化资料.

图书在版编目(CIP)数据

高职应用数学.下册 / 宋剑萍，蔡云波主编. — 上海：同济大学出版社，2019.4

ISBN 978-7-5608-6176-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①宋… ②蔡… Ⅲ.①应用数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 054089 号

全国高职高专系列规划教材

高职应用数学(下册)

宋剑萍　蔡云波　主编

责任编辑　张崇豪　**责任校对**　徐春莲　**封面设计**　陈益平

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021-65985622)

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　常熟市大宏印刷有限公司

开　　本　710mm×960mm　1/16

印　　张　14.75

字　　数　295 000

版　　次　2019 年 4 月第 1 版　2019 年 4 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-6176-0

定　　价　49.00 元

前　言

“全国高职高专系列规划教材”是根据教育部制定的三年制高职教育基础课程教学的基本要求，在总结交流多所院校数学课程教学改革经验的基础上，由多名从事数学教学一线的教师和参加国内、国际大学生数学建模竞赛的指导教师共同编写而成.

本教材根据高素质技能人才对数学知识的实际要求，力求贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度，以手工演算和科学计算工具为手段，以基本概念、基本运算为要求”的原则，融工科类、经济类、计算机类等数学内容为一体.

1. 在内容的编排上，以案例—数学概念—基本运算—应用为主线，注重学生对基本概念和基本运算的掌握，减少繁琐的推理、计算和证明，同时利用数学软件MATLAB，LINGO，SPSS解答例题，降低机械性、技巧性运算的要求，帮助高职学生克服在数学运算上的困难.

2. 在信息化教学手段的应用上，将知识难点和重点制作成微课视频；为培养学生的文化素养，收集了数学知识来源和数学家介绍等阅读材料，这些视频和阅读材料均转换成二维码信息，学生用手机扫描二维码，就可以观看和阅读.

3. 在案例选择上，结合各专业的特点，力求做到知识与应用紧密结合，理论学习和能力培养相得益彰.

4. 在例题、习题的选取上，做到由浅入深、由易到难，为学生搭建合适的台阶.

5. 在内容结构上，注意与现行的高中及中职教学内容相衔接，并借鉴了国内外教材的优点.

本教材重点强调数学知识在生产、生活和学生专业课程中的应用，注重学生职业核心能力的培养，突出高职高专教育培养高素质技能型、应用型人才的数学课程设置的教学理念.

本教材的编写任务分配是：胡刚编写第1章和第9章的9.1；宋剑萍编写第6章的6.1和6.2；李洁琼编写第2章，第3章，第4章和第6章的6.3；崔亚编写第5章；陈禹默编写第7章，第9章的9.2，9.3和9.4；赵珊编写第8章，蔡云波负责整本书的二维码信息.

本教材由西安职业技术学院宋剑萍和蔡云波担任主编，蔡云波负责策划，宋剑萍最后主审．西安职业技术学院李洁琼、陈禹默、胡刚、崔亚、赵珊为副主编．

在本教材的编写过程中，得到了参编学校各级领导的关心和支持，参阅了有关的文献和教材，在此，对相关作者一并表示衷心感谢．

由于作者水平有限，教材中不免有疏漏错误之处，恳请使用本教材的师生多提意见和建议，以便更正．

编　者

2019 年 4 月

目　录

第6章　线 性 代 数

线性代数知识在数学、物理学、力学等学科中有着广泛的应用；在现代信息技术中，线性代数已成为计算机图形学、计算机辅助设计、密码学、虚拟现实、成本计算等技术的理论基础和算法工具；线性代数将几何观念与代数思想完美结合，把一些具有共性的问题抽象化归为一类问题，以通性求通解.

6.1　矩阵与线性方程组

在人们的社会实践中，许多变量之间的关系可以直接或近似地表示成线性关系，可以表示成线性方程组. 因此研究变量间的线性关系，解线性方程组是非常重要的. 本节我们以中学阶段二元一次方程组的知识为学习起点，引出 n 元线性方程组的概念，学习把 n 元线性方程组写成矩阵的形式，用矩阵的秩判断线性方程组解的情况，用简化阶梯形矩阵、逆矩阵来解线性方程组.

案例 1　当电流经过电阻(如电机或灯泡)时，会产生“电压降”. 根据欧姆定律 $U=IR$，其中 U 为电阻两端的“电压降”，I 为流经电阻的电流强度，R 为电阻，U，I 和 R 的单位分别为福特、安培和欧姆. 对于电路网络，任何一个闭合回路的电流服从希尔霍夫电压定律：沿某个方向环绕回路一周的所有电压降 U 的代数和等于沿同一方向环绕该回路一周的电源电压. 求出图 6-1 中电流强度 I_1，I_2，I_3，I_4 的大小.

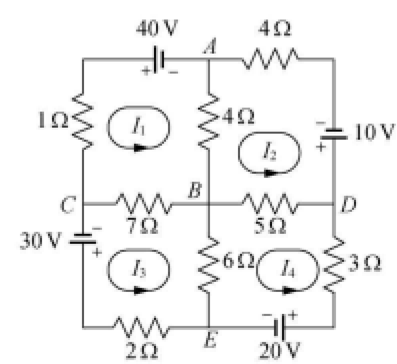

图 6-1　电路

分析　电路图的 4 个回路中，每个电阻电压降的代数和等于电源电压，可列出方程组，解方程组可得到电流 I_1，I_2，I_3，I_4 的大小.

解　回路 1 中，各电阻的电压降总和为

$$I_1+7I_1+4I_1-4I_2-7I_3=12I_1-4I_2-7I_3.$$

回路 2 中，各电阻的电压降总和为

$$5I_2+4I_2+4I_2-5I_4-4I_1=-4I_1+13I_2-5I_4.$$

回路 3 中，各电阻的电压降总和为

$$2I_3+6I_3+7I_3-7I_1-6I_4=-7I_1+15I_3-6I_4.$$

回路 4 中，各电阻的电压降总和为

$$3I_4+5I_4+6I_4-5I_2-6I_3=-5I_2-6I_3+14I_4.$$

根据各回路上电压降总和等于电源电压，得到下列方程组为

$$\begin{cases}12I_1-4I_2-7I_3=40,\\-4I_1+13I_2-5I_4=10,\\-7I_1+15I_3-6I_4=30,\\-5I_2-6I_3+14I_4=20.\end{cases}$$

在 MATLAB 命令窗口输入以下命令

```
A = [12 - 4 - 7 0; - 4 13 0 - 5; - 7 0 15 - 6; 0 - 5 - 6 14];
B = [40; 10; 30; 20];
RA = rank(A)   % 按 enter 键，得到 A 的秩
X = vpa(A\B)   % 按 enter 键，得到方程组的解
RA =

        4

X =

    13.162 010 107 752 459 830 976 476 951 037
    8.513 397 539 811 194 812 625 154 953 752 3
    11.984 361 590 540 670 405 857 781 588 566
    9.605 225 517 307 143 690 004 522 795 788 9
```

所以，I_1，I_2，I_3，I_4 的大小分别为 13.16，8.51，11.98，9.61.

案例 2 某城市的交通图如图 6-2 所示，每一条道路都是单行道，图中数字表示某一个时段的机动车流量. 假设针对每一个十字路口，进入和离开的车辆数相等. 计算每两个相邻十字路口间路段上的交通流量 $x_i(i=1,2,3,4)$.

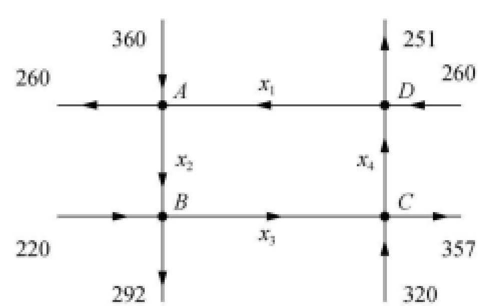

图 6-2　交通图

分析 根据交通图中的 4 个十字路口，进入和离开的车辆数相等，可列出 4 个方程构成的方程组，解方程组得到每两个相邻十字路口间路段上的交通流量 x_1，x_2，x_3，x_4.

解 根据已知条件，得到十字路口的流通方程如下

$$A: x_1+360=x_2+260.$$
$$B: x_2+220=x_3+292.$$
$$C: x_3+320=x_4+357.$$
$$D: x_4+260=x_1+251.$$

整理以上方程得出方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -100, \\ x_2 - x_3 = 72, \\ x_3 - x_4 = 37, \\ -x_1 + x_4 = -9. \end{cases}$$

用初等行变换将方程组的增广矩阵化为简化阶梯形,

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 72 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 37 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 109 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于(A,β)的最后一行全为零,方程组中只有三个有效方程,所以有无穷组解,以 x_4 为自由变量,其解为

$$\begin{cases} x_1=x_4+9, \\ x_2=x_4+109, \\ x_3=x_4+37. \end{cases}$$

令 $x_4=c$,得方程组得解为

$$\begin{cases} x_1=c+9, \\ x_2=c+109, \\ x_3=c+37. \end{cases}$$

在 MATLAB 命令窗口输入以下命令

```
≫A = [1 - 1 0 0 - 100; 0 1 - 1 0 72; 0 0 1 - 1 37; - 1 0 0 1 - 9];
RA = rank(A)
A1 = rref(A) % 按 enter 键得到矩阵 A 的简化行阶梯形
RA =
    3
A1 =
     1  0  0  - 1    9
     0  1  0  - 1  109
     0  0  1  - 1   37
     0  0  0    0    0
```

所以，$\begin{cases} x_1 = x_4 + 9, \\ x_2 = x_4 + 109, \\ x_3 = x_4 + 37. \end{cases}$

案例 3 如图 6-3 所示的双杆系统中，杆 1 的重量 $G_1 = 200$ N，长度 $L_1 = 2$ m，水平方向的夹角 $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$，杆 2 重量 $G_2 = 100$ N，长度 $L_2 = \sqrt{2}$ m，与水平方向的夹角 $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$，三个铰接点 A，B，C 所在平面垂直于水平面. 求杆 1，杆 2 在铰接点处所受到的力.

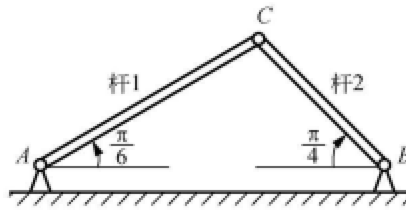

图 6-3 双杆系统

分析 在图 6-3 所示的双杆系统中，已知杆 1 重 $G_1 = 200$ N，长 $L_1 = 2$ m，与水平方向的夹角为 $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$，杆 2 重 $G_2 = 100$ N，长 $L_2 = \sqrt{2}$ m，与水平方向的夹角为 $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$，三个铰接点 A，B，C 所在平面垂直与水平面. 求杆 1，杆 2 在铰接点处所受到的力.

假设两杆都是均匀的，在铰接点处的受力情况如图 6-4 所示.

对于杆 1

水平方向受到的合力为零即 $N_1 - N_3 = 0$，故 $N_1 = N_3$.

竖直方向受到的合力为零即 $N_2 + N_4 - G_1 = 0$，故 $N_2 + N_4 = G_1$.

以点 A 为支点的合力矩为零即 $(L_1 \sin\theta_1)N_3 + (L_1 \cos\theta_1)N_4 - \left(\frac{1}{2}L_1 \cos\theta_1\right)G_1 = 0$，故

$$(L_1 \sin\theta_1)N_3 + (L_1 \cos\theta_1)N_4 = \left(\frac{1}{2}L_1 \cos\theta_1\right)G_1.$$

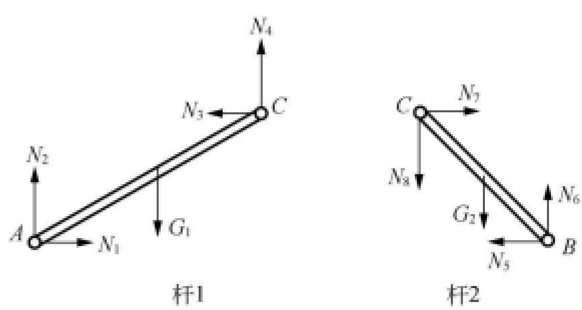

图 6-4 两杆受力图解

对于杆 2，类似地有

$$N_5 = N_7, \ N_6 = N_8 + G_2, \ (L_2 \sin\theta_2)N_7 = (L_2 \cos\theta_2)N_8 + \left(\frac{1}{2}L_2 \cos\theta_2\right)G_2.$$

此外还有 $N_3=N_7$，$N_4=N_8$. 于是将上述 8 个等式联立起来得到关于 N_1，N_2，…，N_8 的线性方程组

$$\begin{cases} N_1-N_3=0, \\ N_2+N_4=G_1, \\ \qquad \vdots \\ N_4-N_8=0. \end{cases}$$

在 MATLAB 命令窗口输入以下命令

```
≫G1 = 200; L1 = 2; thetal = pi/6; G2 = 100; L2 = sqrt(2);
theta2 = pi/4;
≫A = [1, 0, - 1, 0, 0, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0; 0, 0, L1 × sin(thetal),
L1 × cos(thetal), 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 0, 1, 0, - 1, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0,
- 1; 0, 0, 0, 0, 0, 0,
L2 × sin(theta2), - L2 × cos(theta2); 0, 0, 1, 0, 0, 0, - 1, 0; 0, 0, 0, 1, 0,
0, 0, - 1];
≫b = [0;G1;0.5 × L1 × cos(thetal) × G1;0;G2;0.5 × L2 × cos(theta2) × G2;0; 0]
≫x = b/A;x,
MATLAB 执行后得
ans
= 95.096 2  154.903 8  95.096 2  45.096 2  95.096 2  145.096 2  95.096 2  45.096 2.
```

案例 4　现有木工、电工、油漆工各一人，他们相互装修每家的房子，工作的天数见表 6-1.

表 6-1　　**工作的天数**　　单位：d

家	木工	电工	油漆工
木工家	2	1	6
电工家	4	5	1
油漆工家	4	4	3

他们签订协议如下：(1) 每人工作 10 d(包括在自己家的日子)；(2) 每人的日工资在 60 ~ 80 元之间；(3) 日工资数应使每人的总收入和总支出相等. 求每人的日工资.

分析　事实上各人都不必付自己工资，各家应付工资和各人应得收入见表 6-2，这时各家应付工资和各人应得收入相等. x，y，z 分别是木工，电工，油漆工的日工资.

表 6-2　　各家应付工资和各人应得收入　　单位:元

家	木工	电工	油漆工	各家应付工资
木工家	0	y	$6z$	$y+6z$
电工家	$4x$	0	z	$4x+z$
油漆工家	$4x$	$4y$	0	$4x+4y$
个人应得收入	$8x$	$5y$	$7z$	

解　设木工,电工,油漆工的日工资分别是 x, y, z,各人都不必付自己工资,则各家应付工资和各人应得收入相等.由此可得

$$\begin{cases} y+6z=8x, \\ 4x+z=5y, \\ 4x+4y=7z. \end{cases} \quad 即 \begin{cases} -8x+y+6z=0, \\ 4x-5y+z=0, \\ 4x+4y-7z=0. \end{cases}$$

在 MATLAB 命令窗口输入以下命令

```
>>A = [- 8, 1, 6; 4, - 5, 1; 4, 4, - 7];
X = null(A, " r");format rat,X
X =
        31/36
        8/9
        1
```

上述齐次线性方程组的同解为

$$X=k\left(\frac{31}{36}, \frac{8}{9}, 1\right)^{\mathrm{T}}.$$

根据题中的第二个条件“每人日工资在 60 ～ 80 元之间”,得到

$$60 \leqslant \frac{31}{36}k < \frac{8}{9}k \leqslant 80, \quad 即 \frac{2\,160}{31} \leqslant k \leqslant 90.$$

所以,木工、电工、油漆工的日工资分别为$\frac{31}{36}k$ 元,$\frac{8}{9}k$ 元,k 元.

案例 5　某公司生产 A, B, C 三种产品,每种产品的成本分为三类:原料成本、人工成本、管理与其他成本.每一类成本中,给出生产单位产品所需要的成本估计量,同时给出每季度生产每种产品的数量.以上数据见表 6-3 和表 6-4.计算每季度生产三种产品的每类成本值.

表 6-3 **单位产品需要的成本** 单位:元

成本	产品		
	A	B	C
原料	0.10	0.30	0.15
工资	0.30	0.40	0.25
管理与其他	0.10	0.20	0.15

表 6-4 **每季度的产量** 单位:件

产品	季度			
	春季	夏季	秋季	冬季
A	4 000	4 500	4 500	4 000
B	2 000	2 600	2 400	2 200
C	5 800	6 200	6 000	6 000

分析

春季生产三种产品的原料成本值是:$0.10\times 4\,000+0.30\times 2\,000+0.15\times 5\,800$.

夏季生产三种产品的原料成本值是:$0.10\times 4\,500+0.30\times 2\,600+0.15\times 6\,200$.

秋季生产三种产品的原料成本值是:$0.10\times 4\,500+0.30\times 2\,400+0.15\times 6\,000$.

冬季生产三种产品的原料成本值是:$0.10\times 4\,000+0.30\times 2\,200+0.15\times 6\,000$.

春季生产三种产品的工资成本值是:$0.30\times 4\,000+0.40\times 2\,000+0.25\times 5\,800$.

夏季生产三种产品的工资成本值是:$0.30\times 4\,500+0.40\times 2\,600+0.25\times 6\,200$.

秋季生产三种产品的工资成本值是:$0.30\times 4\,500+0.40\times 2\,400+0.25\times 6\,000$.

冬季生产三种产品的工资成本值是:$0.30\times 4\,000+0.40\times 2\,200+0.25\times 6\,000$.

春季生产三种产品的管理与其他成本值是:$0.10\times 4\,000+0.20\times 2\,000+0.15\times 5\,800$.

夏季生产三种产品的管理与其他成本值是:$0.10\times 4\,500+0.20\times 2\,600+0.15\times 6\,200$.

秋季生产三种产品的管理与其他成本值是:$0.10\times 4\,500+0.20\times 2\,400+0.15\times 6\,000$.

冬季生产三种产品的管理与其他成本值是:$0.10\times 4\,000+0.20\times 2\,200+0.15\times 6\,000$.

实际上,每季度生产三种产品的每类成本值就是将表 6-3 中三种产品的三类成本分别与表 6-4 中每季度的产量对应数字相乘再相加.所以,用到矩阵乘法运算的知识.

解 表 6-3 对应的矩阵为 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.3 & 0.15\\ 0.3 & 0.4 & 0.25\\ 0.1 & 0.2 & 0.15\end{pmatrix}$,

表 6-4 对应的矩阵为 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}4\,000 & 4\,500 & 4\,500 & 4\,000\\ 2\,000 & 2\,600 & 2\,400 & 2\,200\\ 5\,800 & 6\,200 & 6\,000 & 6\,000\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{MN}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.3 & 0.15\\ 0.3 & 0.4 & 0.25\\ 0.1 & 0.2 & 0.15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\,000 & 4\,500 & 4\,500 & 4\,000\\ 2\,000 & 2\,600 & 2\,400 & 2\,200\\ 5\,800 & 6\,200 & 6\,000 & 6\,000\end{pmatrix}.$$

在 MATLAB 命令窗口输入以下命令

```
≫A=[0.1 0.3 0.15; 0.3 0.4 0.25; 0.1 0.2 0.15];
≫B=[4 000 4 500 4 500 4 000; 2 000 2 600 2 400 2 200; 5 800 6 200 6 000 6 000];
≫A*B
ans =
        1 870   2 160   2 070   1 960
        3 450   3 940   3 810   3 580
        1 670   1 900   1 830   1 740
```

每季度生产三种产品的每类成本值见表 6-5.

表 6-5 **每季度的每类成本** 单位:元

成本	春季	夏季	秋季	冬季
原料	1 870	2 160	2 070	1 960
工资	3 450	3 940	3 810	3 580
管理与其他	1 670	1 900	1 830	1 740

6.1.1 *n* 元线性方程组

在平面解析几何中,两条直线的位置关系从几何角度考虑,有平行、相交、重合三种,相应地,两条直线的交点有下列三种情况:无交点,一个交点和无数个交点. 两条直线的位置关系从代数角度考虑,利用两条直线方程构成的方程组,对方程组求解,也对应有下列三种情况:无解,一组解和无数组解.

引例 1

(1) 直线 $2x+y=5$ 和直线 $2x+y=1$ 平行,无交点,

即方程组 $\begin{cases}2x+y=5,\\ 2x+y=1\end{cases}$ 无解.

(2) 直线 $2x+y=3$ 和直线 $2x-y=5$ 相交,且有一个交点$(2,-1)$,

即方程组 $\begin{cases}2x+y=3,\\ 2x-y=5.\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\ y=-1.\end{cases}$

(3) 直线 $2x+y=1$ 和直线 $6x+3y=3$ 重合,有无数个交点,

即方程组 $\begin{cases}2x+y=1,\\ 6x+3y=3\end{cases}$ 有无数组解.

以上每个方程都是含有两个未知数,且未知数的次数都是 1 次,统称为二元一次方程.二元一次方程构成的方程组称为二元一次方程组.

引例 2

$\begin{cases}3x+2y-7z=15,\\4x-y+2z=15,\\2x+3y-z=-4\end{cases}$ 中的每一个方程都是含有三个未知数,且未知数的次数都是 1 次的三元一次方程.三元一次方程构成的方程组称为三元一次方程组.

引例 3

同样地,$\begin{cases}a+b+c+d=22,\\a+b-c+2d=29,\\a-b+c-3d=11\end{cases}$ 是四元一次方程构成的方程组,称之为四元一次方程组.

我们把上面的二元一次方程,三元一次方程,二元一次方程组,三元一次方程组,四元一次方程组做进一步的推广,来学习 n 元线性方程和 n 元线性方程组.

定义 1 设 $a_1, a_2, \cdots, a_j, \cdots, a_n, b_1$ 都是常数,$x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots, x_n$ 是未知数,则表达式

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_jx_j+\cdots+a_nx_n=b_1 \tag{6.1.1}$$

称式(6.1.1)为 ***n* 元线性方程**.其中常数 a_j 是未知数 x_j 的系数,$j=1, 2, 3, \cdots, n$,b_1 是常数项.

定义 2 对于 n 元线性方程式(6.1.1)$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_jx_j+\cdots+a_nx_n=b_1$

如果存在 n 个常数 $c_1, c_2, \cdots, c_j, \cdots, c_n$,且 $a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_jc_j+\cdots+a_nc_n=b_1$,显然,$x_1=c_1, x_2=c_2, \cdots, x_j=c_j, \cdots, x_n=c_n$.

则称 $\begin{cases}x_1=c_1,\\x_2=c_2,\\\quad\vdots\\x_j=c_j,\\\quad\vdots\\x_n=c_n\end{cases}$ 是线性方程式(6.1.1)的一个解.

定义 3 由 m 个 n 元线性方程构成的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1j}x_j+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2j}x_j+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\quad\vdots\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\vdots\\a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ij}x_j+\cdots+a_{in}x_n=b_i,\\\quad\vdots\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mi}x_i+\cdots+a_{mn}x=b_m\end{cases} \tag{6.1.2}$$