全国高职高专系列规划教材

高职应用数学

（上册）

宋剑萍　蔡云波　主编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

全国高职高专系列规划教材

高职应用数学

（上册）

主　编　宋剑萍　蔡云波

副主编　李洁琼　陈禹默　胡　刚

崔　亚　赵　珊

策　划　蔡云波

主　审　宋剑萍

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本教材适合高职学生和高技能应用型人才的学习使用，分上册和下册出版.

教材上册为集合论、函数、极限与连续、空间解析几何、导数与微分共5章内容.下册为线性代数、积分、常微分方程、概率与统计共4章内容.每章都配有专业案例、课后提升、知识小结框图和能力提升.通过手机扫描二维码，可观看微课视频和阅读数学文化资料.

图书在版编目(CIP)数据

高职应用数学.上册 / 宋剑萍，蔡云波主编. —上海：同济大学出版社，2019.4

ISBN 978-7-5608-6175-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①宋… ②蔡… Ⅲ.①应用数学-高等职业教育-教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第054088号

全国高职高专系列规划教材

高职应用数学(上册)

宋剑萍　蔡云波　主编

责任编辑 张崇豪　**责任校对** 徐春莲　**封面设计** 陈益平

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021-65985622)

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　常熟市大宏印刷有限公司

开　　本　710mm×960mm　1/16

印　　张　12

字　　数　240 000

版　　次　2019年4月第1版　2019年4月第1次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-6175-3

定　　价　39.00元

前　言

“全国高职高专系列规划教材”是根据教育部制定的三年制高职教育基础课程教学的基本要求，在总结交流多所院校数学课程教学改革经验的基础上，由多名从事数学教学一线的教师和参加国内、国际大学生数学建模竞赛的指导教师共同编写而成.

本教材根据高素质技能人才对数学知识的实际要求，力求贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度，以手工演算和科学计算工具为手段，以基本概念、基本运算为要求”的原则，融工科类、经济类、计算机类等数学内容为一体.

1. 在内容的编排上，以案例—数学概念—基本运算—应用为主线，注重学生对基本概念和基本运算的掌握，减少繁琐的推理、计算和证明，同时利用数学软件MATLAB，LINGO，SPSS解答例题，降低机械性、技巧性运算的要求，帮助高职学生克服在数学运算上的困难.

2. 在信息化教学手段的应用上，将知识难点和重点制作成微课视频；为培养学生的文化素养，收集了数学知识来源和数学家介绍等阅读材料，这些视频和阅读材料均转换成二维码信息，学生用手机扫描二维码，就可以观看和阅读.

3. 在案例选择上，结合各专业的特点，力求做到知识与应用紧密结合，理论学习和能力培养相得益彰.

4. 在例题、习题的选取上，做到由浅入深、由易到难，为学生搭建合适的台阶.

5. 在内容结构上，注意与现行的高中及中职教学内容相衔接，并借鉴了国内外教材的优点.

本教材重点强调数学知识在生产、生活和学生专业课程中的应用，注重学生职业核心能力的培养，突出高职高专教育培养高素质技能型、应用型人才的数学课程设置的教学理念.

本教材的编写任务分配是：胡刚编写第1章和第9章的9.1；宋剑萍编写第6章的6.1和6.2；李洁琼编写第2章，第3章，第4章和第6章的6.3；崔亚编写第5章；陈禹默编写第7章，第9章的9.2，9.3和9.4；赵珊编写第8章，蔡云波负责整本书的二维码信息.

本教材由西安职业技术学院宋剑萍和蔡云波担任主编,蔡云波负责策划,宋剑萍最后主审.西安职业技术学院李洁琼、陈禹黖、胡刚、崔亚、赵珊为副主编.

在本教材的编写过程中,得到了参编学校各级领导的关心和支持,参阅了有关的文献和教材,在此,对相关作者一并表示衷心感谢.

由于作者水平有限,教材中不免有疏漏错误之处,恳请使用本教材的师生多提意见和建议,以便更正.

编　者

2019 年 4 月

目　录

第 1 章　集 合 论

1.1　集合的概念和运算

集合论的发展

集合是什么？通俗地说，它是由一些元素组成的集体，是一些确定而又可分的“物”的集体.集合并不指具体的“物”，而是由物的集体所组成的新对象.20 世纪以来的研究表明，不仅微积分的基础——实数理论奠定在集合论的基础上，而且各种复杂的数学概念都可以用“集合”概念定义出来，而各种数学理论又都可以“嵌入”集合论之内.

集合论是现代数学中重要的基础理论，现代数学几乎所有的分支都会用到集合这个概念.它的概念和方法已经渗透到代数、拓扑和分析等许多数学分支以及物理学和质点力学等一些自然科学部门，为这些学科提供了奠基的方法，改变了这些学科的面貌.几乎可以说，如果没有集合论的观点，很难对现代数学获得一个深刻的理解.所以集合论的创立不仅对数学基础的研究有重要意义，而且对现代数学的发展也有深远的影响.

1.1.1　集合的概念及其表示

1.1.1.1　集合的概念

“集合”是集合论中的一个原始的概念，因此它不能被精确地定义出来.一般地说，把具有某种共同性质的许多事物，汇集成一个整体，就形成一个**集合**.构成这个集合的每一个事物称为这个集合的一个成员（或一个**元素**），构成集合的这些成员可以是具体东西，也可以是抽象东西.例如：教室内的桌椅；图书馆的藏书；全国的高等学校；自然数的全体；程序设计语言 C 的基本字符的全体等均分别构成一个集合.通常用大写的英文字母表示集合的名称；用小写的英文字母表示元素.若元素 a 属于集合 A 记作 $a \in A$，读作“a 属于 A”.否则，若 a 不属于 A，就记为 $a \notin A$，读作“a 不属于 A”.一个集合，若其组成集合的元素个数是有限的，则称作“**有限集**”，否则就称作“**无限集**”.

集合的表示方法有两种：一种是列举法又称枚举法，它是将集合中的元素全部列

出来，元素之间用逗号“，”隔开，并用花括号“{}”在两边括起来，表示这些元素构成整体.

例 1　$A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{1, 2, 3, \cdots\}$.

$D=\{$桌子，台灯，钢笔，计算机，扫描仪，打印机$\}$，$E=\{a, a^2, a^3, \cdots\}$.

集合的另一种表示方法叫做谓词法又叫叙述法，它是利用一项规则，概括集合中元素的属性，以便决定某一事物是否属于该集合的方法. 设 x 为某类对象的一般表示，$P(x)$ 为关于 x 的一个命题，我们用 $\{x \mid P(x)\}$ 表示“使 $P(x)$ 成立的对象 x 所组成的集合”，其中竖线“|”前写的是对象的一般表示，右边写出对象应满足(具有)的属性.

例 2　全体正奇数集合表示为 $S_1=\{x \mid x=2n+1, n$ 为全体整数$\}$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$. 例如，方程 $x^2+1=0$ 的实根的集合是**空集**.

1.1.1.2　集合与集合间的关系

集合间的关系有三种：相等关系，集合的包含关系，集合的**子集**.

定义 1　设 A，B 是任意两个集合，如果 A 中的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，或 A 包含于 B 内，或 B 包含 A. 记作 $A \subseteq B$，或 $B \supseteq A$. 即

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B),$$

可等价地表示为　$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \notin B \rightarrow x \notin A)$.

例 3　设 **N** 为自然数集合，**Q** 为一切有理数组成的集合. **R** 为全体实数集合，**C** 为全体复数集合，则 $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{C}$，

$$\{1\} \subseteq \boldsymbol{N}, \{1, 1.2, 9.9\} \subseteq \boldsymbol{Q}, \{\sqrt{2}, \pi\} \subseteq \boldsymbol{R}.$$

如果 A 不是 B 的子集，则记为 $A \not\subset B$（读作 A 不包含在 B 内），显然，

$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x((x \in A) \wedge (x \notin B))$.（文中所有“$\wedge$”表示并且）

集合间的包含关系“$\subseteq$”具有下述性质：

1. 自反性　$A \subseteq A$；
2. 传递性　$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$.

证明　采用逻辑演绎的方法证明.

定义 2　如果集合 A 的每一元素都属于集合 B，而集合 B 中至少有一元素不属于 A，则称 A 为 B 的真子集，记作 $A \subset B$.

即　$A \subset B \Leftrightarrow \forall x((x \in A) \Rightarrow (x \in B)) \wedge \exists x((x \in B) \wedge (x \notin A))$.

例如：$\{a, b\}$ 是 $\{a, b, c\}$ 的真子集；**N** 是 **Q** 的真子集，**Q** 是 **R** 的真子集；**R** 是 **C** 的真子集.

注意符号“$\in$”和“$\subseteq$”在概念上的区别，“$\in$”表示元素与集合间的“属于”关系，

“$\subseteq$”表示集合间的“包含”关系.

定理 1 集合 $A=B$ 的充分必要条件是：$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

证明 略.

定理 2 对于任一集合 A，$\varnothing\subseteq A$，且空集是唯一的.

证明 假设 $\varnothing\subseteq A$ 为假，则至少存在一个元素 x，使 $x\in\varnothing$ 且 $x\notin A$，因为空集 $\varnothing$ 不包含任何元素，所以这是不可能的.

设 $\varnothing$ 与 $\varnothing'\subseteq\varnothing$ 都是空集，由上述可知，$\varnothing'\subseteq\varnothing$ 且 $\varnothing\subseteq\varnothing'$，根据定理 1 知 $\varnothing'=\varnothing$，所以，空集是唯一的.

注意 $\varnothing\neq\{\varnothing\}$，$\{\varnothing\}$ 是一个以空集为元素的集合.

例 4 设 $A=\{2, 3\}$，B 为方程 $x^2-5x+6=0$ 的根组成的集合，则 $A=B$.

定理 1 指出了一个重要原则：要证明两个集合相等，即要证明每一个集合中的任一元素均是另一集合的元素. 这种证明是靠逻辑推理理论，而不是靠直观. 证明两个集合相等是应该掌握的方法.

定义 3 在一定范围内，如果所有集合均为某一集合的子集，则称该集合为全集，记作 E.

注意 全集的概念相当于论域，只包含与讨论有关的所有对象，并不一定包含一切对象与事物. 例如：在初等数论中，全体整数组成了全集；方程 $x^2+1=0$ 的解集合，在全集为实数集时为空集，而全集为复数集时解集合就不再是空集，此时解集合为 $\{i, -i\}$，$i^2=1$.

课后提升

1. 填空题

(1) 2____$\{x \mid x$ 为所有正整数$\}$.　　(2) {所有奇数}____$\{1, 3, 5, 7\}$.

(3) $\{2, 4, 6, 8\}$____$\{x \mid x$ 为所有偶数$\}$.　　(4) {所有整数}____{所有有理数}.

2. 用描述法写出集合：所有能被 3 整除的数.

答　案

1. (1) $\in$； (2) $\supset$； (3) $\subset$； (4) $\subset$.

2. $\{x \mid x\div 3$ 余 $0, x\in\mathbf{R}\}$.

1.1.2 集合的运算

集合的运算，就是以集合为对象，按照确定的规则得到另外一些新集合的过程. 给定集合 A，B，可以通过集合的并($\cup$)、交($\cap$)、相对补($-$)、绝对补($\sim$)运算产生新的集合.

1.1.2.1 集合并(∪)运算

定义 1 设 A，B 为任意两集合，所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 和B 的并集. 记作 $A\cup B$，即：$A \cup B=\{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$（文件所有“∨”表示或者），如图 1-1 所示.

例 1 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{2, 4, 5, 6\}$. 则 $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

注意 集合是由互不相同元素组成的，在 $A\cup B$ 中 2，4 各写一次，不能重复写.

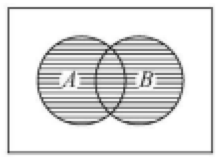

图 1-1 并集的文氏图

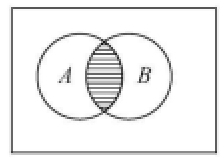

图 1-2 交集的文氏图

1.1.2.2 集合的交(∩)运算

定义 2 设任意两个集合 A 和 B，由集合 A 和 B 共同元素组成的集合，称为集合 A 和 B 的交集，记作 $A\cap B$，即：$A \cap B= \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$，如图 1-2 所示.

例 2 设 $A=\{a, b, c, d, e\}$，$B=\{a, c, e, f\}$ 则 $A \cap B=\{a, c, e\}$.

例 3 设 $A=\{X \mid$ 高等学校的本科学生$\}$，$B=\{X \mid$ 高等学校计算机专业的学生$\}$，则

$$A \cap B=\{X \mid \text{高等学校计算机专业的本科学生}\}.$$

1.1.2.3 集合的补运算

定义 3 设 A，B 为任意两集合，由属于 A 而不属于B 的一切元素构成的集合，称为 A 与 B 的差运算（又称 B 对于 A 的补运算，或相对补），记为 $A-B$，$A-B$ 称为 A 与 B 的差集（或 B 对于 A 的补集）.

$$A-B=\{x \mid (x \in A) \cap (x \notin B)\}=A \cap \bar{B}.$$

若 $A=E$，对任意集合 B 关于 E 的补集 $E-B$，称为集合 B 的绝对补，记作 $\bar{B}$.

$\bar{B}=E-B=\{x \mid (x \in E) \cap (x \notin B)\}$，如图 1-3 所示.

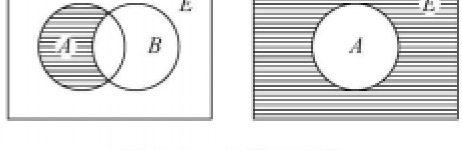

图 1-3 差集和补集

例 4 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 4, 7, 9\}$.

则 $A-B=\{3, 5\}$.

例 5 设 A 是素数集合,B 是奇数集合,则 $A-B=\{2\}$.

1.1.2.4 集合运算具有的规律

定理 1 设 A, B, C 为任意三个集合,则

(1) 交换律:$A \cap B=B \cap A$, $A \cup B=B \cup A$;

(2) 结合律:$(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$;

(3) 分配律:$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(4) 对偶律:$\overline{A \cup B}=\bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B}=\bar{A} \cup \bar{B}$.

课后提升

1. 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 3, 4, 7, 9\}$, 全集 $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. 计算下列式子:

(1) $A \cup B$; (2) $A \cap B$; (3) $A \cup \bar{B}$; (4) $\overline{A \cup B}$.

2. 判断题

(1) 若 $a \notin A \cup B$,则 $a \notin A$ 且 $a \notin B$.

(2) 若 $A \cap B=\varnothing$,则 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$.

答 案

1. (1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$; (2) $\{1, 3, 4\}$; (3) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$; (4) $\{6, 8, 10\}$.

2. (1) 对; (2) 错.

1.2 笛卡尔积

在现实世界中,事物不是孤立的,事物之间都有联系,单值依赖联系是事物之间联系中比较简单的,比如说日常生活中事物的成对出现,而这种成对出现的事物具有一定的顺序,例如,上、下;大、小;左、右;父、子;高、矮;等等. 通过这种联系,研究事物的运动规律或状态变化. 世界是复杂的,运动也是复杂的,事物之间的联系形式是各种各样的,不仅有单值依赖关系,更有多值依赖关系. "关系"这个概念就提供了一种描述事物多值依赖的数学工具. 这样,集合,映射关系等概念是描述自然现象及其相互联系的有力工具,为建立系统的数学模型提供了描述工具和研究方法. 映射是关系的一种特例.

1.2.1 序偶

定义 1 由两个元素 x 和 y(允许 $x=y$)按一定的顺序排列成的二元组叫做有序对(也称序偶),记作$\langle x, y\rangle$. 其中 x 是它的第一元素,y 是它的第二元素.

一般来说,序偶具有以下特点:

1. 序偶可以看成是两个具有固定次序的客体组成的有序对,常常用它来表达两个客体之间的关系,它与一般集合不同的是序偶具有确定的次序. 在集合中 $\{a, b\}=\{b, a\}$,但对序偶 $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$(这里 $a \neq b$);

2. 两个序偶相等 $\langle x, y\rangle=\langle u, v\rangle$,当且仅当 $x=u$, $y=v$;

3. 序偶$\langle a, b\rangle$中两个元素不一定来自同一集合,它们可以代表不同类型的事物. 如 a 代表操作码,b 代表地址码,则序偶$\langle a, b\rangle$代表一条单地址指令;当然也可以用 b 代表操作码,a 代表地址码,则序偶$\langle a, b\rangle$也代表一条单地址指令. 但上述约定,已经确定,序偶的次序就不能再变化了.

1.2.2 笛卡尔积

定义 2 设 A, B 为任意两个集合,则称集合
$\{\langle x, y\rangle \mid (x \in A)$ 且$(y \in B)\}$ 为 A, B 的笛卡尔积,记为 $A \times B$, 即

$$A \times B=\{\langle x, y\rangle \mid (x \in A) \text{ 且} (y \in B)\}.$$

注意 1. $A \times B$ 与 A, B 的次序有关,一般地 $A \times B \neq B \times A$, 即交换律不成立.

2. 若 $A \subseteq S$, $B \subseteq S$ 则 $A \cup B$, $A \cap B$, $A-B$, $A \oplus B$, $\bar{A}$ 都是 S 的子集,但是 $A \times B \not\subset S$.

3. 对任意集合 A,有 $A \times \varnothing=\varnothing \times A=\varnothing$.

4. 笛卡尔积不满足结合律,即 $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$,

实际上,当 $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $C \neq \varnothing$ 时,

$$(A \times B) \times C=\{\langle\langle a, b\rangle, c\rangle \mid (a \in A) \text{ 且}(b \in B) \text{ 且}(c \in C)\},$$
$$A \times (B \times C)=\{\langle a,\langle b, c\rangle\rangle \mid (a \in A) \text{ 且}(b \in B) \text{ 且}(c \in C)\}.$$

按有序对相等的定义知,笛卡尔积的结合律不成立.

根据笛卡尔积中元素相等的定义,可知, $A \times B \times C$ 和 $A \times (B \times C)$, $A \times (B \times C)$ 是彼此不相等的集合,但是为了方便起见,通常约定一般笛卡尔积从左到右加括号,即 $(((A \times B) \times C) \times D)$. 在这个约定下,省去括号而简写为 $A \times B \times C \times D$.

例 1 设 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b\}$, $C=\{0\}$, $D=\varnothing$, 则

$A \times B=\{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}$;

$B \times A=\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 3\rangle\}$;

$A \times C = \{\langle 1, 0\rangle, \langle 2, 0\rangle, \langle 3, 0\rangle\}$；

$C \times A = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle\}$；

$A \times D = \varnothing$, $B \times D = \varnothing$.

笛卡尔积运算的性质：

定理 1 设 A, B, C 为任意三个集合，则笛卡尔积运算对集合的并、交、差运算分别满足分配律，即

(1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$；

(2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$；

(3) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$；

(4) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$；

(5) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$；

(6) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

证明 (1)的证明：对于任意$\langle x, y\rangle$

$\langle x, y\rangle \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A)$ 且$(y \in B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A)$ 且$((y \in B)$ 且$(y \in C)) \Leftrightarrow ((x \in A)$ 且$(y \in B))$ 且$((x \in A)$ 且$(y \in C)) \Leftrightarrow ((\langle x, y\rangle \in A \times B))$ 或$(\langle x, y\rangle \in A \times C) \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$，所以

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

(2)～(6) 略.

定理 2 设 A, B, C 为任意三个集合，$C \neq \varnothing$，则

(1) $A \subseteq B$ 的充要条件是 $A \times C \subseteq B \times C$；

(2) $A \subseteq B$ 的充要条件是 $C \times A \subseteq C \times B$.

证明 略.

定理 3 设 A, B, C, D 为四个非空集合，则

$A \times B \subseteq C \times D$ 当且仅当 $A \subseteq C$, $B \subseteq D$.

证明 必要性，即证明 $A \times B \subseteq C \times D \Rightarrow A \subseteq C$, $B \subseteq D$

$\forall a \in A$, $\forall b \in B$.

$\langle a, b\rangle \in A \times B \Rightarrow \langle a, b\rangle \in C \times D \Rightarrow (a \in C)$ 且$(b \in D)$，

所以，$A \subseteq C$, $B \subseteq D$.

充分性，即证明　$A \subseteq C$, $B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$，

对于任意 $\langle a, b\rangle$，

$\langle a, b\rangle \in A \times B \Leftrightarrow (a \in A)$ 且$(b \in B) \Rightarrow (a \in C)$ 且$(b \in D) \Leftrightarrow \langle a, b\rangle \in C \times D$，

所以，$A \times B \subseteq C \times D$.

定义 3 设 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 是集合 $(n \geqslant 2)$，它们的 n 阶笛卡尔积，记作 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$，其中

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle \mid (x_1 \in A_1)$ 且$(x_2 \in A_2)$ 且 $\cdots$ 且

$(x_n \in A_n)\}$，

当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$ 时，它们的笛卡尔积简记为 A^n.

例如 设 $A = \{a, b\}$，则

$A^3 = \{\langle a, a, a\rangle, \langle a, a, b\rangle, \langle a, b, a\rangle, \langle a, b, b\rangle, \langle b, b, b\rangle, \langle b, b, a\rangle, \langle b, a, b\rangle, \langle b, a, a\rangle\}$.

课后提升

1. 若集合 $A = \{1, 3\}$，集合 $B = \{y, z\}$ 计算下列集合的笛卡尔积.

(1) $A \times B$； (2) $A \times (B \times A)$； (3) A^3.

答 案

1. (1) $\{\langle 1, y\rangle, \langle 1, z\rangle, \langle 3, y\rangle, \langle 3, z\rangle\}$；

(2) $\{\langle 1, \langle y, 1\rangle\rangle, \langle 1, \langle y, 3\rangle\rangle, \langle 1, \langle z, 1\rangle\rangle, \langle 1, \langle z, 3\rangle\rangle, \langle 3, \langle y, 1\rangle\rangle, \langle 3, \langle y, 3\rangle\rangle, \langle 3, \langle z, 1\rangle\rangle, \langle 3, \langle z, 3\rangle\rangle\}$；

(3) $\{\langle 1, 1, 1\rangle, \langle 1, 1, 3\rangle, \langle 1, 3, 1\rangle, \langle 1, 3, 3\rangle, \langle 3, 1, 1\rangle, \langle 3, 3, 1\rangle, \langle 3, 1, 3\rangle, \langle 3, 3, 3\rangle\}$.

1.3 二元关系的概念与运算

1.3.1 二元关系的基本概念

所谓二元关系就是在集合中两个元素之间的某种相关性. 例如 A，B，C 三人进行一种比赛，如果任何两个人之间都要比赛一场，那么总共要比赛三场，假设这三场比赛的结果是：B 胜 A，A 胜 C，B 胜 C，把这个结果记为 $\{\langle B, A\rangle, \langle A, C\rangle, \langle B, C\rangle\}$，其中 $\langle x, y\rangle$ 表示 x 胜 y. 它表示了集合 $\{A, B, C\}$ 中元素之间的一种胜负关系. 再如，A，B，C 三个人和 α，β，γ，δ 四项工作，已知 A 可做 α 和 δ 工作，B 可做 δ 工作，C 可做 α 和 β 工作，那么任何工作之间的对应关系可以记作

$$R = \{\langle A, \alpha\rangle, \langle A, \beta\rangle, \langle B, \delta\rangle, \langle C, \alpha\rangle, \langle C, \beta\rangle\}$$

这是人的集合 $\{A, B, C\}$ 到工作集合 $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ 之间的关系.

定义 1 任一序偶的集合确定了一个二元关系 R，R 中任一序偶 $\langle x, y\rangle$ 可记作 $\langle x, y\rangle \in R$ 或 xRy. 不在 R 中的任一序偶 $\langle x, y\rangle$ 可记作 $\langle x, y\rangle \notin R$.

定义 2 设 A，B 为集合，$A \times B$ 的任意子集所定义的二元关系 R，称作从 A 到 B 的二元关系，当 $A = B$ 时，R 称作 A 上的二元关系. 即

$$R \subseteq A \times B,\ R = \{\langle x,\ y\rangle \mid x \in A_1 \subseteq A,\ y \in B_1 \subseteq B\}.$$

称 A_1 为二元关系 R 的前域，记为 $A_1 = \mathrm{dom}\ R = \{x \mid \exists y \in B, \langle x,\ y\rangle \in R\}$；

称 B_1 为二元关系 R 的值域，记为 $B_1 = \mathrm{range}\ R = \{y \mid \exists x \in A, \langle x,\ y\rangle \in R\}$；

R 的前域和值域一起称作 R 的域，记作 $\mathrm{FLD} = \mathrm{dom}\ R \cup \mathrm{range}\ R$

从关系的定义可以看出：$\mathrm{dom}\ R \subseteq A$，$\mathrm{range}\ R \subseteq B$.

今后把 $A\times B$ 的两个平凡子集称作 $A \times B$ 和$\varnothing$分别称作 A 到 B 的全关系和空关系，其中 $E_A = \{\langle x,\ y\rangle \mid (x \in A)$ 且$(y \in A)\} = A \times A$. 称 $I_A = \{\langle x,\ x\rangle \mid x \in A\}$ 为恒等关系.

当 $A = B$ 时，关系 R 是 $A \times B$ 的子集，这时称 R 为在 A 上的二元关系.

但是我们注意到：$R \subseteq A \times B \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B) = Z \times Z$（这里 $Z = A \cup B$），因此任一关系总可以限定某一集合上进行讨论.

如果 A 中有 n 个元素，那么 $A \times A$ 就有 n^2 个元素，那么 $A \times A$ 的子集有 2^{n^2} 个，每一个子集代表一个 A 上的关系，所以 A 上有 2^{n^2} 个不同的二元关系. 例如 $A = \{0,\ 1,\ 2\}$，则 A 上可以定义 $2^{3^2} = 512$ 个不同的关系.

例 1　设 $A = \{1,\ 2\}$，$B = \{2,\ 3,\ 4\}$，$R = \{\langle 1,\ 2\rangle,\ \langle 1,\ 4\rangle,\ \langle 2,\ 2\rangle\}$，则

$$\mathrm{dom}\ R = \{1,\ 2\},\ \mathrm{range}\ R = \{2,\ 4\}.$$

例 2　设 $\mathbf{R}$ 表示实数集，$R_1 = \{\langle x,\ y\rangle \mid xy \geqslant 1\}$，$R_2 = \{\langle x,\ y\rangle \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\}$，$R_3 = \{\langle x,\ y\rangle \mid y^2 \leqslant x\}$ 是 $R \times R$ 的三个子集，它们所代表的关系如下：

解　双曲线 $xy = 1$ 在第一象限线上和线右侧、第三象限线上和线左侧的点的横坐标与纵坐标符合关系 R_1.

圆心在坐标原点，半径为 3 的圆内和圆上的点的横坐标与纵坐标符合关系 R_2.

抛物线 $y^2 = x$ 线上和线的右侧点的横坐标与纵坐标符合关系 R_3.

例 3　设 $A = \{2,\ 3,\ 4\}$，$B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，$R = \{\langle x,\ y\rangle \mid x \in A,\ y \in B,\ x$ 整除 $y\}$，则

$$R = \{\langle 2,\ 2\rangle,\ \langle 2,\ 4\rangle,\ \langle 2,\ 6\rangle,\ \langle 3,\ 3\rangle,\ \langle 3,\ 6\rangle,\ \langle 4,\ 4\rangle\}.$$

1.3.1.1　二元关系的表示

1. 关系的矩阵表示

设给定两个集合 $A = \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m\}$ 和 $B = \{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n\}$，$R$ 为从 A 到 B 的二元关系，则对应于关系 R 有一个关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R = [r_{ij}]_{m\times n}$，其中

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \langle a_i,\ b_j\rangle \in R; \\ 0, & \langle a_i,\ b_j\rangle \notin R. \end{cases} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

例 4　设 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，写出集合 A 上大于关系“$>$”的关系矩阵.