湘教版

初中数学创新培优读本

CHUZHONG SHUXUE
CHUANGXIN PEIYOU DUBEN

邓革周　唐作明　编著

7年级

见数学之好玩　展数学之魅力　以创新之精神　起培优之效用

湖南教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

湘教版初中数学创新培优读本. 七年级/邓革周，唐作明编著. —长沙：湖南教育出版社，2016. 10

ISBN 978-7-5539-4414-2

Ⅰ. ①湘… Ⅱ. ①邓… ②唐… Ⅲ. ①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 221404 号

湘教版初中数学创新培优读本

七年级

责任编辑：甘　哲

责任校对：刘　源　殷静宇

湖南教育出版社出版发行(长沙市韶山北路 443 号)

网　　址：http://www.hneph.com

电子邮箱：hnjycbs@sina.com

微信号：多点学习

湖南省新华书店经销　湖南天闻新华印务有限公司印刷

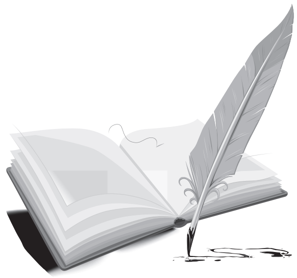
787×1092　16 开　印张：11.5　字数：250000

2016 年 10 月第 1 版　第 1 次印刷

ISBN 978-7-5539-4414-2

定　　价：25.00 元

前言



科学的生命在于创新精神，培养优秀人才的关键则在于培养受教育者的创新思维。对于可塑性极强的青少年，初中阶段的数学教育是培养学生创新思维的有效手段。对于初中学生来说，用自己的方法去解决一个数学问题时，或多或少展现了他们的创新能力。如果这种创新能力能引起他们的好奇心，能激发他们的兴趣，从而在他们的心中留下深刻的印象，这样的体验日积月累，就会养成善于思维的习惯，甚至影响到人的一生。因此，一个初中学生不能只把数学当作必修的知识，而应该把它当成人生最好的培养创新能力的手段。

一本好的初中数学教材，应该自始至终贯穿引导、培养创新思维这一主线，但因为教材的篇幅有限，它受到授课时数的严格控制，有些地方不得不择之过精，言之太略，所以还必须有一本好的配套课外读物。

这套创新培优读本就是为配合湘教版初中数学教材而编写的配套读物。

顾名思义，这套读本的目的是通过初中阶段的数学教育培养学生的创新思维，从而为培养优秀人才打下坚实的基础。它紧扣教材，与教学进度同步，对教材的内容发微导窍，提要钩玄，疑难处加以解释，省略处给予补充，与教材紧密配合，相得益彰。这套读本具有下述特点：

一、所选例题、习题特别强调命题理念与解题方法的创新。通过这些例题、

习题的训练，学生可以体会到在命题方式中如何调动知识，活学活用；在解题方法中，如何独具匠心，以简驭繁。

二、所选例题、习题都十分自然地体现出对文化素质的训练，不矫揉造作，不喧宾夺主，却能寓教于乐，使学生感到“数学好玩”，从而大大提高学生学习数学的兴趣。

三、所选例题、习题大多能与实际应用相结合，使学生从小就能体会到“数学之为用”，能有效地提高学生学习数学的自觉性和积极性。

这套读本自从 2007 年初版以来，十年的时间过去了。十年来深受读者欢迎，点赞有加，好评如潮。古人说“十年树木，百年树人”，这套读本，十年之间已经树立了自己的品牌；它也会像“随风潜入夜，润物细无声”那样，默默地，有效地为百年树人做出应有的贡献。

目录

七年级上册

目录

七年级下册

七年级【上册】

第1章 有理数

1.1 有理数、数轴、相反数、倒数、绝对值

知识精要

1. 在具有相反意义的一对量中，把其中的一种量用正数表示，而另一种量就用负数表示，它是在正数前面加上“－”. 0既不是正数，也不是负数.

2. 正整数、0、负整数统称为整数. 正分数和负分数统称为分数. 整数和分数统称为有理数. 0和一切正数统称为非负数.

3. 数轴

原点、正方向、单位长度是数轴的三要素，三者缺一不可. 有理数可以用数轴上的点表示，但数轴上的点并不都代表有理数，数轴是联系数与形的桥梁. 用数轴上的点表示的两个数，右边的数总比左边的数大.

4. 相反数

像5与－5这样，只有符号不同的两个数互为相反数. 除零以外，相反数总是一正一负，成对出现. 零的相反数是零.

表示互为相反数的两个数的点，在数轴上分别位于原点的两侧，而且到原点的距离相等.

(1)通常用a与$-a$表示一对相反数.

(2)若a与b互为相反数，则$a+b=0$，$|a|=|b|$.

(3)若$|a|=|b|$，则$a=b$或$a=-b$(a与b互为相反数).

5. 倒数. 若$ab=1$，则a，b互为倒数.

6. 绝对值

(1)绝对值的代数意义：正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，0的绝对值是0，即$|a|=\begin{cases}a(a>0),\\0(a=0),\\-a(a<0).\end{cases}$

(2)绝对值的几何意义：

①$|a|$的几何意义是数轴上数 a 对应的点与原点之间的距离.

②* $|a-b|$的几何意义是数轴上数 a 对应的点与数 b 对应的点之间的距离.

(3)绝对值的常用性质：

①$|a|\geqslant 0$；②$|-a|=|a|$；③$|a^2|=|a|^2=a^2$；④$|ab|=|a|\cdot|b|$；⑤$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$；⑥$|a|-|b|=|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

(4)去绝对值符号的常用方法：

①根据已知条件去绝对值符号；

②从数轴上读取信息去绝对值符号；

③运用“零点分段法”分类讨论去掉绝对值符号；

④双重绝对值一般先去里面的绝对值符号，再去外面的绝对值符号.

典例剖析

例 1 文具店、书店和玩具店依次坐落在一条东西走向的大街上，文具店在书店西边 20 m 处，玩具店位于书店东边 100 m 处，小明从书店沿街向东走了 40 m，接着又向东走了-60 m，此时小明的位置是 (　　)

A. 文具店　　B. 玩具店

C. 文具店西边 40 m　　D. 玩具店东边-60 m

分析 借助数轴数形结合进行分析.

解 依题意可画出示意图，如图 1－1 所示.

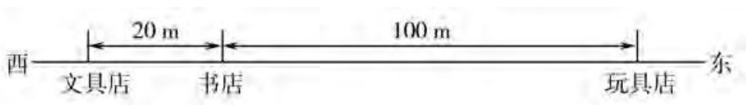


图 1－1

因为向东走了-60 m 就是向西走了 60 m，所以小明从书店向东走了 40 m，再向西走 60 m，结果是小明的位置在书店西边 20 m 处，也就是文具店的位置. 故选 A.

方法归纳

对于这类“具有相反意义的量”的走来走去问题，由于走的次数多了，很容易出错，而借助数轴数形结合地进行分析，往往直观明了，正确率高.

例 2 若 a，b 为有理数，且 $a>0$，$b<0$，$|b|>a$，试比较 a，b，$-a$，$-b$ 的大小.

分析 我们知道 a 与$-a$ ，b 与$-b$ 是两对相反数，在数轴上，表示互为相反数的点位

于原点的两旁，且到原点的距离相等．由 $a>0$，$b<0$，$|b|>a$ 可确定 a，b 在数轴上的位置，可以相应地标出 $-a$，$-b$ 在数轴上对应的位置，再通过“在数轴上表示的两个有理数，右边的数总比左边的数大”这一知识进行解答．

解 根据已知条件，将 a，$-a$，b，$-b$ 表示在数轴上，如图 1－2 所示．

图 1－2

由图可知，它们从小到大的顺序是 $b<-a<a<-b$．

方法归纳

对于有理数的大小比较，若根据已知条件从“数”的关系上入手比较困难时，通常借助于“形”（数轴）来解决．

例 3 若 a，b 互为相反数，c，d 互为倒数，m 的绝对值是 5，试求 $|a+b|+\frac{1}{cd}\div(2-5m+m^2)$ 的值．

解 由题意知 $a+b=0$，$cd=1$，$m=\pm5$．

当 $m=5$ 时，

$$|a+b|+\frac{1}{cd}\div(2-5m+m^2)=0+\frac{1}{1}\div(2-25+25)=\frac{1}{2}.$$

当 $m=-5$ 时，

$$|a+b|+\frac{1}{cd}\div(2-5m+m^2)=0+\frac{1}{1}\div(2+25+25)=\frac{1}{52}.$$

方法归纳

若 a，b 互为相反数，则 $a+b=0$；反之，若 $a+b=0$，则 a，b 互为相反数．若 c，d 互为倒数，则 $cd=1$，反之亦然．若 $|m|=n(n>0)$，则 $m=\pm n$．

例 4 已知 a，b，c 均为非零有理数，求 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$ 的值．

分析 因为当 $a\geqslant0$ 时，$|a|=a$；当 $a<0$ 时，$|a|=-a$，所以 $\frac{|a|}{a}$ 的值有 1，-1 两种可能，所以本题需对 a，b，c 的正负性进行讨论．但 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$ 具有轮换对称性，讨论时并不需要考虑哪个是正数，哪个是负数，只要考虑 a，b，c 共有几个正数，几个负数就可以了．

解 因为当 $a>0$ 时，$\frac{|a|}{a}=1$；当 $a<0$ 时，$\frac{|a|}{a}=-1$.

所以，本题根据 a，b，c 的正负情况有如下不同情形：

当 a，b，c 均为正数时，原式$=1+1+1=3$；

当 a，b，c 两正一负时，原式$=1+1-1=1$；

当 a，b，c 一正两负时，原式$=1-1-1=-1$；

当 a，b，c 均为负数时，原式$=-1-1-1=-3$.

> **小资料**
>
> **轮换对称式**
>
> 在含有多个变量的式子中，如果任意交换两个变量的位置后，所给式子形式不变，则称这个式子为轮换对称式. 如：$x^2+2xy+y^2$.

方法归纳

(1)当绝对值内所给式子的取值范围不确定时，要根据绝对值的性质分情况进行讨论；(2)本题只需考虑正负的个数是由于题目中所给式子具有轮换对称结构(即 a，b，c 的地位是平等的)，但是，如果将本题改为求 $\frac{|a|}{a}+\frac{2|b|}{b}+\frac{3|c|}{c}$ 的值时，就必须讨论 a，b，c 具体的符号了，因为此时 a，b，c 的地位是不平等的.

培优提升

例 5 (江苏省竞赛题)如图 1－3，在数轴上标出若干个点，每相邻两点距离 1 个单位长度，点 A，B，C，D 对应的数分别为 a，b，c，d，且 $d-2a=10$，那么原点应是 (　　)

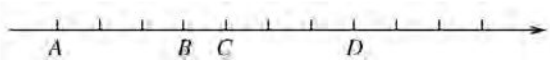


图 1－3

A. A 点　　B. B 点　　C. C 点　　D. D 点

分析 由图可知 D 到 A 的距离为 7，即 $d-a=7$，再由 $d-2a=10$，即可求出 a 的值，进而分析原点所在位置.

解 由图可知 $d-a=7$. 又 $d-2a=10$，即$(d-a)-a=10$，所以 $7-a=10$，解得 $a=-3$. 而 A 与 B 的距离为 3，故所求数轴原点应是 B 点. 故选 B.

方法归纳

像这类在数轴上确定点的位置的题，需要结合图形和已知条件，结合点与点之间的距离关系进行分析，数形结合就不难了.

例 6 （河南省竞赛题）如图 1－4，A，B，C，D，E 为数轴上的五个点，且 $AB=BC=CD=DE$，则与图中 P 点表示的数比较接近的一个数是 （　　）

A. -1　　B. 1　　C. 3　　D. 5

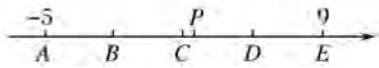


图 1－4

分析 观察数轴可知，$AE=14$，从而得到 $AB=BC=CD=DE=\frac{14}{4}=3.5$，则 C 点表示数 2，D 点表示数 5.5，因此，与 P 点表示的数最接近的整数是 3.

解 选 C.

方法归纳

利用数轴提供的信息，求出 AE 的长度是解本题的突破口.

例 7 （"灵通杯"竞赛题）如果 a，b，c，d 为互不相等的有理数，且 $|a-c|=|b-c|=|d-b|=1$，那么 $|a-d|$ 等于 （　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

分析 已知 $b\neq c$，可设 $b<c$. 由于 $|a-c|=|b-c|$，所以 $a-c$ 与 $b-c$ 必互为相反数（否则 $a=b$，不合题意），即 $a-c=-(b-c)$，$a+b=2c$. 又因为 $b<c$，所以 $a>c$.

由于 $|b-c|=|d-b|$，所以 $b-c$ 与 $d-b$ 必相等（否则 $c=d$，不合题意），即 $b-c=d-b$，从而得 $2b=c+d$. 因为 $b<c$，所以 $b>d$. 因此有 $d<b<c<a$.

所以 $|a-d|=a-d=(a-c)+(c-b)+(b-d)=1+1+1=3$.

若设 $b>c$，同理可得 $|a-d|=3$.

解 选 C.

方法归纳

本例的解法中采取把 b，c 分为 $b<c$ 和 $b>c$ 两种情况以解决问题，这种解法叫做分类讨论法，它在解决绝对值问题时很常用. 本题还可以分 $a<b$ 和 $a>b$ 两种情况进行讨论，同学们不妨试一试.

例 8 已知 $a<0<c$，$ab>0$，$|b|>|c|>|a|$，化简 $|a+c|+|b+c|-|a-b|+|2a-c|$.

分析 先根据已知条件，借助数轴确定绝对值内各式子的符号，然后进行化简.

解 $\because a<0<c$，$ab>0$，$\therefore b<0$，故在数轴上表示 a，b 的点都在原点的左边，表示 c 的点在原点的

小资料

去括号法则

括号前是"－"，把括号和它前面的"－"去掉，原括号里各项的符号都要改变，即 $-(x+y)=-x-y$.

右边．又∵$|b|>|c|>|a|$，说明表示 b 的点离原点的距离大于表示 c 的点离原点的距离，且都大于表示 a 的点离原点的距离，如图 1－5 所示．

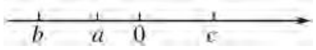


图 1－5

观察数轴可知 $a+c>0$，$b+c<0$，$a-b>0$，$2a-c<0$，

∴原式$=(a+c)-(b+c)-(a-b)-(2a-c)=c-2a$．

方法归纳

借助数轴确定绝对值内各式子的符号是解这类问题常用的策略．

例 9 化简：$|3x+1|+|2x-1|$．

分析　本题是求两个绝对值的和的问题，解题的关键是如何同时去掉两个绝对值符号．若分别去掉每个绝对值的符号，是一件很容易的事．例如，化简$|3x+1|$，只要考虑 $3x+1$ 的正负，即可去掉绝对值符号．这里我们可分 $x\geqslant-\frac{1}{3}$ 与 $x<-\frac{1}{3}$ 两种情况加以讨论，此时，$x=-\frac{1}{3}$是一个分界点．类似地，对于$|2x-1|$而言，$x=\frac{1}{2}$是一个分界点．为同时去掉两个绝对值的符号，我们把两个分界点$-\frac{1}{3}$和$\frac{1}{2}$标在数轴上，把数轴分为三个部分，即 $x<-\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}\leqslant x<\frac{1}{2}$，$x\geqslant\frac{1}{2}$，这样我们就可以分类讨论化简了．

解 由 $3x+1=0$，得 $x=-\frac{1}{3}$．由 $2x-1=0$，得 $x=\frac{1}{2}$．

(1)当 $x<-\frac{1}{3}$时，原式$=-(3x+1)-(2x-1)=-5x$；

(2)当$-\frac{1}{3}\leqslant x<\frac{1}{2}$时，原式$=(3x+1)-(2x-1)=x+2$；

(3)当 $x\geqslant\frac{1}{2}$时，原式$=(3x+1)+(2x-1)=5x$．

例 10 求$|x-1|+|x-2|+|x-3|$的最小值．

分析　根据 $x-1=0$，$x-2=0$，$x-3=0$ 可以找到三个分界点分别是 $x=1$，2，3．这样把数轴分成四个部分，即 $x\leqslant1$，$1<x\leqslant2$，$2<x\leqslant3$ 和 $x>3$，然后分段讨论．

解 当 $x\leqslant1$ 时，原式$=-(x-1)-(x-2)-(x-3)=6-3x$，这时当 $x=1$ 时有最小值 3；

当 $1<x\leqslant2$ 时，原式$=x-1-(x-2)-(x-3)=4-x$，这时当 $x=2$ 时有最小值 2；

当 $2<x\leqslant3$ 时，原式$=x-1+x-2-(x-3)=x$，这时没有最小值；

当 $x>3$ 时，原式$=x-1+x-2+x-3=3x-6$，这时没有最小值.

综上所述，原式的最小值是 2.

方法归纳

一般地，设 a_1，a_2，a_3，…，a_n 是数轴上依次排列的点所表示的有理数，若 n 为奇数，则当 $x=a_{\frac{n+1}{2}}$ 时，$|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$ 的值最小；若 n 为偶数，则当 $a_{\frac{n}{2}}\leqslant x\leqslant a_{\frac{n}{2}+1}$ 时，$|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$ 的值最小. 例如：如图 1-6，当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$|x-a|+|x-b|$ 的值最小；如图 1-7，当 $x=b$ 时，$|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的值最小.

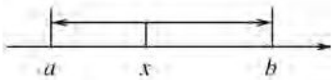


图 1-6

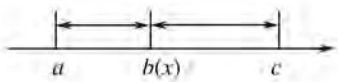


图 1-7

实战演练

基础过关

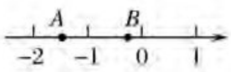
1. (金华市中考题)如图 1-8 是加工零件的尺寸要求，现有下列直径尺寸的产品(单位：mm)，其中不合格的是 (　　)

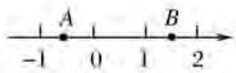
A. $\phi 45.02$　　B. $\phi 44.9$

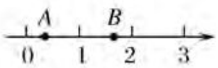
C. $\phi 44.98$　　D. $\phi 45.01$

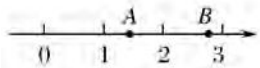
图 1-8

2. (福州市中考题)A，B 是数轴上两点，线段 AB 上的点表示的数中，有互为相反数的是 (　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

3. (菏泽市中考题)如图 1-9，数轴上的 A，B，C 三点所表示的数分别为 a，b，c，其中 $AB=BC$，如果 $|a|>|c|>|b|$，那么该数轴的原点 O 的位置应该在 (　　)

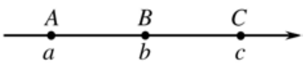


图 1-9

A. 点 A 的左边　　B. 点 A 与点 B 之间

C. 点 B 与点 C 之间　　D. 点 C 的右边

4. (哈尔滨市中考题)数轴上有 A，B 两点，如果点 A 对应的数是 -2，且 A，B

两点的距离为 3，那么点 B 对应的数是____________.

5. (宁波市中考题)若 $1<x<3$，化简：$|x-3|+|2x-1|=$______________.

6. (天津市中考题)已知 $|x|=4$，$|y|=\frac{1}{2}$，且 $xy<0$，则 $\frac{x}{y}$ 的值等于________.

7. 在如图 1－10 所示的数轴上标出表示下列各数的点，并按从小到大的顺序把它们排列起来：

$$-(-3.5),\ -|-5|,\ 0,\ +1\frac{1}{2},\ -3.$$

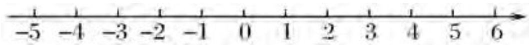


图 1－10

8. 数轴上两点 A，B 分别表示两个数 a，b，则 A，B 两点之间的距离 $AB=|a-b|$. 根据上述结论，回答下列问题：

(1)数轴上表示 2 和 5 的两点之间的距离是________；数轴上表示 -2 和 -5 的两点之间的距离是________；数轴上表示 1 和 -3 的两点之间的距离是________.

(2)数轴上表示 x 和 -1 的两点 A 和 B 之间的距离是________；如果 $|AB|=2$，那么 x 为________.

(3)当代数式 $|x+1|+|x-2|$ 取最小值时，相应的 x 的取值范围是______________.

(4)求 $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-1\ 997|$ 的最小值.

培优提升

9. (江苏省竞赛题)数 a，b，c，d 所对应的点 A，B，C，D 在数轴上的位置如图 1－11 所示，那么 $a+c$ 与 $b+d$ 的大小关系是　　(　　)

A. $a+c<b+d$　　B. $a+c=b+d$　　C. $a+c>b+d$　　D. 不确定的

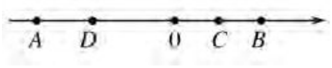


图 1－11

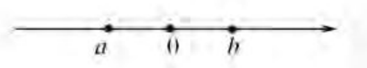


图 1－12

10. (“希望杯”竞赛题)如图 1－12 所示，a，b 为数轴上的两点表示的有理数，且这两点到原点的距离相等，则在 $a+b$，$-2a+b$，$-a+b$，$a-b$ 中，负数的个数有　　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11. (湖北省竞赛题)如图 1－13，已知实数 a，b，c，则 $|c-1|+|a-c|+|a-b|$

的值为（　　）

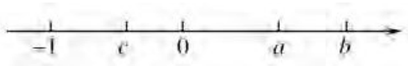


图 1 - 13

A. $b-1$　　B. $2a-b-1$

C. $1+2a-b-2c$　　D. $1-2c+b$

12. (山东省竞赛题)如果 a，b，c 是非零实数，且 $a+b+c=0$，那么 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 的所有可能值为（　　）

A. 0　　B. 1 或 -1　　C. 2 或 -2　　D. 0 或 ± 4

13. (江苏省竞赛题)如果 $|x-2|+x-2=0$，那么 x 的取值范围是________.

14. (“迎春杯”竞赛题)已知 $|x|=5$，$|y|=1$，那么 $||x-y|-|x+y||=$________.

15. (“迎春杯”竞赛题)代数式 $|x+11|+|x-12|+|x+13|$ 的最小值为________.

16. 化简：$|2x+1|-|x-3|+|x-6|$.

17. (四川省竞赛题)设 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6 是六个不同的正整数，取值于 1，2，3，4，5，6，记 $S=|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+|x_3-x_4|+|x_4-x_5|+|x_5-x_6|+|x_6-x_1|$，求 S 的最小值.

18. (“希望杯”竞赛题)已知 a，b，c，d 均为有理数，$|a-b|\leqslant 7$，$|c+d|\leqslant 5$，$|a-b-c-d|=22$，求 $|a-b|-|c+d|$ 的值.

1.2　有理数的运算

知识精要

1. 运算法则

(1)加法法则：同号两数相加，取加数的符号，并把绝对值相加；异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值.

(2)减法法则：减去一个数，等于加上这个数的相反数.

(3)乘法法则：同号得正，异号得负，并把绝对值相乘.

(4)除法法则：除以一个数，等于乘以这个数的倒数.

2. 运算顺序：同级运算，从左到右顺次进行；不同级运算的顺序是先乘方再乘除，最后加减，有括号的先算括号里面的，有多重括号，先算小括号里面的，再算中括号里面的，最后算大括号里面的.

3. 运算律

设 a，b，c 为任意有理数，

(1)加法交换律：$a+b=b+a$；

(2)加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

(3)乘法交换律：$ab=ba$；

(4)乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$；

(5)乘法对加法的分配律：$a(b+c)=ab+ac$.

4. 运算技巧

(1)灵活拼凑

①互为相反数的数结合在一起，使其代数和为 0；

②把同号的数结合在一起；

③把分母相同或容易通分的分数结合在一起；

④把相加得整数的小数结合在一起；

⑤遇到因数是小数时，可把相乘得整数的因数结合在一起.

(2)活用分配律

①遇到 n 个分母不同的分数的代数和乘以一个数时，若通分较繁，可用分配律简化计算；

②遇到 n 个积的代数和，而每一个积里恰好有相同的因数，可逆用分配律使计算简化.

(3)其他运算技巧：倒序相加、错位相消、裂项相加等.