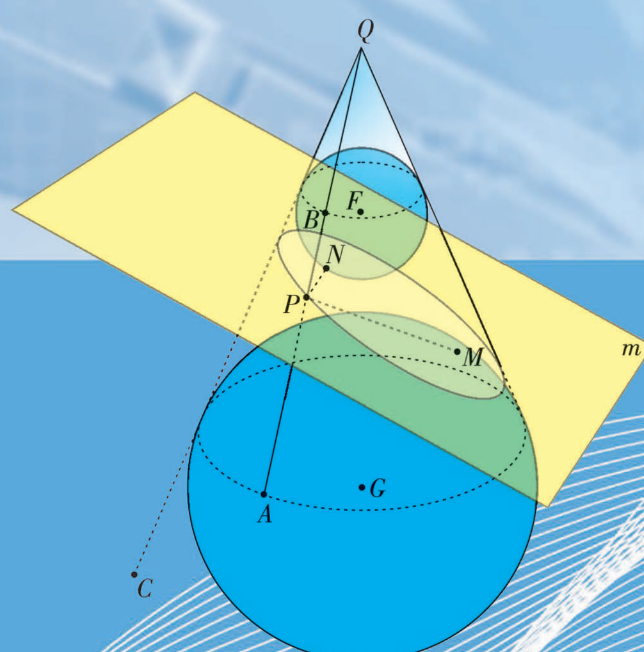
湘教版高中数学教材原配教辅用书

高中新课程

数学同步导学

选修 4-1 几何证明选讲



湖南教育出版社

湘教版高中数学教材原配教辅用书

高中新课程
数学同步导学

选修 4-1 几何证明选讲

本书编写组　编

湖南教育出版社

高中新课程

数学同步导学

选修4－1几何证明选讲

责任编辑:邹伟华

责任校对:刘　源

湖南教育出版社出版发行(长沙市韶山北路443号)

网址:http://www.hneph.com

电子邮箱：hnjycbs@sina.com

微信号：多点学习

客服：电话0731－85486979

福建省新华书店经销　湖南天闻新华印务有限公司印刷

890×1240　16开　印张：4.5　字数：120 000

2015年8月第1版　2016年7月第3次印刷

ISBN 978－7－5539－2603－2

定价：6.50元（仅供福建省使用）

本书若有印刷、装订错误，可向承印厂调换

前　　言

为最大程度地发挥《普通高中课程标准实验教科书·数学》在学生数学学习过程中的作用，使之更好地服务于福建省高中数学教育与教学，由我社领衔策划，由福建省多年来在一线任教的特级教师和省级中学数学学科带头人组成编写团队，以《普通高中数学课程标准（实验）》为依据，紧密结合福建省高中数学教学实际以及全国数学高考命题的基本原则和理念，遵循现行的《普通高中课程标准实验教科书·数学》教材的编写体例，精心打造了本套极具福建数学教育特色的高中课标课程学习辅导品牌丛书.

本丛书全面涵盖了高中数学的选修内容（选修1－1、选修1－2、选修2－1、选修2－2、选修2－3、选修4－1、选修4－2、选修4－4、选修4－5).

本丛书的编写，立足福建省中学数学教与学的实际，在关注福建省中学数学教与学的需求的同时，紧盯全国高考试题，以课标课程所倡导的基本理念为指导，从“知识要点”、“方法点拨”和“范例分析”等三个层面帮助学生重构知识体系，实现知识的有效拓展与提升；“练习思考”则按“基础达标”和“拓展闯关”两个层面进行习题编撰，更加全面也更为人文地引领学生在解决问题的过程中进一步整合知识与思想方法，进而构建知识网络和思想方法体系，促进“知识与技能”、“过程与方法”、“情感态度与价值观”等三维目标的达成，从而全面提高学生的数学素养和学习质量.

本丛书面向福建省，追求实效，从书所选编的习题中，容易题、中档题比例高达80%，与《普通高中数学课程标准（实验）》的“内容标准”相一致、与全国高考命题的原则相一致，在准确阐释课标课程所倡导的基本理念的同时，努力将实用性、引领性和权威性有机地结合在一起！

目录 CONTENTS

第 1 章　几何证明选讲 …… 001

1.1　几个基本定理（1）：备用知识 …… 001

1.1　几个基本定理（2）：平行截割定理、共边定理和共角定理 …… 004

1.1　几个基本定理（3）：直角三角形的射影定理 …… 008

1.2　相似三角形 …… 011

阶段归纳总结（一） …… 015

1.3　圆的切线 …… 017

1.4　圆周角定理（1）：弦切角性质 …… 020

1.4　圆周角定理（2）：圆周角定理 …… 024

1.5　圆幂定理 …… 027

阶段归纳总结（二） …… 030

第 2 章　平面和圆柱面的截线 …… 033

2.1　平行投影 …… 033

2.2　平面和圆柱面的截线 …… 036

2.3　圆柱面的截面的焦球 …… 036

阶段归纳总结（三） …… 038

第 3 章　平面和圆锥面的截线 …… 041

3.1　圆锥面和圆锥曲线 …… 041

3.2　圆锥截面的焦球 …… 041

3.3　圆锥面截线的准线和离心率 …… 043

3.4　圆锥面的双曲线截线的探索 …… 043

阶段归纳总结（四） …… 045

模块总结 …… 048

单元提升演练 …… 050

参考答案 …… 054

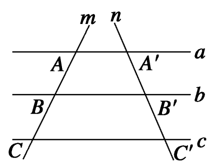
第 1 章　几何证明选讲

1.1　几个基本定理(1):备用知识

知识要点

1. 平行线等分线段定理

(1)定义:如果一组________在一条直线上截得的线段相等,那么在其他直线上截得的线段也相等.



用数学语言表述为:已知 $a\parallel b\parallel c$,直线 m、n 分别与 a、b、c 交于点 A、B、C 和 A'、B'、C',如果 $AB=BC$,那么 $A'B'=B'C'$. 如图所示.

(2)推论 1:经过三角形一边的中点与另一边平行的直线必平分________.

推论 2:经过梯形一腰的中点,且与底边平行的直线平分________.

2. 三角形、梯形的中位线定理

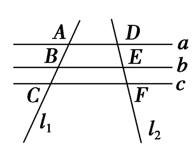
(1)三角形中位线平行于第三边,并且等于它的________.

(2)梯形的中位线平行于两底,并且等于两底和的________.

3. 平行线分线段成比例定理

(1)定义:三条平行线截两条直线,所得的对应线段________.

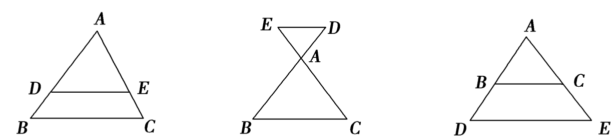
(2)符号表示:如图所示,已知 $a\parallel b\parallel c$,l_1 交 a、b、c 于点 A、B、C,l_2 交 a、b、c 于点 D、E、F,则 $\dfrac{AB}{BC}=$________,$\dfrac{AB}{AC}=$________,$\dfrac{BC}{AC}=$________.



4. 平行线分线段成比例定理的推论

(1)定义:平行于三角形一边的直线截其他两边(或两边的延长线)所得的对应线段________.

(2)符号表示:如图①②③所示,$DE\parallel BC$,则 $\dfrac{AD}{AB}=$________.



①　②　③

方法点拨

1. 比例的性质

本知识点是初中学习过的,注意理解记忆,它是学好本节的前提.

(1)基本性质:$a:b=c:d\Leftrightarrow ad=bc$.

(2)合比性质:如果 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$,那么 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$.

(3)等比性质:如果 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\cdots=\dfrac{m}{n}(b+d+\cdots+n\neq 0)$,那么 $\dfrac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\dfrac{a}{b}$.

2. 利用平行线转移比例式是常用的证题技巧,当题目中没有平行条件而有必要转移比例式时,常添加辅助平行线. 添加的辅助线不同,解题方法也不相同.

3. 对于平行线等分线段定理的理解

(1)对于定理的证明

分 m 平行于 n 和 m 不平行于 n 两种情况证明. 当 m 平行于 n 时,直接运用平行四边形加以证明;当 m 不平行于 n 时,利用辅助线构造相似三角形,进而关系式得证.

(2)定理及推论的主要作用在于证明同一直线上的线段相等问题.

4. 梯形中,如果已知一腰的中点,添加辅助线的方法

(1)过这一点作底边的平行线,由平行线等分线段定理的推论得另一腰的中点;

(2)可通过延长线段构造全等三角形或相似三角形.

5.在几何证明中添加辅助线的方法

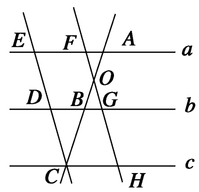
(1)在三角形中,由角平分线可构造全等或相似三角形;

(2)在三角形或梯形中,若有一边上的中点,则过这点可作辅助线.

范例分析

1.平行线等分线段定理及其应用

例1　如图所示,若 $a // b // c$,那么下列结论中错误的是(　　)



A.由 $AB=BC$ 可得 $FG=GH$

B.由 $AB=BC$ 可得 $OB=OG$

C.由 $CE=2CD$ 可得 $CA=2BC$

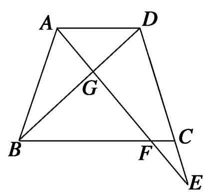
D.由 $GH=\frac{1}{2}FH$ 可得 $CD=DE$

解　由 OB、OG 不是一条直线被一组平行线截得的线段,故B不正确.选B.

点评　解决此题的关键是找出平行线等分线段定理的基本条件,找准被一组平行线截得的线段.

2.平行线分线段成比例定理的简单应用

例2　如图所示,在梯形 $ABCD$ 中,E 是 DC 延长线上一点,AE 分别交 BD、BC 于 G、F,下列结论:①$\frac{EC}{CD}=\frac{EF}{AF}$;②$\frac{FG}{AG}=\frac{BG}{GD}$;③$\frac{AE}{AG}=\frac{BD}{DG}$;④$\frac{AF}{CD}=\frac{AE}{DE}$.其中正确的结论序号是________.(写出所有正确的结论序号)



解　$\because BC//AD$,$\therefore \frac{EC}{CD}=\frac{EF}{AF}$,$\therefore$①正确.

又$\because BC//AD$,$\therefore \frac{FG}{AG}=\frac{BG}{GD}$,$\therefore$②正确.

由 $BC//AD$ 得 $\frac{AF}{EF}=\frac{CD}{CE}$,

$\therefore \frac{AF}{AF+EF}=\frac{CD}{CD+CE}$,

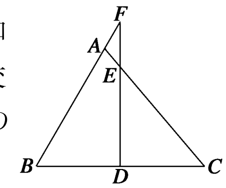
即 $\frac{AF}{AE}=\frac{CD}{DE}$,即 $\frac{AF}{CD}=\frac{AE}{DE}$,$\therefore$④正确.

填①,②,④

点评　当要证的结论不是比例式(通常是等积式)时,常转化为比例式,通过所得的比例式突破题设的条件,其中借助中间比是常用的转化方法.

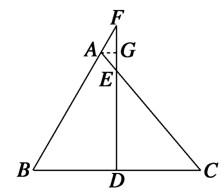
3.证明线段成比例

例3　如图所示,已知直线 FD 和 $\triangle ABC$ 的 BC 边交于 D,与 AC 边交于 E,与 BA 的延长线交于 F,且 $BD=DC$,求证:$AE\cdot FB=EC\cdot FA$.



分析　本题要证 $AE\cdot FB=EC\cdot FA$,只要证 $\frac{AE}{EC}=\frac{FA}{FB}$ 即可,由于 $\frac{AE}{EC}$ 与 $\frac{FA}{FB}$ 没有直接联系,因此必须寻找过渡比将它们联系起来,因此考虑添加平行线进行构造.

证明　过 A 作 $AG//BC$,交 DF 于 G 点.



因为 $AG//BD$,所以 $\frac{FA}{FB}=\frac{AG}{BD}$.

又因为 $BD=DC$,

所以 $\frac{FA}{FB}=\frac{AG}{DC}$.

因为 $AG//DC$,所以 $\frac{AG}{DC}=\frac{AE}{EC}$.

所以 $\frac{AE}{EC}=\frac{FA}{FB}$,即 $AE\cdot FB=EC\cdot FA$.

点评　利用平行线分线段成比例定理及推论证明比例式应注意

(1)作出图形,观察图形及已知条件,寻找合适的比例关系;

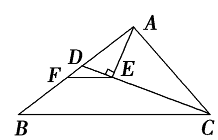
(2)如果题目中没有平行线,要注意添加辅助线,可添加的辅助线可能很多,要注意围绕待证式;

(3)要注意"中间量"的运用与转化.

4.平行线等分线段定理的综合应用

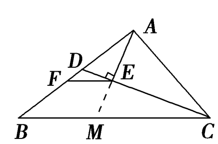
例4　如图,在 $\triangle ABC$ 中,CD 平分 $\angle ACB$,$AE\perp CD$ 于 E,$EF//BC$ 交 AB 于 F.

求证:$AF=BF$.



分析　延长 AE 交 BC 于 M,由于 CD 是 $\angle ACB$ 的角平分线,所以 $\angle ACE=\angle ECM$,并且 $AM\perp CE$,因此容易得到 $\triangle ACE\cong\triangle MCE$,则 $AE=ME$.又 $EF//BM$,则 $AF=BF$.

证明　延长 AE 交 BC 于 M.



$\because CD$ 是 $\angle ACB$ 的平分线,

$AE\perp CE$ 于 E,

$\therefore$在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle MEC$ 中,$\begin{cases}\angle AEC=\angle MEC,\\ EC=CE,\\ \angle ACD=\angle MCD.\end{cases}$

∴$\triangle AEC \cong \triangle MEC$，∴$AE=EM$，

∴E是AM的中点.

又在$\triangle ABM$中，$EF /\!/ BM$，

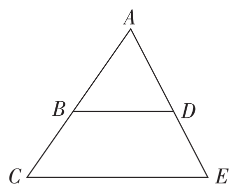
∴点F是AB边的中点，∴$AF=BF$.

点评　解决本题的突破口是用了化归思想，转化证明E是AM中点.

练习思考

基础达标

1. 如图所示，$\triangle ACE$的中点B、D分别在AC、AE上，下列推理不正确的是(　　)



A. $BD /\!/ CE \Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CE}$

B. $BD /\!/ CE \Rightarrow \dfrac{AD}{AE}=\dfrac{BD}{CE}$

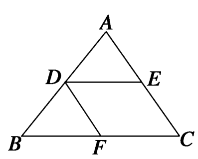
C. $BD /\!/ CE \Rightarrow \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{DE}$

D. $BD /\!/ CE \Rightarrow \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BD}{CE}$

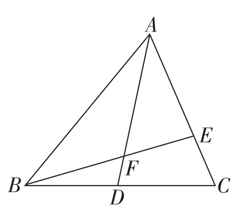
2. 如图所示，D、E、F分别在AB、AC、BC上，且$DE /\!/ BC$，$DF /\!/ AC$，则以下比例成立的是(　　)

A. $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{DE}{BC}$　　B. $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{BF}{FC}$

C. $\dfrac{DF}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$　　D. $\dfrac{EC}{AC}=\dfrac{BF}{BC}$



3. 如图所示，AD是$\triangle ABC$的中线，点E是CA边的三等分点，BE交AD于点F，则$AF:FD$为(　　)



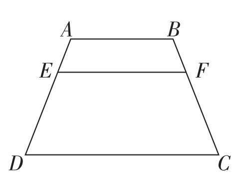
A. 2∶1

B. 3∶1

C. 4∶1

D. 5∶1

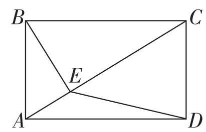
4. 如图，E，F是梯形$ABCD$的腰AD，BC上的点，其中$CD=2AB$，$EF /\!/ AB$，若$\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{CD}{EF}$，则$\dfrac{AE}{ED}=$(　　)



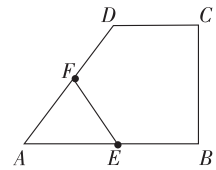
A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

5. 如图，在矩形$ABCD$中，$AB=\sqrt{3}$，$BC=3$，$BE \perp AC$，垂足为E，则$ED=$________.



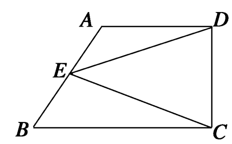
(第5题图)



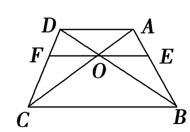
(第6题图)

6. 如图，在直角梯形$ABCD$中，$DC /\!/ AB$，$CB \perp AB$，$AB=AD=a$，$CD=\dfrac{a}{2}$，点E，F分别为线段AB，AD的中点，则$EF=$________.

7. 如图所示，已知在梯形$ABCD$中，$AD /\!/ BC$，$\angle ADC=90°$，点E是AB边的中点，连接ED、EC. 求证：$ED=EC$.



8. 如图所示，在梯形$ABCD$中，$AD /\!/ BC$，EF经过梯形对角线的交点O，且$EF /\!/ AD$.



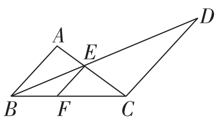
(1)求证：$OE=OF$；

(2)求$\dfrac{OE}{AD}+\dfrac{OE}{BC}$的值；

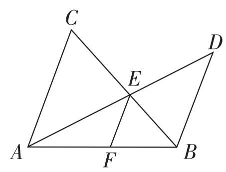
(3)求证：$\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{BC}=\dfrac{2}{EF}$.

拓展闯关

1. 如图,已知 $AB /\!/ EF /\!/ CD$,若 $AB=4$,$CD=12$,则 $EF=$________.



2. 如图所示,$AC /\!/ BD$,AD、BC 相交于点 E,$EF /\!/ BD$,求证:$\frac{1}{AC}+\frac{1}{BD}=\frac{1}{EF}$.



1.1　几个基本定理(2):平行截割定理、共边定理和共角定理

知识要点

(1)平行截割定理:____.

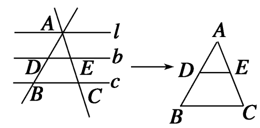
(2)共边定理:____.

(3)共角定理:____.

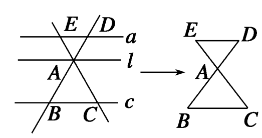
方法点拨

1. 利用定理或其推论解决问题时,要注意寻找图形中的基本图形"A"型或"X"型.

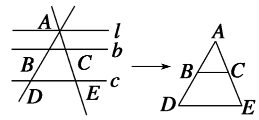
即要注意三线平行的图形变形使用.



(1)



(2)



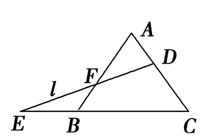
(3)

2. 利用平行线分线段成比例定理,应当注意的是一定要将线段对应好,实际应用时,通常图形中不会出现三条平行线,此时要注意正确识别图形. 需要注意以下变化:如果已知 $a /\!/ b /\!/ c$,那么根据定理就可以得到所有的对应线段都成比例,可以归纳为$\frac{\text{上}}{\text{下}}=\frac{\text{上}}{\text{下}}$,$\frac{\text{上}}{\text{全}}=\frac{\text{上}}{\text{全}}$,$\frac{\text{左}}{\text{右}}=\frac{\text{左}}{\text{右}}$等,便于记忆.

范例分析

1. 平行线分线段成比例定理的综合应用

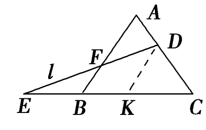
例 1　如图所示,已知直线 l 截 $\triangle ABC$ 三边所在的直线分别于 E、F、D 三点,且 $AD=BE$.



求证:$EF:FD=CA:CB$.

分析　借助平行线分线段成比例定理即可.

证明　**法一**　如图,过 D 作 $DK /\!/ AB$ 交 EC 于点 K,则$\frac{EF}{FD}=\frac{EB}{BK}$,$\frac{CA}{AD}$

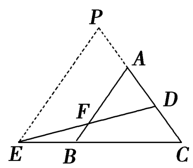


$=\frac{BC}{BK}$，即$\frac{CA}{BC}=\frac{AD}{BK}$.

$\because AD=BE$，$\therefore \frac{CA}{BC}=\frac{BE}{BK}$，

$\therefore \frac{EF}{FD}=\frac{CA}{CB}$.

法二　如图，过 E 作 $EP\parallel AB$，交 CA 的延长线于点 P.



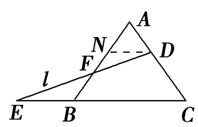
$\because AB\parallel EP$，$\therefore \frac{CB}{BE}=\frac{CA}{AP}$，

即$\frac{CA}{CB}=\frac{AP}{BE}$.

在$\triangle DPE$ 中，$\because AF\parallel PE$，$\therefore \frac{EF}{FD}=\frac{AP}{AD}$.

$\because AD=BE$，$\therefore \frac{AP}{BE}=\frac{EF}{FD}$，$\therefore \frac{CA}{CB}=\frac{EF}{FD}$.

法三　如图，过 D 作 $DN\parallel BC$，交 AB 于 N.



$\because ND\parallel EB$，$\therefore \frac{EB}{DN}=\frac{EF}{DF}$，

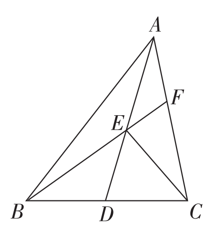
$\because DN\parallel BC$，$\therefore \frac{BC}{DN}=\frac{CA}{AD}$，即$\frac{CA}{CB}=\frac{AD}{DN}$.

$\because AD=EB$，$\therefore \frac{AD}{DN}=\frac{EB}{DN}$，$\therefore \frac{EF}{FD}=\frac{CA}{CB}$.

点评　(1)比例线段常由平行线产生，因而研究比例线段问题常应注意平行线的作用，在没有平行线时，可以添加平行线而促成比例线段的产生.(2)利用平行线转移比例是常用的证题技巧，当题中没有平行线条件而有必要转移比例时，也常添引辅助平行线，从而达到转移比例的目的.

2. 共边定理的综合应用

例 2　如图，AD 是$\triangle ABC$ 的中线，点 E 为 AD 的中点，延长 BE 交 AC 于点 F，连接 CE，证明：$FC=2AF$.



分析　欲证 $FC=2AF$，即证 $FC:AF=2:1$，由共边定理，得：

$FC:AF=\triangle BCE:\triangle BAE$，

再利用共边定理以及充分利用中点得解.

证明　由共边定理，得：$\frac{FC}{AF}=\frac{\triangle BCE}{\triangle BAE}$.

又$\because E$ 为 AD 的中点，又由共边定理，得：$\triangle BAE=\triangle BDE$，

又$\because D$ 为 BC 的中点，$\therefore \triangle BDE=\triangle CDE$.

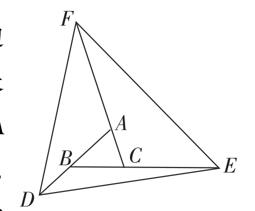
$\therefore \frac{\triangle BCE}{\triangle BAE}=\frac{\triangle BCE}{\triangle BDE}=\frac{2}{1}$，故$\frac{FC}{AF}=\frac{\triangle BCE}{\triangle BAE}=\frac{2}{1}$，

综上，$FC=2AF$.

点评　由于此题中有很多共边三角形，故容易想到用共边定理去实现线段的比与三角形面积的比的转化，从而使问题简化.此题也可以过点 D 作 AB 的平行线，利用中点构造中位线，通过相似性实现线段的比的转化，显然，用共边定理更简单.

3. 共角定理的综合应用

例 3　如图，将$\triangle ABC$ 的 AB 边延长至点 D，使得 $DB=AB$，延长 BC 至 E，使得 $CE=2BC$，延长 CA 至 F，使得 $AF=3AC$，连接 DE，EF，DF.若$\triangle ABC$ 的面积为 1，求$\triangle DEF$ 的面积.



分析　利用共角定理，分别寻求$\triangle BDE$，$\triangle CEF$，$\triangle ADF$ 与$\triangle ABC$ 的面积关系，从而求得$\triangle DEF$ 的面积.

解　由题意，$BE=3BC$，$CF=4AC$.

$\because \triangle ABC$ 与$\triangle BDE$ 是共角三角形，

由共角定理，得$\frac{\triangle ABC}{\triangle BDE}=\frac{AB\cdot BC}{BD\cdot BE}=\frac{1\times 1}{1\times 3}=\frac{1}{3}$.

同理，由共角定理，得：

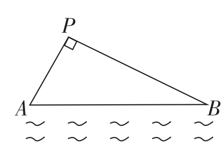
$\triangle CEF=8\triangle ABC=8$，$\triangle ADF=6\triangle ABC=6$，

$\therefore \triangle DEF=1+3+8+6=18$.

点评　由于与面积有关的已知条件只有$\triangle ABC=1$，故需用共角定理，将$\triangle ABC$ 周围的 3 个三角形分别与$\triangle ABC$ 产生联系，通过共角定理，得到各自的面积，再将 4 个三角形面积求和得到$\triangle DEF$ 的面积.

4. 应用题

例 4　如右图所示，有一块直角三角形菜地，分配给张、王、李三家农户耕地.已知张、王、李三家人口分别为 2 人，4 人，6 人，菜地分配方法要按人口比例，并要求每户土地均有一部分紧靠水渠 AB. P 点处是三家合用的肥料仓库，所以 P 点必须是三家地的交界处.已知 Rt$\triangle PAB$ 中$\angle P=90^\circ$，$PA=20$ 米，$\angle PAB=60^\circ$.



(1)计算出每家应分配的菜地面积；

(2)用尺规在图中作出各家菜地的分界线(保留痕迹，不写作法，标出户名).

分析　第(1)问要利用图形,使用勾股定理;第(2)问直接根据平行线等分线段的方法作出符合的图形.

解　(1)在 Rt$\triangle PAB$ 中,

$\because \angle PAB=60^\circ$,$\therefore \angle PBA=30^\circ$.

$\therefore AB=2PA=40$(米).

$\therefore PB=\sqrt{AB^2-PA^2}=\sqrt{40^2-20^2}=20\sqrt{3}$(米).

$S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}PA\cdot PB=\dfrac{1}{2}\times 20\times 20\sqrt{3}=200\sqrt{3}$(平方米).

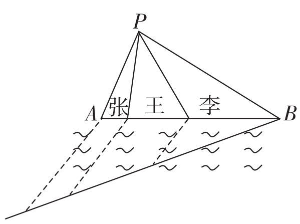
$\because S_{张}:S_{王}:S_{李}=2:4:6=1:2:3$,

$\therefore S_{张}=\dfrac{1}{6}\times 200\sqrt{3}=\dfrac{100}{3}\sqrt{3}$(平方米),

$S_{王}=\dfrac{2}{6}\times 200\sqrt{3}=\dfrac{200}{3}\sqrt{3}$(平方米),

$S_{李}=\dfrac{3}{6}\times 200\sqrt{3}=100\sqrt{3}$(平方米).

(2)运用平行线等分线段的方法作出图形如下.



点评　本题考查了平行线等分线段定理的应用,解题的易错点是忽视运用的直角三角形的性质,关键是运用平行线等分线段定理的作图.

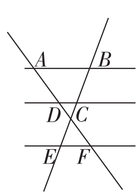
练习思考

基础达标

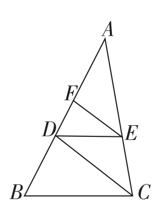
1. 如图,$AB\parallel CD\parallel EF$,下列结论正确的是(　　)

A. $\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{DF}{AD}$　　B. $\dfrac{EF}{CD}=\dfrac{BE}{BC}$

C. $\dfrac{AD}{DF}=\dfrac{BC}{CE}$　　D. $\dfrac{CD}{EF}=\dfrac{AD}{AF}$



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. 已知在$\triangle ABC$中,$DE\parallel BC$,$EF\parallel DC$,那么下列结论不成立的是(　　)

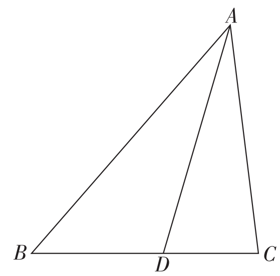
A. $\dfrac{AD}{AF}=\dfrac{AB}{AD}$　　B. $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AC}{AE}$

C. $\dfrac{AF}{DF}=\dfrac{AD}{DB}$　　D. $\dfrac{AF}{AD}=\dfrac{AE}{AC}$

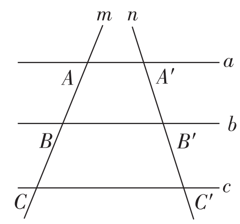
3. 如图,AD是$\triangle ABC$的角平分线,则下列说法正确的是(　　)

A. $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AD}$　　B. $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{AC}{BD}$

C. $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$　　D. $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{CD}{AD}$



(第 3 题图)

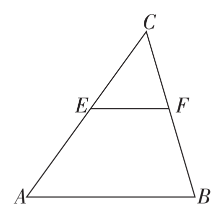


(第 4 题图)

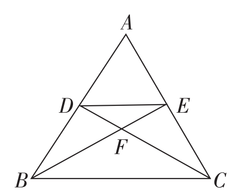
4. 如图所示,已知 $a\parallel b\parallel c$,直线 m、n 分别与 a、b、c 交于点 A,B,C 和 A',B',C',如果 $AB=BC=1$,$A'B'=\dfrac{3}{2}$,则 $B'C'=$(　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 2

5. 如图所示,$EF\parallel AB$,$BF:FC=5:4$,$AC=3$ 厘米,则 $CE=$________.



(第 5 题图)



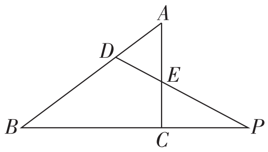
(第 6 题图)

6. 如图所示,已知 $DE\parallel BC$,$BF:EF=3:2$,则 $AC:AE=$________,$AD:DB=$________.

7. 用共角定理证明:在$\triangle ABC$中,若$\angle B=\angle C$,则 $AB=AC$.

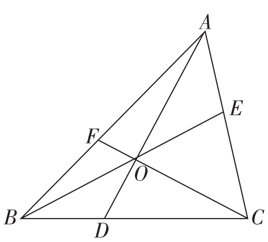
8. 如图，D、E 分别在△ABC 的边 AB，AC 上，且 $AD=AE$，直线 DE，BC 的延长线交于点 P.

求证：$\frac{BP}{CP}=\frac{BD}{CE}$.

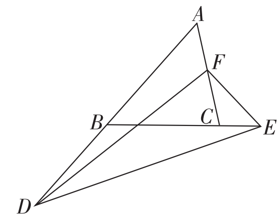


拓展闯关

1. 如图，D、E、F 分别在△ABC 的边 BC、AC、AB 上，且 AD、BE、CF 交于同一点 O，$\frac{BD}{DC}=\frac{4}{9}$，$\frac{CE}{EA}=\frac{4}{3}$，求$\frac{AF}{FB}$的值.



2. 如图，B、F 分别为 AD、AC 的中点，$BC=2CE$，$S_{\triangle ABC}=4$，求△DEF 的面积.



1.1　几个基本定理(3):直角三角形的射影定理

知识要点

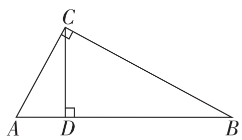
1. 射影的有关概念

(1)点在直线上的正射影:从一点向一直线所引垂线的垂足,叫做这个点在这条直线上的________.

(2)线段在直线上的正射影:一条线段在直线上的正射影,是指线段的两个端点在这条直线上的正射影间的线段.

2. 直角三角形的射影定理

(1)直角三角形的射影定理:直角三角形斜边上的高是两直角边在斜边上射影的______;两直角边分别是它们在斜边上射影与斜边的________.



(2)符号表示:如图,CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的高,则(1)$AC^2=$________;(2)$BC^2=$________;(3)$CD^2=$________.

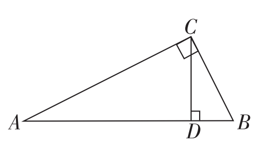
方法点拨

1. 应用射影定理有两个条件:一是直角三角形;二是斜边上的高.应用射影定理可求直角三角形的边长、面积等有关量,还可研究相似问题、比例式等问题.

2. 直角三角形射影定理的逆定理

如果一个三角形一边上的高是另两边在这条边上的射影的比例中项,那么这个三角形是直角三角形.

符号表示:如图,在$\triangle ABC$ 中,$CD\perp AB$ 于 D,若 $CD^2=AD\cdot BD$,则$\triangle ABC$ 为直角三角形.



证明　$\because CD\perp AB$,

$\therefore \angle CDA=\angle BDC=90^\circ$.

又$\because CD^2=AD\cdot BD$,

即 $AD:CD=CD:BD$,

$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle CBD$.

$\therefore \angle CAD=\angle BCD$.

又$\because \angle ACD+\angle CAD=90^\circ$,

$\therefore \angle ACB=\angle ACD+\angle BCD$

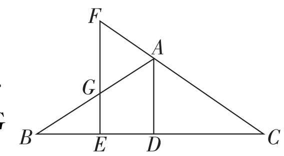
$=\angle ACD+\angle CAD=90^\circ$,

即$\triangle ABC$ 为直角三角形.

范例分析

1. 射影的概念

例1　如图所示,$AD\perp BC$,$FE\perp BC$.求点 A、B、C、D、E、F、G 和线段 AB、AC、AF、FG 在直线 BC 上的射影.



分析　要求已知点和线段在直线 BC 上的射影,需过这些点或线段的端点,作 BC 边的垂线.

解　由 $AD\perp BC$,$FE\perp BC$ 知:A、D 在 BC 上的射影是 D;B 在 BC 上的射影是 B;C 在 BC 上的射影是 C,E、F、G 在 BC 上的射影都是 E;AB 在 BC 上的射影是 DB;AC 在 BC 上的射影是 DC;AF 在 BC 上的射影是 DE,FG 在 BC 上的射影是点 E.

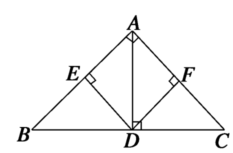
点评　求点和线段在直线上的射影:

(1)点在直线上的射影就是由点向直线引垂线,垂足即为射影;

(2)线段在直线上的射影就是由线段的两端点向直线引垂线,两垂足间的线段就是所求射影.

2. 射影定理的应用

例2　如图所示,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90^\circ$,$AD\perp BC$ 于 D,$DF\perp AC$ 于 F,$DE\perp AB$ 于 E.试证明:



(1)$AB\cdot AC=AD\cdot BC$;

(2)$AD^3=BC\cdot BE\cdot CF$.

分析　本题第(1)问利用$\triangle ABC$ 的面积相等求得,在第(2)问中,在 $\mathrm{Rt}\triangle BAC$ 中,有 $AB\cdot AC=AD\cdot BC$,$AD^2=BD\cdot DC$;在$\mathrm{Rt}\triangle ADB$ 中,有 $BD^2=BE\cdot AB$;在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$中,有 $CD^2=CF\cdot AC$.由这些关系式便可得到待证式.

证明　(1)在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$AD\perp BC$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot AD$,

$\therefore AB\cdot AC=BC\cdot AD$.

(2)在 $\mathrm{Rt}\triangle ADB$ 中,$DE\perp AB$,

由射影定理得 $BD^2=BE\cdot AB$.

同理 $CD^2=CF\cdot AC$,

$\therefore BD^2\cdot CD^2=BE\cdot AB\cdot CF\cdot AC$.　①

又在 $\mathrm{Rt}\triangle BAC$ 中,$AD\perp BC$,

$\therefore AD^2=BD\cdot DC$,　②

∴由①②两式得 $AD^4=BE\cdot CF\cdot AB\cdot AC$，

即 $AD^3=BE\cdot CF\cdot AB\cdot AC\cdot\dfrac{1}{AD}$，

由(1)知 $AB\cdot AC=BC\cdot AD$ 代入上式得

$AD^3=BE\cdot CF\cdot BC$.

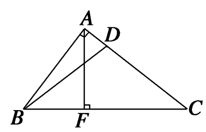
点评　利用直角三角形的射影定理证明恒等式，需注意：

(1)结合图形，仔细分析题目的结论；

(2)由于射影定理中可供选择的等式较多，需要合理选择.

3. 射影定理的综合应用

例 3　如图所示，在△ABC 中，D、F 分别在 AC、BC 上，且 $AB\perp AC$，$AF\perp BC$，$BD=DC=FC=1$，求 AC.



分析　设 $AC=x$，利用射影定理用 x 表示出 BC、AF，过 D 作 $DE\perp BC$ 交 BC 于 E，再由$\dfrac{DE}{AF}=\dfrac{DC}{AC}$，用 x 表示出 DE，最后由 $DE^2+EC^2=DC^2$ 求得 x.

解　在△ABC 中，设 AC 为 x，

∵$AB\perp AC$，$AF\perp BC$，又 $FC=1$，

根据射影定理，得 $AC^2=FC\cdot BC$，

即 $BC=x^2$.

再由射影定理，得 $AF^2=BF\cdot FC=(BC-FC)\cdot FC$，

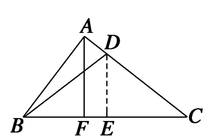
即 $AF^2=x^2-1$.

∴$AF=\sqrt{x^2-1}$.

在△BDC 中，过 D 作 $DE\perp BC$ 于 E，

∵$BD=DC=1$，

∴$BE=EC$.



又∵$AF\perp BC$，∴$DE/\!/AF$，

∴$\dfrac{DE}{AF}=\dfrac{DC}{AC}$. ∴$DE=\dfrac{DC\cdot AF}{AC}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

在 Rt△DEC 中，

∵$DE^2+EC^2=DC^2$，

即$\left(\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^2+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2=1^2$，

∴$\dfrac{x^2-1}{x^2}+\dfrac{x^4}{4}=1$.

整理得 $x^6=4$，

∴$x=\sqrt[3]{2}$.

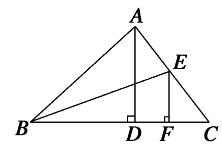
∴$AC=\sqrt[3]{2}$.

点评　(1)由射影定理可得三角形相似，可求相似比、三角形边长等.

(2)射影定理中有三个等式，根据题目需要恰当地进行选择.

4.“中间量法”在证明比例式中的应用

例 4　如图所示，在△ABC 中，$AD\perp BC$ 于 D，BE 平分∠ABC 交 AC 于 E，$EF\perp BC$ 于 F，且 $BD\cdot CF^2=CD\cdot EF^2$.



求证：$EF:DF=BC:AC$.

分析　本题通过先证明$\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{BC}{AC}$，又证明$\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{AC}{DC}$，得$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{EF}{DF}$，达到解题目的. 其中$\dfrac{AC}{CD}$为中间变量，这种通过“中间变量”达到解题目的的方法叫“中间变量”转化法.

证明　∵$AD\perp BC$，$EF\perp BC$，∴$EF/\!/AD$. ∴$\dfrac{EF}{AD}=\dfrac{CF}{CD}$，

即$\dfrac{EF^2}{CF^2}=\dfrac{AD^2}{CD^2}$.

又∵$BD\cdot CF^2=CD\cdot EF^2$，即$\dfrac{EF^2}{CF^2}=\dfrac{BD}{CD}$，

∴$\dfrac{AD^2}{CD^2}=\dfrac{BD}{CD}$，

即 $AD^2=BD\cdot CD$，∴∠$BAC=90°$.

∴$AC^2=BC\cdot CD$.

∵BE 平分∠ABC，$EA\perp AB$，$EF\perp BC$，

∴$AE=EF$.

又 $EF/\!/AD$，∴$\dfrac{AE}{DF}=\dfrac{AC}{DC}$，∴$\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{AC}{DC}=\dfrac{BC}{AC}$，

即$\dfrac{EF}{DF}=\dfrac{BC}{AC}$.

点评　将困难的、不熟悉的问题转化为容易的、熟悉的问题，体现了化归思想方法，通过恒等变形，找到中间变量来联系前后两个比值，从而达到解题目的.

练习思考

基础达标

1. 在 Rt△ABC 中，∠$C=90°$，$a-b=1$，$\tan A=\dfrac{3}{2}$，其中 a，b 分别是∠A 和∠B 的对边，则斜边上的高 $h=$(　　)

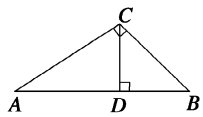
A. $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$　　　B. $\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

C. $\sqrt{13}$　　　D. 6

2. 在 $Rt\triangle ACB$ 中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，若 $BD:AD=1:4$，则 $\tan\angle BCD$ 的值是(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

3. 如图，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，$AD=3$，$CD=2$，则 $\frac{AC}{BC}$ 的值为(　　)



A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{9}{4}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{4}{9}$

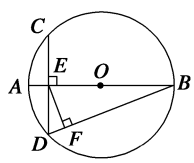
4. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$，垂足为 D. 若 $BC=m$，$\angle B=\alpha$，则 AD 的长为(　　)

A. $m\sin^2\alpha$　　B. $m\cos^2\alpha$

C. $m\sin\alpha\cos\alpha$　　D. $m\sin\alpha\tan\alpha$

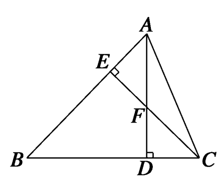
5. 在 $\triangle ABC$ 中，$AC\perp BC$，$CD\perp AB$ 于点 D，若 $AD=27$，$BD=3$，则 $AC=$________，$BC=$________，$CD=$________.

6. 如图，在圆 O 中，直径 AB 与弦 CD 垂直，垂足为 E，$EF\perp DB$，垂足为 F，若 $AB=6$，$AE=1$，则 $DF\cdot DB=$________.

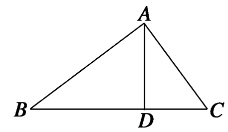


7. 如图所示，AD、CE 是 $\triangle ABC$ 中边 BC、AB 的高，AD 和 CE 相交于点 F.

求证：$AF\cdot FD=CF\cdot FE$.

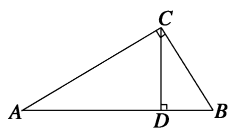


8. 如图所示，D 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的一点，$\angle CAD=\angle B$，若 $AD=6$，$AB=10$，$BD=8$，求 CD 的长.



拓展闯关

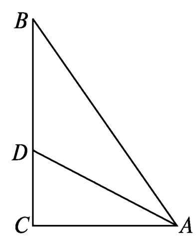
1. 如图所示，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$ 于点 D，$AD=4$，$\sin\angle ACD=\dfrac{4}{5}$，则 $CD=$________，$BC=$________.



2. 如图，已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的周长为48 cm，一锐角平分线分对边为 3∶5 两部分.

(1)求直角三角形的三边长；

(2)求两直角边在斜边上的射影的长.



1.2　相似三角形

知识要点

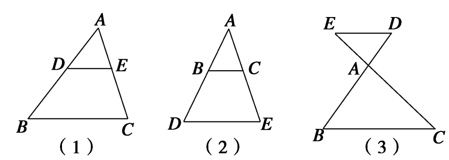
1. 相似三角形

对应角相等，对应边成比例的两个三角形叫做相似三角形. 相似三角形对应边的比值叫做相似比(或相似系数).

2. 相似三角形的判定定理

(1)预备定理：平行于三角形一边的直线和其他两边(或两边的延长线)相交，所构成的三角形与原三角形相似.

如图(1)(2)(3)所示，在 $\triangle ABC$ 中，$DE\parallel BC$，则 $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$.



(2)判定定理 1：对于任意两个三角形，如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角________，那么这两个三角形相似. 简述为：两角________，两三角形相似.

(3)引理　如果一条直线截三角形的两边(或两边的延长线)所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边.

(4)判定定理 2：对于任意两个三角形，如果一个三角形的两边和另一个三角形的两边对应成比例，并且________，那么这两个三角形相似. 简述为：两对应边成比例且________，两三角形相似.

(5)引理：如果一条直线截三角形的两边(或两边的延长线)所得的对应线段________，那么这条直线平行于三角形的第三边.

(6)判定定理 3：对于任意两个三角形，如果一个三角形的三条边和另一个三角形的三条边____________，那么这两个三角形相似. 简述为：三边____________，两三角形相似.

3. 直角三角形相似的判定定理

定理 1：如果两个直角三角形有一个锐角________，那么它们相似.

定理 2：如果两个直角三角形的两条直角边

________，那么它们相似.

定理 3：如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边________，那么这两个直角三角形相似.

4. 相似三角形的性质定理

(1)相似三角形对应高的比、对应中线的比和对应角平分线的比都等于________；

(2)相似三角形周长的比等于________；

(3)相似三角形面积的比等于__________.

方法点拨

1. 相似三角形判定定理的作用：

(1)可以用来判定两个三角形相似；

(2)间接证明角相等，线段长成比例；

(3)为计算线段的长度及角的大小创造条件.

2. 关于引理的理解.

当直接证明一个问题比较困难时，往往采用间接的方法. 上述引理的证明采用的"同一法"就是一种间接证明方法. 应用"同一法"证明问题时，往往先作出一个满足命题结论的图形，然后证明图形符合命题已知条件，确定所作图形与题设条件所指的图形相同，从而证明命题成立.

3. 三角形相似的判定定理的一些常见推论：

推论 1：顶角或底角相等的两个等腰三角形相似；

推论 2：腰和底对应成比例的两个等腰三角形相似；

推论 3：如果一个三角形的两边和其中一边上的中线与另一个三角形的对应部分成比例，那么这两个三角形相似；

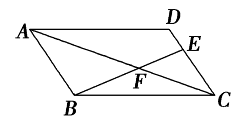
推论 4：如果一个三角形的两边和第三边上的中线与另一个三角形的对应部分成比例，那么这两个三角形相似.

4. 相似三角形的性质定理的内容归纳起来主要有两个方面：一是相似三角形的对应线段(高、中线、角平分线以及周长)的比等于相似比；二是相似三角形面积的比等于相似比的平方，运用性质定理，拓宽思路，可以探讨得到：两个相似三角形中的所有对应图形(所有对应线段，如等分线段，等分角线以及外接圆与内切圆的直径、周长、面积等)与相似比都有一定的关系.

范例分析

1. 相似三角形

例 1　如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 在 DC 上，若 $DE:EC=1:2$，则 $BF:BE=$________.



分析　可利用 $\triangle ABF \backsim \triangle CEF$ 求解.

解　$\because DE:EC=1:2$，$\therefore DC:EC=3:2$，

$\therefore AB:EC=3:2$. $\because AB /\!/ EC$，$\therefore \triangle ABF \backsim \triangle CEF$，

$\therefore \dfrac{BF}{EF}=\dfrac{AB}{EC}=\dfrac{3}{2}$，$\therefore \dfrac{BF}{BE}=\dfrac{3}{5}$. 填 $3:5$.

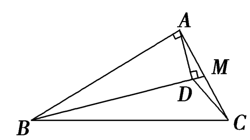
点评　相似三角形的判定定理的选择：

(1)已知有一角相等时，可选择定理 1 或 2；

(2)已知有两边对应成比例时，可选择定理 2 或定理 3.

2. 相似三角形的判定

例 2　如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，BM 是 AC 边上的中线，$AD \perp BM$，垂足是 D.



求证：$\triangle MCD \backsim \triangle MBC$.

分析　$\boxed{\text{证 Rt}\triangle ADM \backsim \text{Rt}\triangle BAM} \to \boxed{\text{得比例式}\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{DM}{AM}} \xrightarrow{MC=AM} \boxed{\dfrac{MC}{BM}=\dfrac{DM}{MC}} \to \boxed{\text{结论}}$

证明　在 $\mathrm{Rt}\triangle ADM$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle BAM$ 中，

$\because \angle AMD=\angle AMB$.

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADM \backsim \mathrm{Rt}\triangle BAM$，

$\therefore \dfrac{AM}{BM}=\dfrac{DM}{AM}$.

又 $\because MC=AM$，

$\therefore \dfrac{MC}{BM}=\dfrac{DM}{MC}$.

又 $\because \angle DMC=\angle BMC$，

$\therefore$ 由相似三角形的判定定理 2，

得 $\triangle MCD \backsim \triangle MBC$.

点评　相似三角形的判定定理与性质定理可能要同时用到，往往需先证两个三角形相似，以此作铺垫，再证另两个三角形相似.