湘教版

湘教考苑

DANYUAN ZHENGHE YU CEPING

单元整合与测评

单元学习全优用书

一线名师的重要讲义

单元知识梳理

梳理单元知识重点，
对比历年热考题型，
巩固本单元的重点知识。

优生必看的精华笔记

重点知识详解

以教材单元为基本结构，
依据历年热考题型，
汇总本单元的知识重点。

紧贴考点的拓展演练

思维能力拓展

遵循教材和考纲，
以图标概述单元结构，
轻松把握知识要点。

9 数学

九年级上册

本书编写组 编

配套单元测试卷 + 期中测试卷 + 期末测试卷

湖南教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

单元整合与测评．数学九年级．上册：湘教版/《单元整合与测评》编写组编．—长沙：湖南教育出版社，2015.8
ISBN 978-7-5539-2627-8

Ⅰ．①单… Ⅱ．①单… Ⅲ．①中学数学课—初中—习题集
Ⅳ．①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 188591 号

单元整合与测评
数 学 九年级上册(湘教版)
本书编写组 编

责任编辑：钟劲松
出版发行：湖南教育出版社
地 址：长沙市韶山北路 443 号
网 址：http://www.hneph.com
电子邮箱：hnjycbs@sina.com
微信服务号：多点学习
客 服：电话 0731—85486979
经 销：湖南省新华书店
印 刷：湖南关山美印有限公司
开 本：787×1092 1/16
印 张：8
字 数：250 千字
版 次：2015 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
书 号：ISBN 978-7-5539-2627-8
定 价：15.00 元

CONTENTS 目录

第 1 章　反比例函数

第 2 章　一元二次方程

第 3 章　图形的相似

第 4 章 锐角三角函数

第 5 章 用样本推断总体

第1章

反比例函数

单元知识梳理

知识点	内　　容
反比例函数的定义	一般地,如果两个变量 y 与 x 的关系可以表示成 $y=\frac{k}{x}$(k 为常数,$k\neq0$)的形式,那么称 y 是 x 的反比例函数 $y=\frac{k}{x}$,$xy=k$,$y=kx^{-1}$($k\neq0$)是反比例函数的三种不同形式
反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象与性质	反比例函数的图象是双曲线,这两支曲线都与 x 轴、y 轴不相交,当 $k>0$ 时,图象位于第一、三象限,在每个象限内函数值 y 随自变量 x 的增大而减小;当$k<0$ 时,图象位于第二、四象限,在每个象限内函数值 y 随自变量 x 的增大而增大 注:反比例函数的性质一定要分图象所在象限讨论
反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中 k 的几何意义	过反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上一点作坐标轴的垂线,那么所围成的矩形面积为 $S_{矩形}=\lvert xy\rvert=\lvert k\rvert$,所围成的三角形面积为 $S_{三角形}=\frac{1}{2}\lvert xy\rvert=\frac{1}{2}\lvert k\rvert$

重点知识详解

1.1　反比例函数

知识点拨

知识点 1　反比例函数的定义

一般地,形如 $y=\frac{k}{x}$(k 为常数,$k\neq0$)的函数称为反比例函数,它可以从以下几个方面来理解:

(1)x 是自变量,y 是 x 的反比例函数;

(2)自变量 x 的取值范围是 $x\neq0$ 的一切实数,函数值 y 的取值范围是 y 为全体实数,$y\neq0$;

(3)比例系数 $k\neq0$ 是反比例函数定义的一个重要组成部分;

例1　下列函数中哪些是反比例函数?若是反比例函数,请

整合突破

1.在下列函数表达式中,x 均为自变量,哪些是反比例函数?

每一个反比例函数相应的 k 值是多少?

(1)$y=\frac{5}{x}$;(2)$y=\frac{0.4}{x}$;

(3)$y=\frac{x}{2}$;(4)$xy=2$;

(5)$y=-6x+3$;

(6)$xy=-7$;

指出相应的 k 值.

①$y=3x-1$;②$y=2x^2$;③$y=\frac{0.2}{x}$;④$y=\frac{3x}{4}$;⑤ $y=7x^{-1}$;⑥$y=3x-1$;⑦$xy=123$;⑧$y=\frac{1}{4x}$.

【点拨】根据反比例函数的定义进行判断.

【答案】①②④⑥不符合反比例函数的定义.

③⑤⑦⑧是反比例函数,k 值分别为 0.2;7;123;$\frac{1}{4}$.

知识点 2 反比例函数表达式的确定

确定反比例函数表达式的方法仍是待定系数法.由于在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 中,只有一个待定系数 k,因此只需要两个变量的一组对应值或图象上的一个点的坐标,即可求出 k 的值,从而确定其函数表达式.

用待定系数法求反比例函数表达式的一般步骤:

①设所求反比例函数为 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$;②根据已知条件,列出含 k 的方程;③解出待定系数 k 的值;④把 k 的值代入表达式 $y=\frac{k}{x}$ 中.

例 2 已知 y 是 x 的反比例函数,当 $x=2$ 时,$y=6$.

(1)写出 y 与 x 的函数关系式;

(2)求当 $x=4$ 时,y 的值.

【点拨】假设出反比例函数解析式,代入对应值求解.

解:(1)设 $y=\frac{k}{x}$,∵当 $x=2$ 时,$y=6$,∴$6=\frac{k}{2}$,∴$k=12$.

∴y 与 x 的函数关系式为 $y=\frac{12}{x}$.

(2)把 $x=4$ 代入 $y=\frac{12}{x}$ 得 $y=\frac{12}{4}=3$.

知识点运用:

例 3 如果函数 $y=(m-1)x^{m^2-2}$ 为反比例函数,则 m 的值是( )

A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【点拨】由反比例函数的定义可知 $m^2-2=-1$,解得 $m=\pm1$,但须考虑$(m-1)\neq0$,则 $m=-1$.

【答案】 A

例 4 已知函数 $y=2y_1-y_2$,y_1 与 $x+1$ 成正比例,y_2 与 x 成反比例,当 $x=1$ 时,$y=4$,当 $x=2$ 时,$y=3$,求 y 与 x 的函数关系式.

(7)$y=\frac{5}{x^2}$;(8)$y=\frac{1}{5}x$.

【答案】(1)$k=5$ (2)$k=0,4$ (4)$k=2$ (6)$k=-7$

整合突破

2.已知反比例函数的图象经过点$(2,-1)$,则它的解析式是 ( )

A. $y=-2x$ B. $y=2x$

C. $y=\frac{2}{x}$ D. $y=-\frac{2}{x}$

3.已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点$(1,-2)$,则 k 的值为 ( )

A. 2 B. $-\frac{1}{2}$

C. 1 D. -2

4.若函数 $y=\frac{a-1}{x^{|a|}}$ 为反比例函数,则 a 的值为( )

A. 1 B. ±1

C. 0 D. -1

5.已知 $y=y_1+y_2$,y_1 与$(x-1)$成正比例,y_2 与$(x+1)$成反比例,当 $x=0$ 时,$y=-3$,当 $x=1$ 时,$y=-1$.

【点拨】根据正比例函数和反比例函数的定义得到 y_1，y_2 的关系式，进而得到 y 的关系式，把所给两组解代入即可得到相应的比例系数，也就求得了函数的关系式.

解：由题意得：$y_1=k_1(x+1)$，$y_2=\frac{k_2}{x}$.

$\because y=2y_1-y_2$，$\therefore y=2k_1(x+1)-\frac{k_2}{x}$.

$\therefore\begin{cases}4=4k_1-k_2,\\3=6k_1-\frac{k_2}{2},\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}k_1=\frac{1}{4},\\k_2=-3.\end{cases}$

$\therefore y=\frac{1}{2}(x+1)-\frac{-3}{x}$，即 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{x}+\frac{1}{2}$.

(1)求 y 的表达式；

(2)求当 $x=-\frac{1}{2}$ 时 y 的值.

【答案】2.D 3.D 4.D

5.(1) $y=x-1-\frac{2}{x+1}$

(2) $-\frac{17}{6}$

1.2 反比例函数的图象与性质

知识点拨

知识点1 反比例函数的图象及画法

在用描点法画反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象时分三个步骤：(1)列表；(2)描点；(3)连线.

再作反比例函数的图象时应注意以下几点：

①列表时选取的数值宜对称选取；

②列表时选取的数值越多，画的图象越精确；

③连线时，必须根据自变量大小从左至右(或从右至左)用光滑的曲线连接，切忌画成折线；

④画图象时，它的两个分支应全部画出，但切忌将图象与坐标轴相交.

注意：反比例函数的图象是双曲线，它有两个分支，这两个分支分别位于第一、第三象限或第二、第四象限，它们与原点对称，由于反比例函数中自变量 $x\neq0$，函数值 $y\neq0$，所以它的图象与 x 轴、y 轴都没有交点，即双曲线的两个分支无限接近坐标轴，但永远达不到坐标轴.

例1 已知函数 $y_1=x-1$ 和 $y_2=\frac{6}{x}$.

(1)在所给的坐标系中画出这两个函数的图象；

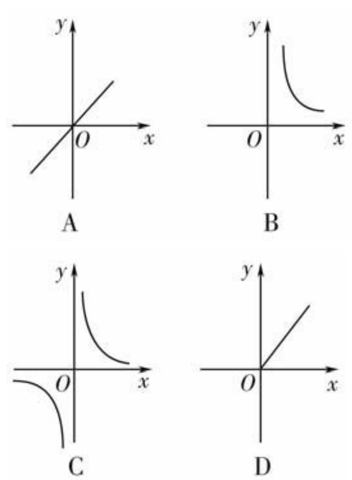
(2)求这两个函数图象的交点坐标；

(3)观察图象，当 x 在什么范围时，$y_1>y_2$？

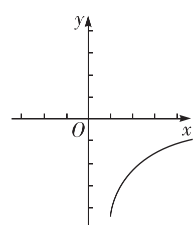
【点拨】(1)画图的步骤：列表，描点，连线. 需注意函数 y_1 的自变量取值范围是：全体实数；函数 y_2 的自变量取值范围是：x 为全体实数且 $x\neq0$.(2)交点都适合这两个函数解析式，应让这

整合突破

1.矩形面积为4，它的长 y 与宽 x 之间的函数关系用图象大致可表示为 ( )



2.如图，是反比例函数 $y=\frac{m-5}{x}$ 的图象的一支. 根据给出的图象回答下列问题：



两个函数解析式组成方程组求解即可.(3)从交点入手,看在交点的哪一边一次函数的函数值大于反比例函数的函数值.

解:(1)函数 y_1 的自变量取值范围是:全体实数;函数 y_2 的自变量取值范围是:$x\neq0$.列表可得:

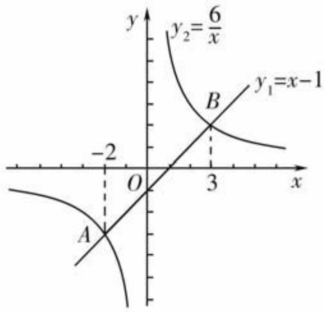
x	…	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	…
$y_1=x-1$	…	-6	-5	-4	-3	-2	0	1	2	3	4	…
$y_2=\frac{6}{x}$	…	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{2}$	-2	-3	-6	6	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	…

(2)解方程组:$\begin{cases}y=x-1,\\ y=\frac{6}{x},\end{cases}$

解得:$\begin{cases}x_1=-2,\\ y_1=-3,\end{cases}\begin{cases}x_2=3,\\ y_2=2.\end{cases}$

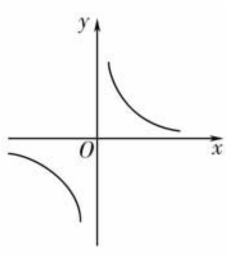
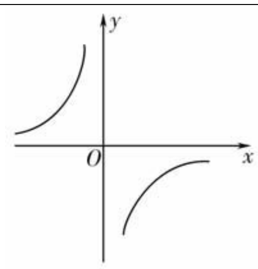
∴两函数的交点坐标分别为 $A(-2,-3)$,$B(3,2)$;

(3)由图象观察可得:当 $-2<x<0$ 或 $x>3$ 时,$y_1>y_2$.



知识点 2 反比例函数的图象和性质

反比例函数的图象的位置及函数值的增减情况,如下表:

反比例函数	$y=\frac{k}{x}(k\neq0)$	
k 的符号	$k>0$	$k<0$
图象		
性质	①x 的取值范围是 $x\neq0$,y 的取值范围是 $y\neq0$ ②函数图象的两个分支分别在第一、第三象限,在每个象限内,y 随 x 的增大而减小	①x 的取值范围是 $x\neq0$,y 的取值范围是 $y\neq0$ ②函数图象的两个分支分别在第二、第四象限,在每个象限内,y 随 x 的增大而增大

若点(m,n)在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$的图象上,则点$(-m,-n)$也在此图象上,故反比例函数的图象关于原点对称.

例 2 当 n 取什么值时,$y=(n^2+2n)x^{n^2+n-1}$是反比例函数?它的图象在第几象限内?在每个象限内,y 随 x 的增大而增大还是减小?

(1)该函数的图象位于哪几个象限?请确定 m 的取值范围;

(2)在该函数图象的某一支上取点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$.

如果 $y_1<y_2$,那么 x_1 与 x_2 有怎样的大小关系?

【答案】1. B 2.(1)$m<5$ (2)①当 $y_1<y_2<0$ 时,$x_1<x_2$;②当 $0<y_1<y_2$ 时,$x_1<x_2$;③当 $y_1<0<y_2$ 时,$x_2<x_1$.

整合突破

3. 对于反比例函数 $y=\frac{3}{x}$,下列说法正确的是(　　)

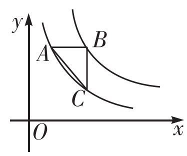
A. 图象经过点$(1,-3)$

B. 图象在第二、四象限

C. $x>0$ 时,y 随 x 的增大而增大

D. $x<0$ 时,y 随 x 增大而减小

4. 如图,Rt△ABC 的斜边 AC 的两个顶点在反比例函数 $y=\frac{k_1}{x}$的图象上,点 B 在反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$的图象上,AB 与 x 轴平行,$BC=2$,点 A 的坐标为$(1,3)$.



【点拨】本题考查反比例函数的定义与性质，根据反比例函数的定义 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 可知，要满足本题是反比例函数，必须且只须 $n^2+2n\neq0$ 且 $n^2+n-1=-1$.

解：$y=(n^2+2n)x^{n^2+n-1}$ 是反比例函数，则 $\begin{cases}n^2+2n\neq0,\\n^2+n-1=-1.\end{cases}$

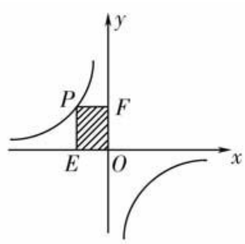
$\therefore n\neq0$ 且 $n\neq-2$，$n=0$ 或 $n=-1$.

故当 $n=-1$ 时，$y=(n^2+2n)x^{n^2+n-1}$ 是反比例函数 $y=-\frac{1}{x}$.

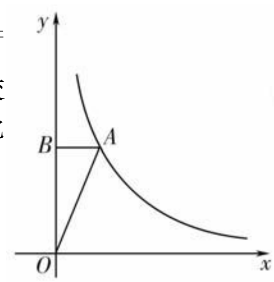
$\because k=-1<0$，$\therefore$ 双曲线两支分别在第二、四象限内，并且 y 随 x 的增大则增大.

知识点3 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，$k\neq0$）中 k 的几何意义

如图所示，过双曲线上任一点 $P(x,y)$ 分别作 x 轴、y 轴的垂线，E、F 分别为垂足，则 $|k|=|xy|=|x|\cdot|y|=PF\cdot PE=S_{矩形OEPF}$. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 中，$|k|$ 越大，双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 越远离坐标原点；$|k|$ 越小，双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 越靠近坐标原点.



例3 如图，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象上有一点 A，AB 平行于 x 轴交 y 轴于点 B，$\triangle ABO$ 的面积是 1，则反比例函数的解析式是（　　）



A. $y=\frac{1}{2x}$　　　　B. $y=\frac{1}{x}$

C. $y=\frac{2}{x}$　　　　D. $y=\frac{1}{4x}$

【点拨】如图，过点 A 作 $AC\perp x$ 轴于点 C，构造矩形 $ABOC$，根据反比例函数系数 k 的几何意义知 $|k|=S_{四边形ABOC}$.

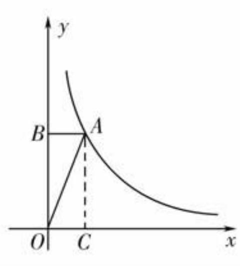
解：如图，过点 A 作 $AC\perp x$ 轴于点 C，则四边形 $ABOC$ 是矩形，

$\therefore S_{\triangle ABO}=S_{\triangle AOC}=1$，$\therefore |k|=S_{矩形ABOC}=S_{\triangle ABO}+S_{\triangle AOC}=2$，

$\therefore k=2$ 或 $k=-2$.

又 $\because$ 函数图象位于第一象限，

$\therefore k>0$，$\therefore k=2$.



则反比例函数解析式为 $y=\frac{2}{x}$. 故选 C.

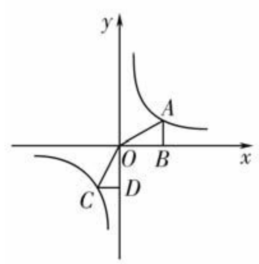
(1)求 C 点的坐标；

(2)求点 B 所在函数图象的解析式.

【答案】3. D　4. (1) C 点坐标为 $(3,1)$　(2) $y=\frac{9}{x}$

整合突破

5. 如图，A、C 是函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上的任意两点，过 A 作 x 轴的垂线，垂足为 B，过 C 作 y 轴的垂线，垂足为 D，记 $Rt\triangle AOB$ 的面积为 S_1，$Rt\triangle COD$ 的面积为 S_2，则（　　）



A. $S_1>S_2$

B. $S_1<S_2$

C. $S_1=S_2$

D. S_1 与 S_2 的大小关系不能确定

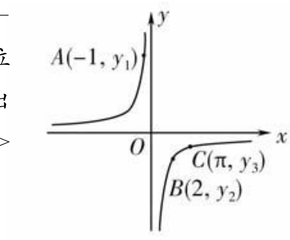
知识点运用：

例 4 已知 $A(-1,y_1)$，$B(2,y_2)$，$C(\pi,y_3)$ 在双曲线 $y=-\frac{k^2+1}{x}$ 上，则函数值 y_1，y_2，y_3 的大小关系是(　　)

A. $y_1>y_2>y_3$　　B. $y_1>y_3>y_2$

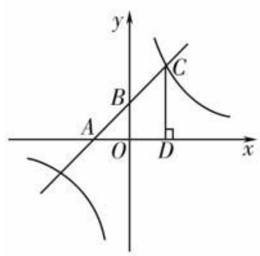
C. $y_2>y_1>y_3$　　D. $y_3>y_1>y_2$

【解析】无论 k 为何值，都有 $-(k^2+1)<0$，所以双曲线的两个分支分别位于第二、四象限，画出示意图，并标出 A,B,C 的大致位置如图所示，则 $y_1>y_3>y_2$，故应选 B.



【答案】B

例 5 如图所示，一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图象与 x 轴，y 轴分别交于 A、B 两点，且与反比例函数 $y=\frac{m}{x}(m\neq0)$ 的图象在第一象限交于点 C，CD 垂直于 x 轴，垂足为点 D，若 $OA=OB=OD=1$.



(1)求点 A,B,D 的坐标；

(2)求一次函数与反比例函数的表达式.

【点拨】(1)根据 $OA=OB=OD=1$，易知 A,B,D 三点的坐标.(2)根据 A,B 两点的坐标可求一次函数的表达式；因为点 C 在一次函数的图象上，且点 C 的横坐标为 1，于是可求点 C 的纵坐标，从而求得反比例函数的表达式.

解：(1)因为 $OA=OB=OD=1$，

所以 A,B,D 三点的坐标分别为 $A(-1,0)$，$B(0,1)$，$D(1,0)$.

(2)因为点 A,B 在一次函数 $y=kx+b$ 的图象上，

所以 $\begin{cases}-k+b=0,\\ b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\ b=1.\end{cases}$ 则一次函数的表达式为 $y=x+1$. 因为点 C 在一次函数 $y=x+1$ 的图象上，$CD\perp x$ 轴，且 $OD=1$，所以 $CD=2$，点 C 的坐标为 $(1,2)$.

又因为点 C 在反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象上，

所以 $m=2$，所以反比例函数的表达式为 $y=\frac{2}{x}$.

6. 已知两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 在反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 的图象上，当 $x_1>x_2>0$ 时，下列结论正确的是(　　)

A. $0<y_1<y_2$

B. $0<y_2<y_1$

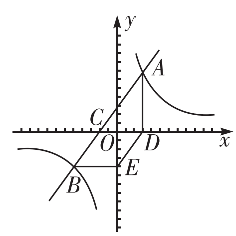
C. $y_1<y_2<0$

D. $y_2<y_1<0$

7. 如图所示，已知直线 AB 与 x 轴交于点 C，与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 交于 $A\left(3,\frac{20}{3}\right)$，$B(-5,a)$ 两点. $AD\perp x$ 轴于点 D，$BE\parallel x$ 轴且与 y 轴交于点 E.

(1)求点 B 的坐标及直线 AB 的函数表达式；

(2)判断四边形 $CBED$ 的形状，并说明理由.



【答案】5. C　6. A

7. (1) $B(-5,-4)$

$y=\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$　(2)菱形

首先可证明四边形 $CBED$ 为平行四边形，再利用勾股定理可证邻边相等，即证.

1.3 反比例函数的应用

知识点拨

知识点1 反比例函数模型的构建

根据实际问题建立反比例函数模型的基本方法有两类：

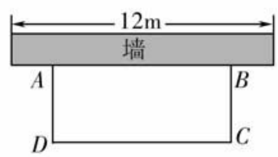
(1)利用所学公式建立反比例函数模型；

(2)利用问题情境中给出的数量关系建立反比例函数模型.

例1 如图，科技小组准备用材料围建一个面积为60 m^2的矩形科技园$ABCD$，其中一边AB靠墙，墙长为12 m.设AD的长为x m，DC的长为y m.

(1)求y与x之间的函数关系式；

(2)若围成矩形科技园$ABCD$的三边材料总长不超过26 m，材料AD和DC的长都是整数米，求出满足条件的所有围建方案.



【点拨】(1)根据面积为60 m^2，可得出y与x之间的函数关系式；(2)由(1)的关系式，结合x，y都是正整数，可得出x的可能值，再由三边材料总长不超过26 m，DC的长小于12 m，可得出x，y的值，继而得出可行的方案.本题考查了反比例函数的应用，根据矩形的面积公式得出y与x的函数关系式是关键，第二问注意结合实际解答.

解：(1)由题意得，$S_{矩形ABCD}=AD\times DC=xy$，故$y=\frac{60}{x}$.

(2)由$y=\frac{60}{x}$，且x，y都是正整数，

可得x可取1，2，3，4，5，6，10，12，15，20，30，60，

$\because 2x+y\leqslant 26$，$0<y\leqslant 12$，

$\therefore$符合条件的围建方案为：$AD=5$ m，$DC=12$ m或$AD=6$ m，$DC=10$ m或$AD=10$ m，$DC=6$ m.

知识点2 应用反比例函数解决实际问题

反比例函数的应用就是运用反比例函数的知识解决与反比例函数相关的实际问题和相关的几何问题等，主要是利用反比例函数的图象探求实际问题中的变化规律来解题.

反比例函数的应用须注意以下几点：

①反比例函数在现实世界中普遍存在，在应用反比例函数知识解决实际问题时，要注意将实际问题转化为数学问题.

②针对一系列相关数据探究函数自变量与因变量近似满足的函数关系.

③列出函数关系式后，要注意自变量的取值范围.

整合突破

1.南宁市某生态示范村种植基地计划用90亩～120亩的土地种植一批葡萄，原计划总产量要达到36万斤.

(1)列出原计划种植亩数y(亩)与平均每亩产量x(万斤)之间的函数关系式，并写出自变量x的取值范围；

(2)为了满足市场需求，现决定改良葡萄品种.改良后平均亩产量是原计划的1.5倍，总产量比原计划增加了9万斤，种植亩数减少了20亩，原计划和改良后的平均亩产量各是多少万斤？

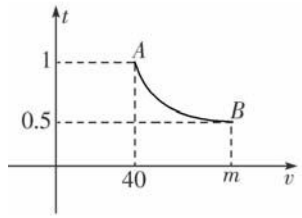
【答案】(1)$y=\frac{36}{x}(0.3\leqslant x\leqslant 0.4)$

(2)原计划0.3万斤，改良后为0.45万斤

整合突破

2.用洗衣粉洗衣物时，漂洗的次数与衣物中洗衣粉的残留量近似地满足反比例函数关系.寄宿生小红、小敏晚饭后用同一种洗衣粉各自洗一件同样的衣服，漂洗时，小红每次用一盆水(约10升)，小敏每次用半盆水(约5升)，如果她们都用了5克洗衣粉，第一次漂洗后，

例 2 一辆汽车匀速通过某段公路，所需时间 t(h)与行驶速度 v(km/h)满足函数关系：$t=\frac{k}{v}$，其图象为如图所示的一段曲线且端点为 $A(40,1)$和 $B(m,0.5)$.



(1)求 k 和 m 的值；

(2)若行驶速度不得超过 60 km/h，则汽车通过该路段最少需要多少时间？

【点拨】(1)将点 $A(40,1)$代入 $t=\frac{k}{v}$，求得 k，再把点 B 代入求出的解析式中，求得 m 的值；(2)求出 $v=60$ 时的 t 值，汽车所用时间应大于等于这个值.

解：(1)由题意得，函数经过点(40,1)，

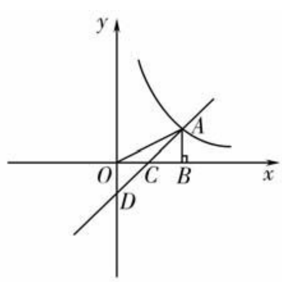
把(40,1)代入 $t=\frac{k}{v}$，得 $k=40$，

故可得：解析式为 $t=\frac{40}{v}$，再把$(m,0.5)$代入 $t=\frac{40}{v}$，得 $m=80$.

(2)把 $v=60$ 代入 $t=\frac{40}{v}$，得 $t=\frac{2}{3}$，∴汽车通过该路段最少需要$\frac{2}{3}$ h.

知识点运用：

例 3 如图所示，在直角坐标系中，点 A 是反比例函数 $y_1=\frac{k}{x}$的图象上一点，$AB\perp x$ 轴的正半轴于点 B，C 是 OB 的中点；一次函数 $y_2=ax+b$ 的图象经过 A，C 两点，并交 y 轴于点 $D(0,-2)$，若 $S_{\triangle AOD}=4$.



(1)求反比例函数和一次函数的解析式；

(2)观察图象，请指出在 y 轴的右侧，当 $y_1>y_2$ 时，x 的取值范围.

【点拨】点 A 是直线与双曲线的交点，求出点 A 的坐标是解决问题的关键.点 A 的坐标可由点 D 的坐标及$\triangle AOD$ 的面积求得.

解：(1)如图，作 $AE\perp y$ 轴于 E，

∵$S_{\triangle AOD}=4$，$OD=2$，

∴$\frac{1}{2}OD\cdot AE=4$.∴$AE=4$.

∵$AB\perp OB$，C 为 OB 的中点，

∴$\angle DOC=\angle ABC=90°$，

$OC=BC$，$\angle OCD=\angle BCA$.

∴$\text{Rt}\triangle DOC\cong\text{Rt}\triangle ABC$.

小红的衣服中残留的洗衣粉还有 1.5 克，小敏的衣服中残留的洗衣粉还有 2 克.

(1)请帮助小红、小敏求出各自衣服中洗衣粉的残留量 y 与漂洗次数 x 的函数关系式；

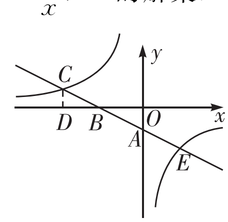
(2)当洗衣粉的残留量降至 0.5 克时，便视为衣服漂洗干净，从节约用水的角度来看，你认为谁的漂洗方法值得提倡，为什么？

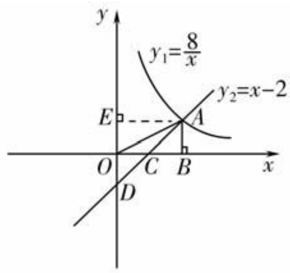
3. 如图，一次函数 $y=kx+b$的图象与坐标轴分别交于 A、B 两点，与反比例函数 $y=\frac{n}{x}$的图象交点为 C、E，$CD\perp x$ 轴，垂足为 D，若 $OB=2$，$OD=4$，$\triangle AOB$ 的面积为 1.

(1)求一次函数与反比例函数的解析式；

(2)连接 OC、OE，求$\triangle COE$ 的面积；

(3)直接写出当 $x<0$ 时，$kx+b-\frac{k}{x}>0$ 的解集.





$\therefore AB=OD=2.\therefore A(4,2)$.

将 $A(4,2)$ 代入 $y_1=\frac{k}{x}$ 中,得 $k=8$,$\therefore y_1=\frac{8}{x}$.

将 $A(4,2)$ 和 $D(0,-2)$ 代入 $y_2=ax+b$,得 $\begin{cases}4a+b=2,\\b=-2,\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2,\end{cases}$ $\therefore y_2=x-2$.

(2)在 y 轴的右侧,当 $y_1>y_2$ 时,$0<x<4$.

例 4 某商场出售一批进价为 2 元的贺卡,在市场营销中发现,此商品的日销售单价 x(单位:元)与日销售数量 y(单位:张)之间有如下关系:

销售单价 x(元)	3	4	5	6
日销售量 y(张)	20	15	12	10

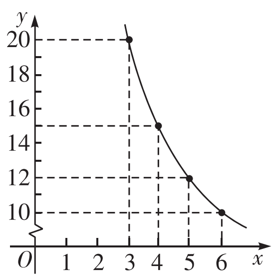
(1)根据表中数据在平面直角坐标系中描出实数对(x,y)的对应点;

(2)确定 y 与 x 之间的函数关系式,并画出图象;

(3)设销售此贺卡的日纯利润为 w 元,试求出 w 与 x 之间的函数关系式.若物价局规定该贺卡售价最高不超过 10 元/张,请你求出日销售单价 x 定为多少元时,才能获得最大日销售利润.

【点拨】(1)直接建立坐标系描点即可;(2)由描点所得图象设函数关系式,将对应点代入求解,最后进行验证;(3)根据题意列代数式,再由所得函数增减性求出答案.

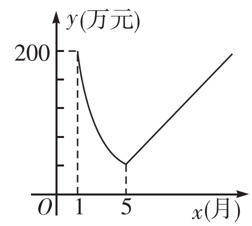
解:(1)由描点法可得下图.



(2)设函数关系式为 $y=\frac{k}{x}$($k\neq0$ 且 k 为常数),把点$(3,20)$代入式中得 $k=60$,又将$(4,15)$,$(5,12)$,$(6,10)$分别代入关系式,均成立.所以 y 与 x 之间的函数关系式为:$y=\frac{60}{x}$.

(3)$\because w=(x-2)y=60-\frac{120}{x}$,则函数是增函数在 $x>0$ 的范围内是增函数,又$\because x\leqslant10$,$\therefore$当 $x=10$,w 最大,$\therefore$此时获得最大日销售利润为 48 元.

4.保护生态环境,建设绿色社会已经从理念变为人们的行动。某化工厂 2015 年 1 月的利润为 200 万元.设 2015 年 1 月为第 1 个月,第 x 个月的利润为 y 万元。由于排污超标,该从 2015 年 1 月底起适当限产,并投入资金进行治污改造,导致月利润明显下降,从 1 月到 5 月,y 与 x 成反比例.到 5 月底,治污改造工程顺利完工,从这时起,该厂每月的利润比前一个月增加 20 万元(如图).(1)分别求该化工厂治污期间及改造工程顺利完工后 y 与 x 之间对应的函数关系式.(2)治污改造工程顺利完工后经过几个月,该厂利润才能达到 200 万元?(3)当月利润少于 100 万元时为该厂资金紧张期,问该厂资金紧张期共有几个月?



【答案】2.(1)小红 $y_1=\frac{3}{2x}$

小敏 $y_2=\frac{2}{x_2}$

(2)$x_1=3$,用量 30 升水,$x_2=4$,用量 20 升水,小敏的方法值得提倡.

3.(1)$y=-\frac{4}{x}$ (2)3 (3)$x<-4$

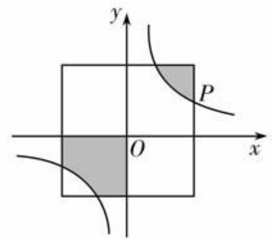
4.(1)$y=\begin{cases}\frac{200}{x},1\leqslant x<5\\20x-60,x\geqslant5\end{cases}$

(2)经过 8 个月,该厂利润才能达到 200 万元 (3)资金紧张期共有 6 个月

思维能力拓展

类型一　反比例函数的概念及解析式

例 1　如图,在直角坐标系中,正方形的中心在原点 O,且正方形的一组对边与 x 轴平行,点 $P(3a,a)$是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$的图象上与正方形的一个交点.若图中阴影部分的面积等于 9,则这个反比例函数的解析式为____________.



【点拨】∵反比例函数的图象关于原点对称,

∴阴影部分的面积和正好等于正方形面积的 $\frac{1}{4}$.

设正方形的边长为 b,则 $\frac{1}{4}b^2=9$,解得 $b=6$,

∴ $3a=\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}\times 6=3$,解得 $a=1$,∴ $P(3,1)$.

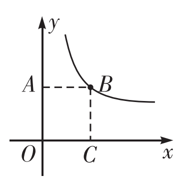
∵点 P 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$的图象上,

∴ $k=3$,∴此反比例函数的解析式为 $y=\frac{3}{x}$.

【答案】$y=\frac{3}{x}$

类型二　反比例函数中 k 的几何意义

例 2　如图,点 B 在反比例函数 $y=\frac{2}{x}(x>0)$的图象上,横坐标为 1,过 B 分别向 x 轴、y 轴作垂线,垂足分别为 A,C,则矩形 $OABC$ 的面积为　　(　　)



A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

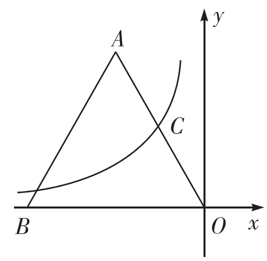
【点拨】∵点 B 在反比例函数 $y=\frac{2}{x}(x>0)$的图象上,过点 B 分别向 x 轴、y 轴作垂线,垂足分别为 A,C,

∴矩形 $OABC$ 的面积 $S=|k|=2$.

【答案】B

整合突破

1. 如图,等边△OAB 的边 OB 在 x 轴的负半轴上,双曲线过 OA 的中点,已知等边三角形的边长是 4,则该双曲线的表达式为　　(　　)



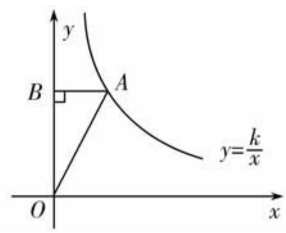
A. $y=\frac{\sqrt{3}}{x}$

B. $y=-\frac{\sqrt{3}}{x}$

C. $y=\frac{2\sqrt{3}}{x}$

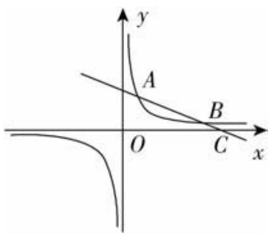
D. $y=-\frac{2\sqrt{3}}{x}$

2. 如图,已知 A 点是反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$的图象上一点,$AB\perp y$ 轴于点 B,且△ABO 面积为 3,则 k 的值为______.



类型三　反比例函数与一次函数的综合运用

例3　如图，一次函数 $y_1=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y_2=\frac{m}{x}$ 的图象相交于点 $A(2,3)$ 和点 B，与 x 轴相交于点 $C(8,0)$.



(1)求这两个函数的解析式；

(2)当 x 取何值时，$y_1>y_2$？

【点拨】求解析式常用待定系数法，函数比较大小利用数形结合求解.

解：(1)把 $A(2,3)$ 的坐标代入 $y_2=\frac{m}{x}$，得 $m=6$. 把 $A(2,3)$，$C(8,0)$ 的坐标代入 $y_1=kx+b$，得 $\begin{cases}3=2k+b,\\0=8k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-0.5,\\b=4,\end{cases}$

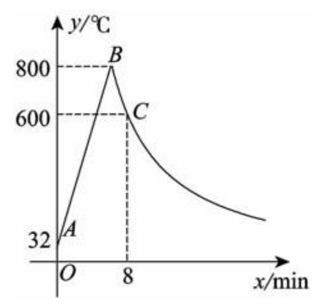
则这两个函数的解析式是 $y_1=-0.5x+4$，$y_2=\frac{6}{x}$.

(2)解方程组 $\begin{cases}y=-0.5x+4,\\y=\frac{6}{x},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=6,\\y_1=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=2,\\y_2=3,\end{cases}$

则当 $x<0$ 或 $2<x<6$ 时，$y_1>y_2$.

类型四　反比例函数在实际生活中的应用

例4　工匠制作某种金属工具要进行材料煅烧和锻造两个工序，即需要将材料煅烧到 800 ℃，然后停止煅烧进行锻造操作. 经过 8 min 时，材料温度降为 600 ℃，煅烧时，温度 y(℃)与时间 x(min)成一次函数关系；锻造时，温度 y(℃)与时间 x(min)成反比例函数关系(如图)，已知该材料初始温度是 32 ℃.



(1)分别求出材料煅烧和锻造时 y 与 x 的函数关系式，并且写出自变量 x 的取值范围；

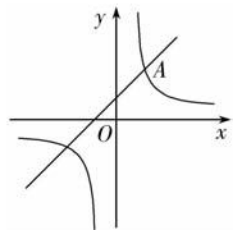
(2)根据工艺要求，当材料温度低于 480 ℃时，须停止操作，那么锻造的操作时间有多长？

【点拨】(1)首先根据题意，材料加热时，温度 y 与时间 x 成一次函数关系；停止加热进行操作时，温度 y 与时间 x 成反比例关系；将题中数据代入用待定系数法可得两个函数的关系式；

3. 如图，一次函数 $y_1=x+1$ 的图象与反比例函数 $y_2=\frac{k}{x}$(k 为常数，且 $k\neq0$)的图象都经过点 $A(m,2)$.

(1)求点 A 的坐标及反比例函数的表达式；

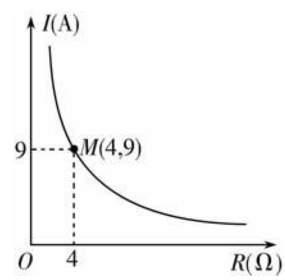
(2)结合图象直接比较，当 $x>0$ 时，y_1 与 y_2 的大小.



4. 蓄电池的电压为定值. 使用此电源时，电流 I(A)是电阻 R(Ω)的反比例函数，其图象如图所示.

(1)求这个反比例函数的表达式.

(2)当 $R=10$ Ω 时，电流能是 4 A 吗？为什么？



(2)把 $y=480$ 代入 $y=\frac{4\ 800}{x}$ 中,进一步求解可得答案.

解:(1)设锻造时 y 与 x 的函数关系式为 $y=\frac{k}{x}$,则将点 $C(8,600)$的坐标代入得 $600=\frac{k}{8}$,即 $k=4\ 800$,

则锻造时 y 与 x 的函数关系式为 $y=\frac{4\ 800}{x}(x\geqslant 6)$.

当 $y=800$ 时,由 $800=\frac{4\ 800}{x}$,解得 $x=6$.

则点 B 的坐标为$(6,800)$.

设煅烧时 y 与 x 的函数关系式为 $y=kx+b$,将 $A(0,32)$,$B(6,800)$的坐标代入,得$\begin{cases}b=32,\\6k+b=800,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=128,\\b=32,\end{cases}$

则煅烧时 y 与 x 的函数关系式为 $y=128x+32(0\leqslant x\leqslant 6)$.

(2)当 $y=480$ 时,$x=\frac{4\ 800}{480}=10$,$10-6=4$,

则锻造的操作时间有 4 min.

【答案】1. B　2. 6　3. (1)$A(1,2)$,$y_2=\frac{2}{x}$　(2)$0<x\leqslant 1$ 时,$y_1<y_2$,$x>1$时,$y_1>y_2$.

4. (1)$I=\frac{36}{R}$

(2)$R=10\Omega$ 时,$I=3.6$ A,不可能为 4 A.

第2章

一元二次方程

单元知识梳理

知识点		内容
基本概念	一元二次方程	方程两边都是整式，只含有一个未知数(一元)，并且未知数的最高次数是2(二次)的方程，叫做一元二次方程
	一元二次方程的一般形式	一个一元二次方程的一般形式为$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，其中ax^2是二次项，a是二次项系数；bx是一次项，b是一次项系数；c是常数项
一元二次方程的解法	直接开平方法	利用平方根的定义直接开平方求一元二次方程的解的方法叫做直接开平方法. 直接开平方法适用于解形如$(x+a)^2=b$的一元二次方程 当$b\geqslant0$时，$x+a=\pm\sqrt{b}$，$x=-a\pm\sqrt{b}$， 当$b<0$时，方程没有实数根
	配方法	将已知方程化为一般形式且二次项系数为1；常数项移到右边；方程两边都加上一次项系数的一半的平方，使左边配成一个完全平方式；变形为$(x+p)^2=q$的形式，如果$q\geqslant0$，方程的根是$x=-p\pm\sqrt{q}$；如果$q<0$，方程无实根
	公式法	将已知一元二次方程化为一般形式：$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，则其求根公式为： $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4ac\geqslant0)$
	因式分解法	将已知一元二次方程化为$(ax+b)(cx+d)=0$的形式，解得$ax+b=0$或$cx+d=0$，即$x=-\dfrac{b}{a}$或$x=-\dfrac{d}{c}$
一元二次方程根的判别式		一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$中，b^2-4ac叫做一元二次方程$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$根的判别式，通常用“Δ”来表示，即$\Delta=b^2-4ac$
一元二次方程根与系数的关系		如果方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两个实数根是x_1，x_2，那么$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$