



同濟大學
TONGJI UNIVERSITY

博士学位论文

分层地基中地下工程开挖对临近桩筏基础的影响分析

(上海市科委重点科技项目 No. 08201200902)

(上海市科委重大科技项目 No. 07dz12006)

(2009年度国家建设高水平大学公派研究生资助项目)

姓 名：木林隆

学 号：0810020001

所在院系：土木工程学院

学科门类：工 学

学科专业：岩土工程

指导教师：黄茂松 教授

(同济大学)

Richard J Finno 教授

(美国西北大学)

二〇一一年十一月



同濟大學
TONGJI UNIVERSITY

A dissertation submitted to

Tongji University in conformity with the requirements for
the degree of Doctor of Engineering

**Analysis of responses of pile-rafts induced by
underground excavations in layered soil**

Sponsored by

The Science and Technology Commission of Shanghai Municipality(Grant No.
08201200902 and Grant No. 07dz12006)
Scholarship of Chinese Scholarship Council

Candidate: Linlong Mu

Student Number: 0810020001

School/Department: School of Civil Engineering

Discipline: Engineering

Major: Geotechnical Engineering

Supervisor: Prof. Mao-song Huang

(Tongji University)

Prof. Richard J Finno

(Northwestern University, USA)

November 2011

分层地基中地下工程开挖对邻近桩筏基础的影响分析

木林隆

同济大学

学位论文版权使用授权书

本人完全了解同济大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，同意如下各项内容：按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版；学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并采用影印、缩印、扫描、数字化或其它手段保存论文；学校有权提供目录检索以及提供本学位论文全文或者部分的阅览服务；学校有权按有关规定向国家有关部门或者机构送交论文的复印件和电子版；在不以赢利为目的的前提下，学校可以适当复制论文的部分或全部内容用于学术活动。

学位论文作者签名：

年 月 日

同济大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名：

年 月 日

摘 要

随着我国城市化进程的推进，特别是在东部沿海软土地区，由于人口集中，建筑密集，而土地资源有限，地下空间开发成为城市基础建设的重要部分，因此有必要考虑地下工程开挖（典型的地下空间开挖包括隧道开挖和基坑开挖两个主要部分）对周边既有建筑的影响。桩筏基础承载力较高，被认为是软土城市地区最为经济实用的基础形式，在软土城市地区高层建筑建设中得到广泛使用。所以，分析地下工程开挖引起的地层位移以及对临近桩筏基础的影响成为分析地下工程设计分析的重要部分，针对该课题的研究可以为隧道和基坑设计提供设计依据以及提供适当的设计方法。而目前对于被动桩的研究主要集中在均质地基中，分层地基中的研究凤毛麟角，且被动桩研究大部分都局限于群桩基础，因此有必要分析在分层地基中，地下工程开挖引起的临近桩筏基础的承载特性。同时目前针对基坑开挖对临近桩筏基础的研究主要靠试验方法和有限元分析，而缺乏可行的简化方法，这主要是因为基坑开挖引起的墙后地表以下土体位移缺乏合理的计算方法。而且有限元分析的计算结果的准确性依赖于输入参数，确定合理的输入参数是有限元较准确的计算基坑周边土体变形的基础。针对这些问题，本文的主要研究工作归纳如下：

1. **目前桩筏基础的研究局限于均质地基中且往往仅限于单一荷载的作用，本文建立了分层地基中复杂荷载耦合作用下刚性桩筏基础的分析方法。**本文首先推导了弹性层状体系中轴对称和非轴对称问题的基本解，在此基础上采用差分方法建立了层状地基中复杂荷载耦合作用下桩筏基础的分析方法。该方法中考虑了桩桩相互作用、加筋效应、桩土相互作用、筏板对桩顶的约束作用和筏板-土相互作用。并通过与既有方法计算结果和有限元方法计算结果验证了该方法的正确性。并进一步研究了各项荷载比例变化时桩筏基础的承载特性的变化。

2. **首次基于严格的层状弹性理论基本解，建立了分层地基中隧道开挖对刚性桩筏基础影响的两阶段分析方法。**第一阶段采用 Loganathan-Poulos 方法计算隧道开挖引起的土体自由场位移，第二阶段采用层状地基中弹性理论法，计算桩和土，桩和桩之间的相互作用，并考虑刚性筏板对桩基和土的约束作用，提出了一套能够分析层状地基中隧道开挖对刚性筏板基础影响的理论方法。将本文方法计算结果与离心试验结果、现有方法计算结果及位移控制有限元计算结果进行对比，得到了较好的一致性，验证了本文方法的正确性。并首次对分层地基中桩筏基础承载特性进行了分析，讨论了隧道埋深、隧道与桩距离、地层损失比、土层分布与桩基分布对临近隧道的被动桩筏基础的影响，并分析了桩

基变形对遮拦效应的削减作用。

3. 考虑土体的小应变特性（基于 HS 和 HSS 模型），采用反分析法与有限元耦合的算法，解决了参数选取问题，较为准确的计算了基坑开挖引起周边土体的变形。准确的计算基坑开挖引起的土体自由场位移是估算基坑开挖对临近桩筏基础影响的基础。目前基坑开挖引起的土体自由场位移的计算缺乏合理的理论方法，主要还是采用有限单元法，而要利用有限单元法较为准确的计算土体的位移场，除了对有限单元法理论以及土体本构知识有较为充足的储备外，模型参数的选取也是重要因素，反分析方法可以有效的解决模型参数的选取问题。且研究表明土体的小应变特性对基坑周边土体的变形具有重要的影响，要准确计算基坑周边土体的位移这也是必须要考虑的因素之一。基于不同路径下室内三轴试验结果和基坑周边土体变形实测结果，考虑土体小应变特性，采用 HS 模型和 HSS 模型，本文利用反分析法和有限元法耦合的算法，确定了合理的参数，较为准确的计算了基坑开挖引起的周边土体位移，为下一步研究奠定了基础。

4. 基于前述有限元计算结果，本文首先建立了基坑开挖引起的土体自由场位移的计算公式，并进一步建立了计算基坑开挖对临近刚性桩筏基础影响的两阶段方法。基于反分析有限元计算结果本文总结了墙后土体位移衰减规律，结合围护墙变形和墙后地表沉降的经验计算方法建立了基坑开挖引起的自由土体位移场的简化计算公式。并在此基础上，基于两阶段方法，建立了层状地基中基坑开挖对临近刚性桩筏基础影响的分析方法。通过与 FEM 方法和实测结果的对比，验证了此方法的正确性，并采用本文方法对基坑开挖深度、围护墙最大水平位移、桩筏与基坑距离以及土层分布对临近基坑的刚性桩筏基础的影响进行了分析。

最后，总结本文的主要工作以及结论，并指出进一步研究的方向。

关键词：被动桩筏、分层地基、隧道开挖、基坑开挖、地下工程、反分析、HSS 模型、应力路径

ABSTRACT

In recent years, there is a significant increase in underground project (including tunneling and pit excavation) due to lack of space in urban areas. In urban areas, many structures are supported on pile-raft foundations because they are widely recognized as one of the most economical foundation systems. For more and more underground project is constructed near the existing pile-supported structures, estimating the addition deformations and forces in existing piles due to underground project constructions become an important part of the underground project designing process. Although there are some methods which are capable of analyzing the response of single piles and pile groups due to tunneling in homogeneous soils, they may give a significantly unreasonable prediction of pile responses in layered soils. No analytical method for analyzing the responses of pile rafts due to excavations has been published which due to the lack of methods to calculate the soil movements induced by excavations. The reasonability of the results from FEM, which is now commonly used to calculate the soil and pile responses induced by excavations, is strongly depend on the input parameters. Considering these problems, the following researches are conduct in this study:

1. Considering the limitation that the researches on pile raft foundations are limited in pile raft foundations in homogeneous soils under a single load, an analytical method for analysis of pile-raft foundations under complex load in layered soils is developed in this study. Firstly, the stress and displacement solutions for the symmetric and asymmetric problems in the multilayered elastic half space are promoted in this study. Employing the finite difference method, an analytical method for analysis of pile-raft foundations under complex load in layered soils is developed based on the stress and displacement solutions for the symmetric and asymmetric problems in multilayered elastic half space. Pile-pile, pile-soil, raft-pile and raft-soil interactions are modeled in the method. The method is verified through comparing with the results from existing methods and the results from FEM. In addition, responses of pile-raft foundations under loads with different load components are studied.

2. Employing a two-stage method, a simplified analysis method has been

developed to estimate the movement and the load distribution of piled raft foundations subjected to ground movements induced by tunneling based on the stress and displacement solutions in layered soil. In this method, the Loganathan-Polous analytical solution is used to estimate the free soil movement induced by tunneling in the first stage. In the second stage, composing the soil movement to the pile, the governing equilibrium equations of piles are solved by the finite difference method. The interactions between structural members, such as pile-soil, pile-raft, raft-soil and pile-pile interactions are modeled based on the elastic theory method of layered half-space. The validity of the proposed method is verified through comparisons with the results from some published solutions, DCFEM and centrifuge tests. Good agreements between these solutions are demonstrated. The method is also used for a parametric study to develop a better understanding of the behavior of pile-rafts influenced by tunneling operation in layered soil foundations.

3. In order to solve the difficulty in defining soil parameters for FEM to compute the soil responses induced by excavations reasonably, an inverse analysis method coupled with FEM is employed to define soil parameters to compute the soil responses reasonably based on HS and HSS model. Evaluation of soil responses induced by excavation, which are now mainly computed by finite element method, is required to estimate potential building damage caused by excavations. Using proper soil parameters is a key ingredient when computing soil responses, assuming the model represents the actual soil response in a reasonable way. Soil parameters are usually identified from laboratory experiments performed on tube samples or from in situ tests, but large uncertainties are associated with these methods for most projects. Inverse analysis is a quantitative technique which allows one to select parameters to fit the responses of soil from both laboratory tests and field observations. The technique is applied to results of both laboratory experiments on block and thin-walled tube samples and field performance data, all collected from an excavation made through Chicago clays. Results of computed soil responses based on the hardening soil model (HS) and hardening model-small (HSS) model found in the computer code PLAXIS are compared to illustrate the problems likely encountered in practical application of finite element simulations. Guidance is provided for selecting parameters from laboratory tests to compute field responses for braced excavation loadings. Based on the well chosen parameters, soil movements induced by the

excavation are computed reasonably.

4. **Based on the results from the FEM analysis mentioned before, a simplified method has been developed to calculate soil movements induced by excavations after the wall firstly. Then a two-stage method to analyze the responses of pile raft foundations induced by excavations is developed.** After studying the reduction rules of the soil movements after the wall induced by the excavation, a simplified method has been developed to calculate the free-field soil movements induced by pit excavations based on the results of finite element methods and the empirical methods for estimating wall deflections and ground settlements after the wall. Then a two-stage method has been developed to analyze the responses of pile-rafts subject to ground movements induced by excavations in layered soils. The simplified method for analysis of free-field soil deformations and the two-stage method for analysis of responses of pile-raft foundations induced by pit excavations has been verified through comparison with the result from the finite element method(FEM). Good agreements are demonstrated. And the two-stage method is used to analyze the influences of the excavation depth, the maximum lateral deflection of the wall, the distance between piles and the wall and the soil stiffness on passive pile-raft foundations adjacent to pit excavations.

Finally, the main works and conclusions are demonstrated, and the problems for further study are discussed.

KEYWORDS: Passive Pile-raft, layered soil, tunneling, excavation, underground project, inverse analysis, HSS model, stress-probe tests

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 桩筏基础研究现状.....	1
1.2.1 竖向桩筏基础研究现状.....	1
1.2.2 水平向桩筏基础分析现状.....	5
1.3 隧道开挖引起的土体位移场研究现状.....	6
1.3.1 经验方法.....	6
1.3.2 整体数值方法.....	8
1.3.3 解析方法.....	10
1.4 基坑开挖引起的土体位移研究现状.....	12
1.4.1 经验方法.....	12
1.4.2 小应变对基坑变形的影响.....	15
1.4.3 基坑变形特性的反分析.....	16
1.5 被动桩研究现状.....	18
1.5.1 试验研究.....	18
1.5.2 整体分析方法.....	20
1.5.3 两阶段分析方法.....	21
1.6 研究目的.....	23
1.7 本文内容.....	24
第 2 章 分层地基中复杂荷载作用下桩筏基础分析	25
2.1 弹性层状半空间对称与非对称问题解析解.....	25
2.1.1 均质地基中基本解.....	25
2.1.2 轴对称荷载下层状弹性半空间的分析.....	26
2.1.3 非轴对称荷载下层状弹性半空间的分析.....	30
2.1.4 数值积分方法.....	35
2.1.5 基本解和程序的验证.....	37
2.2 分层地基中桩筏基础的计算方法.....	38
2.2.1 分层地基中单桩计算方法.....	39
2.2.2 分层地基中群桩计算方法.....	44
2.2.3 分层地基中桩筏基础计算方法.....	47
2.3 方法验证与分析.....	52
2.4 小结.....	56
第 3 章 分层地基中隧道开挖对临近桩筏基础的影响分析	57
3.1 隧道开挖对桩筏基础影响分析的 DCFEM 法.....	57
3.2 隧道开挖引起的土体自由场位移解析解.....	61
3.3 分层地基中隧道开挖对桩筏基础的竖向影响.....	62

3.3.1 计算方法的建立.....	63
3.3.2 计算方法的验证.....	66
3.3.3 竖向影响参数分析.....	76
3.4 分层地基中隧道开挖对桩筏基础的水平向影响.....	90
3.4.1 计算方法的建立.....	90
3.4.2 计算方法的验证.....	93
3.4.3 水平影响参数分析.....	99
3.5 考虑水平与竖向耦合的隧道开挖对桩筏基础的影响.....	107
3.5.1 计算方法的建立.....	107
3.5.2 计算方法的验证.....	109
3.6 小结.....	112
第 4 章 基于反分析法的基坑开挖对周边环境的影响分析.....	113
4.1 反分析方法.....	113
4.1.1 控制方程与收敛准则.....	113
4.1.2 模型拟合程度的统计.....	115
4.1.3 输入参数的统计量.....	115
4.1.4 测量值权重.....	117
4.1.5 优化过程中对参数的限制.....	117
4.2 BLOCK37 基坑概况.....	118
4.2.1 工程场地概况.....	118
4.2.2 地质条件.....	119
4.2.3 施工设计和围护系统.....	120
4.2.4 测量仪器.....	122
4.3 HSS 模型简介.....	124
4.3.1 HS 模型.....	124
4.3.2 HSS 模型.....	126
4.4 基于三轴试验利用反分析法确定土体参数.....	129
4.4.1 芝加哥粘土的三轴试验.....	129
4.4.2 基于三轴试验确定土体参数.....	139
4.5 基于 BLOCK37 基坑实测利用反分析法确定土体参数.....	145
4.5.1 实测数据.....	145
4.5.2 基坑开挖的有限元模型.....	147
4.5.3 基于基坑实测的反分析.....	149
4.6 基于三轴实验和现场实测确定的土体参数的讨论.....	152
4.7 小结.....	154
第 5 章 分层地基中基坑开挖对临近桩筏基础影响简化分析.....	157
5.1 基坑开挖引起周边土体自由场位移的简化计算方法.....	157
5.1.1 围护墙位移与墙后地表沉降经验方法.....	157
5.1.2 基坑周围土体位移场计算方法.....	158
5.1.4 计算方法验证.....	164
5.2 分层地基中基坑开挖对临近桩筏基础的影响分析.....	167

5.2.1 基坑开挖对临近单桩影响的验证.....	167
5.2.2 基坑开挖对临近桩筏影响的分析.....	169
5.3 分层地基中基坑开挖对临近桩筏基础的影响参数分析.....	171
5.3.1 开挖深度的影响.....	171
5.3.2 最大围护墙水平变形的影响.....	172
5.3.3 桩基与围护墙的距离的影响.....	174
5.3.4 土层分布的影响.....	175
5.4 小结.....	177
第 6 章 结论与展望.....	179
6.1 主要研究内容及结论.....	179
6.2 展望及进一步研究方向.....	181
附录 1 室内三轴试验反分析结果.....	183
附录 2 BLOCK37 基坑周边各截面实测水平位移值.....	186
致 谢	192
参考文献	193
个人简历 攻读博士期间撰写的学术论文	205

第 1 章 绪论

1.1 研究背景

随着我国经济建设的突飞猛进，城市基础建设也随之如火如荼的进行。特别是在东部沿海软土地区，由于人口集中，建筑密集，而土地资源有限，地下空间开发成为城市基础建设的重要部分。典型的地下空间开发工程包括隧道开挖和基坑开挖两个主要部分。目前除上海、北京、广州、南京、天津、沈阳、成都、深圳等城市已经开通地铁外，仍有重庆、杭州、宁波、青岛、大连、长沙、福州等 20 余个城市在建设或者规划建设地铁。此外，地铁车站施工、地下商场开发、地下变电站、高层建筑地下室的施工，都面临着基坑开挖。由于受到行车路线、城市空间等因素的影响，地下工程项目的施工总会遇到各种各样的特殊工程问题，其中地下工程开挖对周边既有建筑的影响问题尤为典型。对于隧道无论采用新奥法、盾构法还是其他方法施工隧道都会引起周围土体向开挖区移动，同样对于基坑开挖，无论采取何种支护形式，都难以避免围护墙体向坑内位移，引起周边土体向开挖区移动。这种地层运动会造成邻近隧道和基坑的构筑物的损害，进而影响其安全使用。

桩筏基础承载力较高，被认为是软土城市地区最为经济实用的基础形式，因此在软土城市地区高层建筑建设中得到广泛使用。由于行车路线以及城市空间限制，隧道往往需要从既有建筑桩基旁或者底部穿过，地铁车站、高层建筑地下室也往往需要在既有建筑附近施工，这些地下工程的开挖都会引起周边土体移动，进而影响既有桩筏基础，在桩筏基础中产生附加变形和内力，这将直接影响上部建筑的安全和正常使用。因此，有必要分析地下工程开挖(隧道和基坑)引起的地层位移以及对临近桩筏基础的影响，这可以为隧道和基坑设计时提供设计依据以及提供适当的设计方法。而目前对于被动桩的研究主要集中在均质地基中，分层地基中的研究凤毛麟角，因此有必要分析在分层地基中，地下工程开挖引起的临近桩筏基础的承载特性。

1.2 桩筏基础研究现状

1.2.1 竖向桩筏基础研究现状

目前桩基沉降计算的方法主要有荷载传递法、剪切位移法、弹性理论法（包括积分方程法）、有限元法、边界元法、混合法等方法。

（1）荷载传递法

荷载传递法也称为传递函数法，最早由 Seed 和 Reese (1957) 提出。其基本思路就是将桩沿长度方向划分为若干弹性单元，土体与桩单元的相互作用可用线性或非线性弹簧描述。这些弹簧的应力-应变关系表示了桩侧摩阻力 τ （或桩端阻力 σ ）与剪切位移 s （或桩端位移 s ）之间的关系。此法的关键是荷载传递函数 $\tau-s$ （或 $\sigma-s$ ）的确定。利用已知桩侧和桩端的荷载传递函数求解荷载传递法的基本微分方程。

荷载传递法可以方便地考虑土的分层性和非线性等特性。但是该法将桩周土当作 Winkler 地基处理，假定桩侧任何点的位移只与该点土的摩阻力有关而与其它各处的应力无关，没有考虑土连续性。因此，该法不能直接应用到群桩情况，更不能反映软弱下卧层的影响，在理论上受到一定的局限。为将该方法推广至群桩分析，潘时声（1991）提出分层位移迭代法；王旭东（1994）则通过对传递函数的修正与有限层-有限元法耦合应用于群桩的非线性共同作用分析；田美存等（1997）采用双曲线传递函数根据荷载叠加原理运用分层位移迭代法把荷载传递法推广至群桩分析，并可考虑地基土的分层性和非线性。

（2）剪切位移法

Cooke(1974) 提出了摩擦桩的荷载传递物理模型该模型。假定工作荷载作用下桩与土之间不产生相对位移，因此桩沉降时周围土体也随之发生剪切变形，剪应力 τ 从桩侧表面沿径向扩散到周围土体中。Randolph 和 Wroth(1978)将 Cooke 方法作了补充和修正，提出影响半径 r_m 与桩长及土层性质有关，并按 Boussinesq 解估算桩端沉降量，对可压缩性桩也推导了单桩解析解。随后 Randolph 和 Wroth(1979)又将之推广至群桩分析。Kraft 等(1981)考虑了土体的非线性特性将 Randolph 解推广至土体非线性情况，Chow(1986b)又将 Kraft 解应用于群桩的分析。王启铜(1991)将 Randolph 单桩解由均质地基推广至成层地基；田管凤等(2002)用剪切位移法建立群桩的柔度矩阵求解桩土共同作用。剪切位移法给出了桩周土体位移场运用位移叠加的方法可以实现对群桩的分析但是剪切位移法仅考虑桩土在平面内的相互作用忽略了竖向作用。

（3）弹性理论法

弹性理论法假定地基土是均质各向同性的半无限体，且地基土初始应力状

态不因桩的存在而发生改变；假定桩土之间无相对滑移，桩身某点的位移即为与之相邻点土体的位移。自 20 世纪 60 年代开始，许多学者采用弹性理论法对桩的性状做了大量的研究。各种方法之间的主要区别就是对桩侧剪应力的简化分布模式的假定不同。D'Appolonia 和 Romualdi (1963)、Geddes (1966) 用作用在桩轴线的集中荷载代替桩侧剪应力的分布研究了单桩的沉降问题。较完整的弹性理论方法由 Poulos 和 Davis (1968) 提出，此后 Poulos (1968) 通过引入相互作用系数的概念，应用叠加原理将其推广至群桩，Poulos 和 Davis (1980) 将弹性理论法归纳为比较完善和成熟的体系。

弹性理论法的特点是考虑了土的连续性，对桩-土之间的相互作用的弹性阶段能够进行比较准确的分析，并可用于群桩的分析。弹性理论法把地基看成是理想的弹性体，对非均质土、土的弹塑性或桩土界面发生滑移等复杂情况则需要简化处理。Poulos (1972) 证实桩基在工作荷载下，地基土的变形以弹性变形为主，即弹性分析能够反映工作荷载下的主要工程性状。弹性理论法已经成为桩基础研究中一种很重要的理论方法。

(4) 有限元法

有限元法克服了其他方法理论上的局限性，是一种比较成熟的数值计算方法，由于解决问题的有效性和可靠性，自其问世以来已广泛地应用于包括桩基在内的各类建筑物计算分析当中。Ellison 等 (1971) 使用二维轴对称有限元模型分析了硬粘土中钻孔灌注桩，通过接触面单元分析桩端以外土的拉裂现象。自从 Ottaviani (1975) 年首次运用三维有限元法分析群桩以后，有限元法在桩土共同作用分析中得到了很大的发展 (Muqtadir 和 Desail, 1986; Pressley 和 Poulos, 1986; Trochanis 等, 1991; Xiao 等, 2002; Liang Fa-Yun 等, 2003; Khodair 和 Hassiotis, 2005; Chaudhary, 2007)。

由于有限元法无法模拟无限域，为保证计算精度，在实际工程分析中要考虑很大一部分桩周土体，因此计算量较大，对复杂问题需要有强大的计算机才能实现。

(5) 边界元法

边界元法是建立在弹性理论基础上的，根据桩土变形协调条件建立桩土共同作用的积分方程。边界元法化区域问题为边界问题，可以起到降维的作用，使求解规模得以缩小。Butterfield 和 Banerjee (1971) 最早用边界元分析了弹性地基上带刚性承台的群桩，考虑了地基土的承载力。Banerjee 和 Davis (1978) 又用该法分析了 Gibson 土中的单桩和群桩特性。Kuwabara (1989) 采用边界元

法分析了弹性地基中刚性承台下的桩筏基础考虑了桩的压缩性。由于边界积分方程求解比较困难，而且不具有稀疏性的特点，求解群桩问题时工作量仍然很大。此外边界元法难以直接应用于非均质土中。

(6) 混合法

为减小计算量，提高计算精度，将几种方法结合起来使用而形成的方法称为混合法。如国外学者 Küçükarslan 等(2003)通过在桩土接触面引入非线性弹簧，采用有限元-边界元耦合对桩土的非线性相互作用进行了研究；石名磊等(2003)将杆系结构有限元与荷载传递迭代法相耦合，模拟桩身与桩周介质上的剪切滑移的非线性，建立了桩基沉降计算的混合法；王国才等(2005)采用有限元-无限元相耦合的方法对饱和地基轴对称竖向振动问题进行了研究，Ta 和 Small(1996)采用有限元和有限层相结合的方法，用有限元分析筏板，有限层对土体进行分析。

采用以上几种方法，国内外许多学者对桩筏基础进行了分析。如 Butterfield 和 Banerjee(1971), 赵锡宏(1989), 洪毓康等(1991), Mandolini 和 Viggiani(1997)等人对刚性高承台群桩基础进行了分析。Ottaviani(1975)运用三维有限元法考虑承台与土的相互作用分析了弹性地基上带刚性承台的群桩。Poulos 和 Davis(1980)在他们关于桩的经典专著中总结了桩基础分析与设计的基本原理，提出了桩筏基础的弹性分析方法。Clancy 和 Randolph(1993)采用弹性方法，筏板简化为二维薄板但愿，将桩模拟为一系列的弹簧杆单元，进行了桩筏基础分析。目前的边界元方法在分析桩基问题时一般都假定筏板是刚性的。Zhang 和 Small(2000)采用有限元法分析桩和承台，用有限层法分析层状土，可以解决不同土层上的带刚性承台的桩基础承受水平和竖向荷载情况的问题。Kitiyodom 和 Matsumoto(2003)采用混合法，对地基土模量进行加权平均计算了分层地基中桩筏基础的承载特性。对分层地基目前主要的方法还局限于对地基土刚度进行加权平均，而严格的分层地基理论在桩基分析中的应用发展比较晚主要是受到层状弹性理论的发展的限制。

Burmister(1945)首先采用积分变换(Hankel 变换)的方法得到了双层和多层弹性体系在轴对称荷载作用下应力和位移计算的理论解。理论上，Burmister 解可以解决任意多层地基的力学计算问题，但对于大于 3 层的多层弹性体系，随着层数增多线性方程组的数量也会激增，运用代数的方法求解这些线性方程组得到各层弹性积分常数的文字表达式将是十分困难的。为了避免求解大型线性方程组，Bufer(1971)和 Bahar(1972)各自独立地提出了传递矩阵法，利用 Cayley-