

杨静霞◎著

初中数学

核心素养

落地签

CHUZHONG SHUXUE
HEXIN SUYANG LUODIQIAN



数据分析

直观想象

逻辑推理

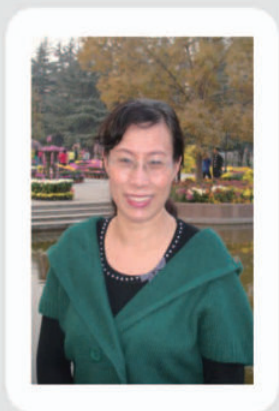
数学建模

数学抽象

数学运算

从核心素养入手 让孩子爱上数学

山东文艺出版社



杨静霞，中学高级教师，山东省淄博市学科带头人，淄博市教学能手，淄博市师德标兵，山东省优秀指导教师，曾在第七届全国新世纪杯初中数学教学设计比赛中获得全国一等奖，在山东省“一师一优课、一课一名师”评选活动中获得省优课奖。现在淄博市临淄区教学研究室从事初中数学的教学研究工作，在三十多年的数学教学与研究工作中，积累了丰富的理论与实践研究经验，主持或参与多个省市课题。其负责的中国教育学会“十一五”科研规划重点课题《初中数学理想课堂教学模式探索》、淄博市教育科学“十二五”规划课题《初中数学分层教学的实践与探索》和《关于区域性初中数学建模的研究与实验》已经结题并获优秀成果奖。在《中学数学教学参考》《中国数学教育》《中学数学》《中小学数学》《中学数学杂志》《山东教育》等杂志上发表论文数十篇。

图书在版编目 (CIP) 数据

初中数学核心素养落地签/杨静霞著. —济南:山东文艺出版社,2019.2

ISBN 978 - 7 - 5329 - 5807 - 8

I. ①初… II. ①杨… III. ①中学数学课—初中—教学参考资料 IV. ①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 013429 号

初中数学核心素养落地签

杨静霞 著

主管单位 山东出版传媒股份有限公司
出版发行 山东文艺出版社
社 址 山东省济南市英雄山路 189 号
邮 编 250002
网 址 www.sdwypress.com

读者服务 0531 - 82098776(总编室)
0531 - 82098775(市场营销部)

电子邮箱 sdwy@sdpress.com.cn

印 刷 山东德州新华印务有限责任公司
开 本 710 毫米 × 1000 毫米 1/16
印 张 18
字 数 220 千
版 次 2019 年 2 月第 1 版
印 次 2019 年 2 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5329 - 5807 - 8
定 价 39.00 元

版权专有,侵权必究。如有图书质量问题,请与出版社联系调换。

序

杨静霞老师是山东省淄博市临淄区教学研究室的数学教研员、淄博市学科带头人、淄博市教学能手、淄博市师德标兵、中学高级教师。她先后在《中学数学教学参考》《中国数学教育》《中小学数学》《山东教育》《中学数学》等杂志发表多篇论文，此次她撰写的《初中数学核心素养落地签》一书，内容上落地课堂、对接中考、拓展课程，在为一线数学教学提供解决问题的途径和方法方面进行了积极的探索和有益的尝试。

杨老师 31 年的工作生涯中，在初中数学教学岗位上耕耘了 18 年，之后，带着她丰硕的经验和智慧又战斗在初中数学教研员的岗位上，一干就是 13 年。多年来，她精心研究初中数学教材和中考试题，积累了大量的备考方法。她深入课堂，进行教研，先后负责三个课题，研究领域涉及中国教育学会“十一五”科研规划重点课题《初中数学理想课堂教学模式探索》（2009 年结题），淄博市教育科学“十二五”规划课题《初中数学分层教学的实践与探索》（2015 年结题），淄博市教育科学“十二五”规划课题《关于区域性初中数学建模的研究与实验》（2016 年结题），并于 2017 年 5 月在淄博市第五届教育科研优秀成果评选活动中获奖。

担任教研员后，杨老师把临淄区初中数学教师团队的成长作为自己的使命，她砥砺前行、不断提升自己的专业和理论素养，为的是能够让老师们得到理念和专业的引领。她先后几次被山东省中小学师资培训中心评为优秀指导教师。在她的指导下，边文艳老师获山东省优质课一等奖、全国优质课二等奖，李向亮老师获山东省首届优秀微课程评选一等奖，青年教师黄东老师获山东省优质课一等奖，王静、徐杰、崔君玉老师获部级优课奖。

杨老师撰写的《初中数学核心素养落地签》，是她多年的思考与积累，也是对学科核心素养落地生根的有效探索。全书共分为4章：一、让学生爱上数学——数学有趣味；二、学会做思维体操——数学有方法；三、决胜中考有妙招——研究有成果；四、重建课堂价值观——课型有创新。

第一章“让学生爱上数学——数学有趣味”，紧扣六大数学核心素养，是对教科书的有效补充和拓展。本章从六方面展示了数学的趣味：趣在数学运算，趣在数学抽象，趣在数学建模，趣在逻辑推理，趣在直观想象，趣在数据分析。其中既有数学在生活中的应用，也有对数学教学内容的挖潜，故事不长，但意味深长，对开拓师生的思维视野，提高学习数学的兴趣，发挥学科的育人价值有重要的意义。

第二章“学会做思维体操——数学有方法”，则具体化了初中数学的八大数学思想方法：一变就是一重天——数学转化思想；相倚相联永不分——数形结合思想；分分合合情兼全——分类讨论思想；如影相随繁化简——数学模型思想；相亲相爱一家人——整体代换思想；巧以不变应万变——位置变换；化动为静一脉承——动点问题；读你百遍意自见——阅读理解。其中既有理论高度，又有最新中考题的示范解析，对于指导师生数学的备考，大有裨益。

第三章“决胜中考有妙招——研究有成果”，则是杨老师多年来写作的精华，是她对数学问题解决、难点突破方法等研究成果的积累，为数学复习提供了多种可供借鉴的学习策略，从多角度指导师生的数学备考，其中既有对中考解法的精彩展示，又有对教材的深度思考。

第四章“重建课堂价值观——课型有创新”，给读者提供了体现“新基础教育”先进理念的课堂教学的设计和点评，还有对初中数学建模、分层教学的研究实践成果地分享，是一场数学教学的盛宴。

王会芳

2018年8月8日

目 录

第 1 章 让学生爱上数学——数学有趣味

- 1.1 趣在数学运算 / 2
 - 1.1.1 巧用幻方智解趣味题 / 3
 - 1.1.2 估算无理数的大小 / 6
 - 1.1.3 因式分解 方法多多 / 8
 - 1.1.4 分式方程一定有解吗? / 12
- 1.2 趣在数学抽象 / 14
 - 1.2.1 遇到“说理”不要慌 整式加减帮你忙 / 15
 - 1.2.2 节约水资源问题 / 17
 - 1.2.3 孙猴子分菜园 / 19
- 1.3 趣在数学建模 / 21
 - 1.3.1 方程搭台 勾股唱戏 / 22
 - 1.3.2 王老师买鸡蛋 / 24
 - 1.3.3 汽车的平均速度 / 25
 - 1.3.4 分式“寻亲”记 / 26
 - 1.3.5 一道课本题目的变式 / 28
- 1.4 趣在逻辑推理 / 31
 - 1.4.1 巧添辅助线 轻松来说理 / 32
 - 1.4.2 巧分类讨论三角形 / 37
 - 1.4.3 “边边角”能够判定两个三角形全等吗? / 38
 - 1.4.4 再生勾股定理的证明 / 42
 - 1.4.5 李大伯的愿望 / 46

- 1.5 趣在直观想象 / 48
 - 1.5.1 勤动手 巧总结 / 49
 - 1.5.2 “CT 影像诊断技术”扫描几何体 / 52
 - 1.5.3 神奇的剪拼术 / 55
 - 1.5.4 平移真奇妙 生活很需要 / 58
- 1.6 趣在数据分析 / 60
 - 1.6.1 妙用方差公式巧解题 / 61
 - 1.6.2 被墨水污染了, 怎么办? / 64
 - 1.6.3 谁是你最喜欢的选手? / 68
 - 1.6.4 谁的误差小? / 70

第 2 章 学会做思维体操——数学有方法

- 2.1 一变就是一重天——数学转化思想 / 74
- 2.2 相倚相联永不分——数形结合思想 / 85
- 2.3 分分合合情兼全——分类讨论思想 / 95
- 2.4 如影相随繁化简——数学模型思想 / 109
- 2.5 相亲相爱一家人——整体代换思想 / 122
- 2.6 巧以不变应万变——位置变换 / 130
- 2.7 化动为静一脉承——动点问题 / 151
- 2.8 读你百遍意自见——阅读理解 / 173

第 3 章 决胜中考有妙招——研究有成果

- 3.1 抓特点 巧运算 / 184
- 3.2 被忽视的数学阅读理解 / 188
- 3.3 化动为静 分类讨论 / 193
- 3.4 巧考图形变换, 妙查核心素养 / 200
- 3.5 发现规律 建立联系 归纳推理 / 206
- 3.6 由细微处抓特点, 从本质上找规律 / 212
- 3.7 源于课本 变于课本 高于课本 / 217
- 3.8 剪拼有法 模型当家 / 222
- 3.9 “小题”更要“大做” / 225

第 4 章 重建课堂价值观——课型有创新

- 4.1 代数概念教学的新授课 / 230
- 4.2 探究代数规律的新授课 / 238
- 4.3 探究几何规律的新授课 / 249
- 4.4 贯穿整章知识的复习课 / 258
- 4.5 代数建模示例 / 263
- 4.6 几何建模示例 / 267
- 4.7 分层教学设计的案例示范 / 271

参考文献 / 275

后 记 / 277

第 1 章

让学生爱上数学——数学有趣味

数学是一门科学，数学的趣味性来源于生活。数学教师要尽力挖掘课程的潜在价值，有效开拓课程资源，激发学生的求知欲望，培养学生的学习兴趣，不断提升学生的学科素养，逐步渗透学科价值，充分发挥数学学科的育人功能，如此数学定会大放异彩，让学生感到魅力十足。

2002年8月，在北京举行的国际数学家大会（ICM2002）上，91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词，写下了“数学好玩”4个大字。可能有人会说，陈老师是因为数学学得好而觉得好玩，自己学得不好，感觉数学枯燥单调不通人情。而事实是，陈老师是因为对数学感兴趣，觉得好玩，才成为数学家的。他说：“早晨醒来，想的第一件事就是数学。我的生活就是数学，终身不倦的追求就是数学，数十年如一日，从没有懈怠过，现在依然如此……用功不是指每天在房里看书，也不是光做习题，而是要经常想数学，一天至少有七八个小时在思考数学。”

而我认为数学的有趣缘于生活——数学来源于生活，又反作用于生活，用数学知识可以轻松地解决生活中的难题。多年来，我深入研究教材，对义务教育教科书中的内容进行拓展，积累了大量丰富多彩的数学生活故事。下面让我们一起来阅读思考这些故事，从“趣在数学运算、趣在数学抽象、趣在数学建模、趣在逻辑推理、趣在直观想象、趣在数据分析”六大核心素养出发，感受数学的无处不在，体会数学的奥秘，欣赏数学的无穷魅力。

1.1 趣在数学运算

数学运算素养是指在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题的素养。主要包括：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，选择运算方法，设计运算程序，求得运算结果，等。

数学运算是解决数学问题的基本手段，是计算机解决问题的基础。

数学运算的过程主要包括：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，求得运算结果。

在数学运算核心素养的形成过程中，学生能够进一步发展数学运算能力，有效借助运算方法解决实际问题，通过运算促进数学思维发展，形成规范化思考问题的品质，养成一丝不苟、严谨求实的科学精神。

1.1.1 巧用幻方智解趣味题

在几千年的数学历史长河中，幻方是一朵奇葩。人们一直都对幻方有着浓厚的兴趣，“三阶幻方”（如图1）、“四阶幻方”（如图2）当数最古老的幻方。它的最大特征是每行、每列、每条对角线上的几个数之和都相等。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

图2

利用这一特点，我们可以巧妙地去解决数学问题。下面大家要开动脑筋了：

一、爱因斯坦巧用“三阶幻方”设计“填数”题

著名物理学家爱因斯坦曾经应一家杂志社的要求，设计过这样一道填数题：

如图3所示，9个圆圈分别是3个小的等腰三角形，1个较大的等腰三角形和3个大的等腰三角形的顶点。将1~9这九个数字填入圆圈，要求这7个三角形中每个三角形顶点的数字之和都相等。

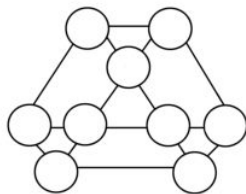


图3

观察并分析“爱因斯坦填数题”，它具有“三阶幻方”的特征要求，于是联想到用“三阶幻方”来帮助解决。观察发现：中间三角形上的3个圆圈和其余三角形的联系最多。而这一点和“三阶幻方”中的对角线上的数比较相似。我们不妨在中间三个圆圈里填上5—2—8或4—5—6。下面（如图4）是一种具体的填法：

①中间三个圆圈填5—2—8；

②从“三阶幻方”中看出，8与4，3相加得15，所以与8组成小三角形中的另两个圆圈里应分别填3，4；

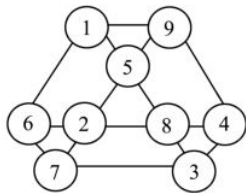


图4

③确定 3, 4 的位置. 观察“三阶幻方”, 有 4—9—2 和 3—5—7. 这样就简单了, 把 4 放在 2—8 横线上, 让 2—4—9 组成一个大三角形, 把 3 放在 5—8 线上, 组成 3—5—7 大三角形. 其余相同.

同理可填出另三种情况, 请大家自己动手试试.

二、冯·诺依曼教授巧用“三阶幻方”解“取牌游戏”问题

曾有人向世界杰出的数学家冯·诺依曼教授请教如下取牌游戏问题:

九张扑克牌, 分别是 A (即 1), 2, 3, ..., 9, 正面向上放在桌子上, 两人轮流取牌. 已取走的牌不能重新放回去, 谁手中先有 3 张牌点数加起来等于 15, 谁就赢.

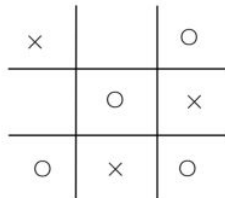


图 5

冯·诺依曼教授马上就想到了“三阶幻方”. 因为“三阶幻方”里有 8 组三数之和等于 15. 于是上面的取牌游戏就变成了另一种全然不同的形式: 对策的双方, 一方要尽可能使自己占据“三阶幻方”中某行、某列、某对角线上的三个位置; 而另一方则要竭力阻拦这种局面的形成. 实际上, 这就是中国古老的游戏“吃井字”. 如图 5, 两人轮流在一个“井”字框里画“○”或“×”, 谁能把自己画的“○”或“×”连成一条直线, 谁就算赢.

我们注意到: 在 8 组三数之和为 15 的组合中, 含有 5 的有 4 种, 含有 2, 4, 6, 8 的各只有 3 种, 而含有 1, 3, 7, 9 的各只有 2 种. 由此可见, 先拿牌的人必须取“5”, 即占据“井”字格的中央位置, 这样便会稍占一些上风. 事实上, 如果对方此时误取奇数点的牌的话, 则必败无疑! 只要分析一下图 5 中的符号, 你就会明白其中的奥秘.

三、富兰克林巧用“四阶幻方”解“花瓶的摆放”问题

美国科学家富兰克林是一个很喜欢动脑筋的人, 他常常出一些题目, 来考身边的同事.

有一次, 他在自己的办公室里, 应同事们的要求编了一道新的智力题. 他从邻近的桌子上取来 16 个空花瓶, 分别在瓶上写好从 0 到 15 的 16 个编号, 并把这些花瓶摆成方阵状 (见图 6). 摆完后富兰克林对大家说:

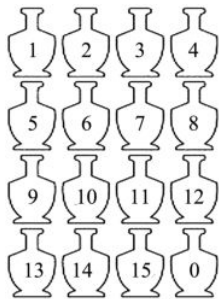


图 6

“请你们将这些花瓶重新布置一下，使瓶上的数字能组成这样一个幻方：横竖4行及两条对角线上的数字之和均为30。但有一个限制条件，移动的瓶子数不得超过10个。当然，瓶子在同一行里的平移不在限制条件之列。例如，第二行里的5，6号花瓶，从第一列和第二列分别平行移到同一行里的第二列和第三列就不算移动。请问：这些瓶子应怎样移动？在移动过程中，有几只瓶子没有移动过？”

同事们听到要求后，就投入到紧张的思考中去。一个小时后，大家对摆放方法进行了讨论，并选出了最优答案：

按题目要求，在移动过程中有7个瓶子（见图7中插花的及8号瓶子）没有移动。仔细看还可发现，只有8号瓶的位置确实确实没有移动过。

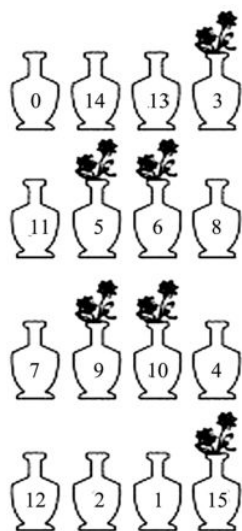


图 7

上面三例富有趣味的幻方问题，都运用到了数学中的运算能力。而加法运算在解题过程中发挥了重要的作用。这三个问题，通过培养学生的运算能力，提升了学生的数学学科素养。

1.1.2 估算无理数的大小

学校要举行美术作品比赛. 小丽想用一块面积为 900cm^2 的正方形纸片沿着边的方向裁出一块面积为 820cm^2 的纸片, 且它的长宽之比为 $5:4$, 再在纸片上画上自己的拿手之作. 但是她不知道能否裁得出来. 小丽正在发愁, 小刚见状说: “用一块面积大的纸片一定能裁出一块符合要求的面积小的纸片.” 小刚的说法对吗? 小丽能用这块大纸片裁出符合要求的小纸片吗?

大家先试着解答, 再看下面的分析过程.

假设能裁出符合要求的长方形纸片, 设长方形纸片的长为 $5x\text{cm}$, 宽为 $4x\text{cm}$.

则可以得到 $5x \cdot 4x = 820$, 即 $20x^2 = 820$,

所以 $x^2 = 41$, 解得 $x_1 = \sqrt{41}$, $x_2 = -\sqrt{41}$ (不合题意舍去).

因此长方形的长为 $5\sqrt{41}\text{cm}$, 而正方形的边长为 $\sqrt{900} = 30$ (cm).

因为 $5\sqrt{41} > 5\sqrt{36}$, 即 $5\sqrt{41} > 5 \times 6 = 30$, 因此长方形纸片的长超过了正方形纸片的边长, 所以小丽不能用这块正方形纸片裁出符合要求的长方形纸片.

那小丽要用边长至少为多少厘米 (精确到毫米) 的正方形, 才能裁出自己理想的纸片呢?

$$\because \sqrt{36} < \sqrt{41} < \sqrt{49}, \text{ 即 } 6 < \sqrt{41} < 7,$$

$$\text{设 } \sqrt{41} = 6 + k \quad (0 < k < 1),$$

$$\text{即 } (\sqrt{41})^2 = (6 + k)^2,$$

$$\therefore 41 = 36 + 12k + k^2.$$

$$\therefore 41 \approx 36 + 12k. \text{ 解得 } k \approx \frac{5}{12}.$$

$$\therefore \sqrt{41} \approx 6 + \frac{5}{12} \approx 6 + 0.42 = 6.42.$$

所以小丽至少要用边长为 $5 \times 6.42 = 32.1$ 厘米的正方形纸片才能裁出自己理想的纸片。

上面帮助小丽解决问题的过程，其实还探究了无理数的估算方法，大家发现了吗？在解决一些问题的时候，我们经常需要估算无理数的大小。下面给大家分享几个常见的无理数的估算值记忆口诀：

$\sqrt{2} \approx 1.414\ 21$ ：意思意思而已。

$\sqrt{3} \approx 1.732\ 0$ ：一起生鹅蛋。

$\sqrt{5} \approx 2.236\ 067\ 9$ ：两鹅生六蛋（送）六妻舅。

$\sqrt{7} \approx 2.645\ 751\ 3$ ：二妞是我，气我一生。

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.828\ 42$ ：啊，不啊不是啊。

$\pi \approx 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 6$ ：山巅一寺一壶酒，尔乐吾杀吾，把酒吃，酒杀尔，杀不死，乐而乐。

估算是数学运算的一种重要方法。对无理数的估算，用到了平方和开平方两种运算，若能抓住特点把常用的无理数的近似值记住并熟练运用，既能提高运算能力，又能算得又快又准，可以更好地发挥利用数学知识解决实际问题的能力。

1.1.3 因式分解 方法多多

八年级六班的学生在学习因式分解时，不仅牢固地掌握了提取公因式法、运用公式法这两种常规方法，而且在学习委员睿睿的带领下能够适当拓展，灵活运用，把“转化”等数学思想渗透在因式分解中。下面是他们总结出来的多种方法：

一、常规方法

例1 把代数式 $ax^2 - 4ax + 4a$ 分解因式，下列结果中正确的是（ ）。

A. $a(x-2)^2$

B. $a(x+2)^2$

C. $a(x-4)^2$

D. $a(x+2)(x-2)$

评析：本题采用先提取公因式，再利用公式的方法进行因式分解，答案应选 A.

二、特殊方法

(一) 配方法

1. 拆项后配方

例2 把 $x^2 + 2ax - 3a^2$ 因式分解。

解：原式 $= x^2 + 2ax + a^2 - 4a^2$

$$= (x^2 + 2ax + a^2) - 4a^2$$

$$= (x+a)^2 - (2a)^2$$

$$= (x+a+2a)(x+a-2a)$$

$$= (x+3a)(x-a)$$

评析：本题把 $-3a^2$ 拆成 a^2 和 $-4a^2$ 后，采用分组后运用公式法完成因式分解。

2. 添项后配方

例3 把 $4x^4 + 1$ 因式分解。

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2 \\
 &= (2x^2 + 1)^2 - 4x^2 \\
 &= (2x^2 + 1 + 2x)(2x^2 + 1 - 2x)
 \end{aligned}$$

评析：本题在分解之前，先加上 $4x^2$ ，再减去 $4x^2$ ，配成完全平方后再利用平方差公式因式分解。

(二) 换元法

例4 把 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ 因式分解。

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] + 1 \\
 &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{设 } x^2 + 5x &= y, \text{ 则原式} = (y+4)(y+6) + 1 \\
 &= y^2 + 10y + 24 + 1 \\
 &= y^2 + 10y + 25 \\
 &= (y+5)^2 \\
 &= (x^2 + 5x + 5)^2
 \end{aligned}$$

评析：本题把 x^2+5x 看成一个整体，用 y 来代替，简化了解题过程，展现了换元法化简求解的巧妙。

(三) 十字相乘法

例5 把 $(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)-120$ 因式分解。

$$\begin{aligned}
 \text{解: 原式} &= (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 120 \\
 &= [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] - 120 \\
 &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 120 \\
 &= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 24 - 120 \\
 &= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) - 96 \\
 &= (x^2 + 5x + 16)(x^2 + 5x - 6) \\
 &= (x^2 + 5x + 16)(x+6)(x-1)
 \end{aligned}$$

评析：本题多次采用十字相乘法进行因式分解，把 x^2+5x 看成一个整体展开、重组、再分解。

(四) 待定系数法

例6 已知 x^4+6x^2+x+12 有一个因式是 x^2+ax+4 ，求 a 的值和这个多项式的其他因式。

解：设另一个多项式为 x^2+bx+3 ，则