



申请同济大学工学博士学位论文

# 非协调板壳元理论研究 及在桥梁分析中的应用

(国家高新技术研究发展专项 863 计划资助项目  
编号: 2006AA11Z120)

培养单位: 土木工程学院

一级学科: 土木工程

二级学科: 桥梁与隧道工程

研究生: 许德胜

指导教师: 肖汝诚 教授

二〇〇八年五月



A dissertation submitted to  
Tongji University in conformity with the requirements for  
the degree of Doctor of Philosophy

# **Incompatible Shell Element And Its Application In Bridge Analysis**

(Supported by the National High Technology Research and Development  
Program of China (863 Program), Grant No.2006AA11Z120)

School/Department: School of Civil Engineering

Discipline: Civil Engineering

Major: Bridge & Tunnel Engineering

Candidate: De-sheng Xu

Supervisor: Prof. Ru-cheng Xiao

**May, 2008**

## 学位论文版权使用授权书

本人完全了解同济大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，同意如下各项内容：按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并采用影印、缩印、扫描、数字化或其它手段保存论文；学校有权提供目录检索以及提供本学位论文全文或者部分的阅览服务；学校有权按有关规定向国家有关部门或者机构送交论文的复印件和电子版；在不以赢利为目的的前提下，学校可以适当复制论文的部分或全部内容用于学术活动。

学位论文作者签名：

年 月 日

## 同济大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律 responsibility 由本人承担。

学位论文作者签名：

年 月 日

## 摘要

现代桥梁结构形式日趋复杂，简化分析方法已不能完全满足桥梁结构分析的要求，有必要对全桥结构进行精细分析。本文针对桥梁结构精细化分析的计算精度和求解效率，对桥梁结构分析理论中的数值方法做了研究，并用于实桥的结构分析。

在八节点三维实体等参元基础上，将板理论基本假定引入弹性应力应变矩阵，并为局部坐标系下的挠度位移分量附加非协调位移，构造了非协调实体退化板单元。采用分域积分方法使单元可考虑普通钢筋的加强作用。单元厚薄通用，可用于正交异性钢桥面铺装层分析。

通过对板的法向位移沿板厚方向的二次插值，构造了采用完全三维本构关系，可考虑结构三维应力状态的实体板元，单元可用于混凝土箱梁各构件的法向应力分析。为确保不规则单元通过分片检验，推导了显式表达的高阶非协调位移模式修正项。并且，通过为板元面内位移分量附加非协调位移，构造了适合箱形复杂截面桥梁分析的非协调壳元，使箱梁桥结构分析更加简单、高效。

为提高计算效率，基于非协调板壳元构造了可以大规模缩减计算量的组合单元。通过为组合单元各子域分别附加前文壳元的非协调位移模式反映单元内各构件的变形，并在子域内确保组合单元通过分片检验。组合单元允许一个单元内含有不同的材料和构件，对钢-混凝土组合结构桥梁分析十分有效。

基于广义 Maxwell 粘弹性模型，对混凝土桥梁长期荷载作用下的徐变效应进行研究，并采用引入广义 Maxwell 粘弹性模型的组合单元研究了钢-混凝土组合截面桥梁的长期受力性能。

最后，将组合单元用于杭州文晖斜拉桥的动力特性分析，并与脉动试验结果进行了比较。

**关键词：**桥梁分析理论，非协调元，分片检验，板壳单元，组合单元，混凝土徐变，动力特性

## ABSTRACT

The simplified analytical method is characterized by many assumptions and simplifications, and it is not suitable for the analysis of complex bridge structures. The numerical analytical method is studied to improve the precision and efficiency of bridge structural analysis.

A plate bending element is derived from the familiar eight-node brick element. To overcome the thickness locking, the degenerated solid approach is adopted by modifying the elastic constitutive relation. User-defined local coordinate system is established to conveniently introduce the incompatible modes. The formulation has only translational displacement degrees of freedom and the geometry in the thickness direction is correctly displayed. The element is suitable for the analysis of reinforcing concrete bridge by calculating the element stiffness matrix over the subdomains. Numerical examples show the applicability and effectivity of the element formulation. And it can also be applied to the analysis of the pavement on orthotropic steel bridge decks.

Another solid-plate finite element formulation, which takes account of the fully three-dimensional stress state, is developed by directly assuming a quadratic distribution of the normal displacement in thickness direction over the thickness. An efficient revision scheme without using numerical volume integration is developed to ensure the satisfaction of the patch test. The cracking situation of the closing segment of the prestressed concrete box girder can be analyzed by this element. Additionally, an analytical method for box girder is proposed by introducing the incompatible modes into the in-plane displacements. Numerical results from the present method are in good agreement with solutions obtained by other authors, though few elements are used.

For complicated structures, this paper particularly proposes a so-called assembled element on the basis of the above incompatible shell element, which may consist of many plates/shells. Different materials and members can be included in a

unique element. This allows us to use much less elements to model complicated bridge structures such as the stiffened beam and steel-concrete composite bridges, while it can still reflect various details such as the mechanical character, geometry, spatial position, the contribution to the system stiffness and mass, of each member involved.

The assembled element model, which reflects the creep characteristics of concrete, is established by employing the generalized Maxwell viscoelastic model. The time-dependent behavior of steel-concrete composite girder bridges is also analyzed.

Three-dimensional free vibration analysis of Wenhui cable-stayed bridge is conducted by using the proposed method. Numerical results are in good agreement with experimental results given by other authors.

**Key Words:** analysis method for bridge structures, incompatible element, patch test, shell element, assembled element, concrete creep, dynamic characteristic

## 目录

第 1 章 绪论.....	1
1.1 引言 .....	1
1.2 桥梁结构分析的数值方法.....	4
1.2.1 有限单元法研究进展.....	4
1.2.2 板梁分析理论研究进展.....	6
1.2.3 组合单元法研究进展.....	8
1.2.4 混凝土桥梁徐变计算理论研究进展.....	9
1.3 已有研究中存在的不足.....	10
1.4 本文研究的主要内容 .....	11
第 2 章 非协调实体退化板单元.....	14
2.1 引言 .....	14
2.2 非协调元理论与分片检验.....	15
2.3 非协调实体退化板单元.....	15
2.3.1 单元几何与坐标系 .....	16
2.3.2 应力-应变本构关系.....	18
2.3.3 非协调位移模式 .....	20
2.3.4 单元刚度矩阵 .....	22
2.4 单元考核.....	24
2.4.1 单元基本品质试验 .....	25
2.4.2 其他单元品质试验 .....	30
2.5 小结 .....	32
第 3 章 非协调实体板单元.....	33
3.1 引言 .....	33
3.2 非协调位移模式 .....	33

3.3 显式表达的非协调位移模式修正项 .....	34
3.4 单元考核.....	38
3.5 小结 .....	42
<b>第 4 章 非协调壳单元 .....</b>	<b>43</b>
4.1 引言 .....	43
4.2 单元刚度矩阵.....	44
4.3 单元节点应力.....	46
4.4 单元质量矩阵.....	48
4.5 程序实现.....	49
4.6 单元考核.....	52
4.6.1 单元基本性能测试 .....	52
4.6.2 桥梁动力特性分析 .....	58
4.6.3 箱梁剪力滞分析 .....	61
4.6.4 箱梁约束扭转分析 .....	63
4.7 小结 .....	65
<b>第 5 章 基于非协调壳元的组合单元 .....</b>	<b>66</b>
5.1 引言 .....	66
5.2 单元几何及等参变换 .....	67
5.3 非协调位移模式.....	70
5.4 程序实现.....	71
5.5 单元考核.....	72
5.6 小结 .....	80
<b>第 6 章 混凝土桥梁徐变分析.....</b>	<b>81</b>
6.1 引言 .....	81
6.2 基本假定.....	83
6.3 粘弹性本构关系 .....	84
6.3.1 单轴应力状态下的本构关系.....	84

6.3.2 空间应力状态下的本构关系.....	87
6.4 考虑徐变的非协调元有限元列式 .....	88
6.5 程序实现.....	91
6.6 单元考核.....	92
6.6.1 单元基本性能测试 .....	92
6.6.2 钢混凝土组合截面桥梁徐变分析.....	93
6.7 04 规范混凝土徐变计算.....	97
6.8 小结 .....	99
<b>第 7 章 桥梁动力特性分析实例.....</b>	<b>100</b>
7.1 引言 .....	100
7.2 文晖大桥概况 .....	101
7.3 有限元模型.....	104
7.4 文晖大桥动力特性结果.....	104
7.5 小结 .....	109
<b>第 8 章 结论与展望 .....</b>	<b>111</b>
8.1 结论 .....	111
8.2 进一步研究的方向 .....	112
参考文献.....	113
个人简历 在读期间发表的学术论文与研究成果.....	122
致谢 .....	123

# 第1章 绪论

## 1.1 引言

二十世纪八十年代以来,我国已建成了多座具有世界影响力的大跨度桥梁。随着交通量的增加和对桥梁美学等因素的重视,宽幅桥梁、曲线桥梁和异型桥梁等复杂结构层出不穷。桥梁跨度的显著提高以及新型结构形式的不断涌现对工程技术人员分析水平提出了更高要求,传统简化分析方法已不能完全满足现代桥梁结构设计的要求,必须借助模型试验或精细化数值模型来获得桥梁结构的准确受力性能。近二十多年来,随着计算机技术的进步,桥梁结构分析已经历了从线性计算到非线性计算,从静力计算到动力计算,从平面计算到空间计算,从局部模型计算到全桥模型计算的过渡。相较模型试验而言,数值分析方法以其低廉的成本和便于实现性在现代桥梁结构设计中引起越来越多的关注。

目前,有限单元法已成为土木工程领域中最通用、最有效的数值分析方法。利用有限元法分析桥梁结构有多种离散模型,常用的有空间梁单元法、板壳元法、三维实体元法和梁格法<sup>[1]</sup>。

空间梁单元法采用一维空间梁单元对桥梁结构进行离散。空间梁单元假定横截面尺寸与桥梁跨度相比较小,可将实际结构视为作用在剪切中心上的弹性梁;变形后梁截面周边形状不变,符合刚性截面假定;空间梁单元法能给出计算截面的内力分布,可直接用于桥梁结构设计。由空间梁单元的基本假定可知:宽梁桥不符合空间梁单元的基本假定,空间梁单元法很难得到横梁等构件的准确内力分布。

箱形截面的钢筋混凝土桥梁可采用板壳单元进行离散,当板壳单元相当细密时可模拟桥梁结构的各种受力行为,是桥梁上部结构分析较为常用的方法之一。然而文献[1]指出:采用板壳元模拟顶、底板受力性能误差不大;但考虑到横梁尺寸往往比顶、底板大得多,用板壳元模拟并不合适。此外,经典板壳单元往往基于中面构造,网格剖分仅在结构中面进行,在与实体单元连接、厚/薄板元的适用性选择、计算效率和计算精度等方面仍存在许多不足<sup>[2]</sup>。

梁格法是分析桥梁结构比较实用的空间分析方法,因此在桥梁结构分析中

得到了广泛应用<sup>[3]</sup>。通过分析梁格的受力可以得到实桥的受力状态,适用于梁式、梁板式桥梁的结构分析。但由于梁格法引入了许多假定,分析精度不尽人意<sup>[4]</sup>。

桥梁结构设计常需要考虑受力复杂部位的空间应力状态。对受力复杂的局部构造,往往从整体结构中取出隔离体,将整体分析得到的隔离体截面内力和位移边界条件作为隔离体的边界条件,采用空间实体元分析。通常,隔离体大小,内力和位移边界条件等因素对分析结果影响较大。

从理论角度,目前已经可以建立整桥的精细化分析模型,准确掌握桥梁的静、动力特性,从而确保结构安全。然而,考虑到桥梁结构的复杂性、计算机容量和速度的限制,整桥精细化分析成本还过高,难度相当大。因此,现阶段桥梁结构分析仍主要依靠杆系理论的分析成果,精细化三维分析仅局限于桥梁的局部构件。

综上所述,现有数值分析方法已能考虑桥梁结构的许多本质问题,使桥梁结构分析水平有了较大提高。然而,仍不能满足复杂桥梁结构的分析要求,还存在许多问题亟待解决:

1. 在桥梁计算模型中,代表构件的线单元之间的节点连接仅能从构件本身刚度来考虑连接的约束程度,无法考虑节点的真实构成;另外,点连接还将导致构件在宽度和高度方向的几何量产生误差,很难考虑节点板、隔板位置和空洞等的影响,尤其是节点板和拼接板对节点刚度的增强作用<sup>[5-6]</sup>。此外,基于梁格理论的平面杆系和空间杆系分析方法,难以准确考虑桥梁结构的横向联系。

2. 杆系分析方法得到的构件内力和应力结果不能反映具有空间尺度构件的真实受力状态,而设计上往往不重视构件空间受力效应,将超大型构件作为杆件对待,出现全断面平均应力和整体内力满足规范要求但局部不满足强度要求的现象。以单箱多室箱梁为例,平面分析只能得到构件的整体内力和各腹板的平均应力。实际上,由于空间荷载效应,各腹板的内力截然不同。同时,剪力滞效应使其应力分布复杂化,造成计算得到的应力分布与实际情况不符。采用这样的分析结果进行结构强度设计可能造成结构的部分区域安全度过大,而另一部分区域安全度不足。

3. 随着桥梁结构形式的多样化,局部构造也趋于复杂。设计中只能通过局部空间应力分析来验证结构的安全性;对于一些复杂结构,常出现应力盲区,设计只能采取保守的安全系数法来解决,致使构件庞大,不符合桥梁美学要求。此外,即使对局部构造进行空间应力分析也常常因为难以准确获得局部结构模

型的边界条件，使得计算结果失真。

4. 由于泊松比效应和空间效应的影响，横向和纵向的受力相互耦合，构件处于空间应力状态，而杆系分析方法不能反映其空间应力状态，这是杆系方法不可避免的缺陷。

5. 桥梁构件不仅在纵横向受力，而且还存在竖向应力。预应力薄壁结构（如：箱梁顶板、底板）由于泊松效应、预应力径向力和自重作用，会在壁厚方向（竖向）产生拉应力，若无相应的钢筋布置（如钩子筋等），则薄壁结构可能产生分层破坏，这是许多预应力箱梁桥在预应力张拉过程中出现崩裂的主要原因之一<sup>[7]</sup>。由于引入了忽略法向应力的基本假定，经典板壳单元难以给出此类结构的三维应力状态。

6. 桥梁结构特有的空间预应力分析、混凝土收缩徐变分析、构件内力和应力调值计算、施工过程仿真分析等计算内容实现较为繁琐；通用有限元程序的空间分析仍停留在校核层面，且空间分析结果与桥梁规范取值不匹配，不能直接指导结构设计。

7. 桥梁抗风、抗震研究中，为获得与真实桥梁结构相近的动力特性，动力计算模式应着重于结构的刚度、质量和边界条件模拟，使其尽可能与实际情况相符。采用空间杆系或板壳单元进行模拟难以准确描述桥梁结构的真实质量分布和刚度特性，导致与特定桥梁振动模态对应的自振频率误差较大。

为克服传统桥梁结构分析方法的不足，有必要对桥梁分析理论中的数值方法做进一步研究，以充分考虑桥梁结构的空间受力性能。为此，需要按照全桥所有承载构件的直观几何形状，空间位置和力学特性，采用真正的三维应力应变关系对桥梁构件予以模拟，组合成为整座桥梁完整、统一的分析体系，并在此基础上进行整桥结构效应计算，由此得到详尽而又精确可靠的分析结果。为此，桥梁结构分析的数值模型需满足下述要求，

1. 宜采用统一结构分析体系的全桥数学模型，以区别于划分不同体系、层次、平面或构件，先分别计算，再进行叠加组合的传统计算方法<sup>[6]</sup>。

2. 数值模型应能精确描述桥梁结构的实际几何特征、质量分布和构件间的连接关系。

3. 应能考虑纵、横隔板和加筋肋等构件对结构受力性能的影响；可考虑桥梁结构分析中的泊松效应、竖向应力和纵/横向应力耦合问题。

传统的桥梁分析理论将桥梁作为一般工程结构体系，采用常规的梁、板、

壳和实体单元对结构进行离散，其分析成果往往受单元精度和计算效率的制约。为适应现代桥梁结构分析要求，有必要对桥梁结构分析理论中的数值方法做深入研究。

## 1.2 桥梁结构分析的数值方法

有限单元法在桥梁结构分析中的应用带来了桥梁技术的重大变革，促进了桥梁结构形式、设计理论和施工方法的不断创新和发展。有限单元法分析的质量主要取决于单元类型的选择和网格划分情况。目前，桥梁结构分析主要采用梁格法、板壳元法和三维实体单元法等。由于简化方法对实际结构存在较多假设，难以准确反映结构的实际情况，国内外许多学者已开始采用实体单元和板壳单元对桥梁结构进行三维分析<sup>[6, 8]</sup>。

### 1.2.1 有限单元法研究进展

有限单元法最早由 Clough<sup>[9]</sup>在一篇关于平面弹性问题的论文中提出。Besseling<sup>[10]</sup>在将有限单元法和传统里兹法比较后指出，有限元法是里兹法的另一种形式，其试函数就是分片插值函数，在单元上解析，在整个域上仅满足连续条件。试函数的这一改进，使得有限单元法比传统里兹法更为灵活，适应性更强。我国学者对有限单元法的发展有不少贡献：著名学者冯康提出的基于变分原理的差分格式<sup>[11]</sup>就是有限元法；卞学璜<sup>[12]</sup>指出，对某些边值问题，有限单元法和有限差分法得出的方程组是一致的。迄今为止，有限元法作为一种数值方法在理论上已经比较成熟，许多有限单元法的专著已出版<sup>[13-17]</sup>，有限元法展现出前所未有的生命力。

就理论而言，可以利用三维实体单元详尽分析桥梁结构的各板件和杆件等的受力性能，并可以避免引入结构力学的简化，但这样做在实际的桥梁结构分析中遇到了一定困难。这是由于在采用实体单元对结构进行离散时，如果网格适应结构的几何特点，即实体单元的两个方向或一个方向比其他方向小得多，将使单元不同方向的刚度系数相差过大，从而导致求解方程的病态或奇异，最后将使解丧失精度或根本失败。反之，为避免上述问题，保持实体单元在各个方向尺度相近，将导致单元数过分庞大，使分析无法进行<sup>[18]</sup>。为此，现有桥梁

结构的整体分析往往很少直接采用实体单元进行。板壳单元考虑到构件的几何特点，在力学分析中引入了一定假设，使之简化为二维问题，不但在数值求解角度考虑是必要的，还可使计算量得到很大缩减，在桥梁结构的整体分析方面适用范围更广。

由于按照板壳理论直接构造协调且简单有效的板壳单元遇到了巨大困难，因此板壳结构有限元分析的研究十分活跃。研究人员已提出了多种解决办法，并获得了一定成功，如龙驭球等提出的广义协调元<sup>[19]</sup>，Ahamed 和 Zienkiewicz 等构造的退化板壳元<sup>[20]</sup>，Chen 等提出的基于 Mindlin/Reissner 板理论的精化板元<sup>[21]</sup>和 Pian 等<sup>[22]</sup>构造的杂交应力板壳元，Bathe 等构造的 MITC 板壳元<sup>[105]</sup>等。目前，工程分析最为常用的是退化板壳元，该类单元虽然在分析板壳结构时表现出优异的数值性能，但用于桥梁结构分析时仍存在下述问题，

1. 单元通常基于中面构造，网格划分仅在结构中面进行，不能准确反映箱梁桥顶板与腹板、底板与腹板交界位置的几何特征，因而很难准确描述该位置的复杂应力分布。此外，交接位置几何描述的不准确导致在用于桥梁结构动力特性分析时不能精确考虑桥梁的质量分布。

2. 单元存在转动自由度，通常有限元列式不含面内刚度，与梁单元和实体单元的连接需要专用的过渡单元通过多点约束方程实现<sup>[18]</sup>。此外，转动自由度的存在也给不规则边界条件的施加带来困难<sup>[2]</sup>。

3. 基于 Kirchhoff 理论的薄板单元与基于 Reissner-Mindlin 理论的厚板单元适用性各异。通常，桥梁结构中板的厚度并不是一确定值，往往是变厚度的，在采用板壳单元分析时，需根据构件的特征几何尺寸和单元的适用性进行单元类型选择。

4. 经典退化板壳单元通常采用平面应力本构关系，忽略板壳结构的法向应力，并不能如实体单元般描述桥梁结构的三维应力状态，对需要考虑板的法向应力状态，避免板的层间撕裂问题无能为力。

与基于中面的板壳元相比，Hauptmann 和 Schweizerhof<sup>[2]</sup>构造的固壳元因无转动自由度且采用实体几何描述而引起众多研究者的关注，该单元无需过渡单元便可直接同实体单元连接。固壳元用于板壳结构分析时，往往存在不同程度的剪切和厚度锁闭，现在主要采用假设自然应变法(ANS)和增广假设应变法(EAS)克服各类锁闭<sup>[2,23-24]</sup>。其中，EAS 方法最早由 Simo 和 Rifai<sup>[24]</sup>基于多域变分原理提出，并在文中证明了 EAS 方法和非协调元方法的等价性。其后，该方法被

Büchter 等<sup>[25]</sup>用于固壳单元的构造。Hauptmann 和 Schweizerhof<sup>[2]</sup>则基于 ANS 和 EAS 方法对固壳单元进行了系统开发。最近, Bischoff<sup>[26]</sup>又从理论上提出了构造同 EAS 单元相匹配的非协调元的一般化方法。此外, Sze 等<sup>[27]</sup>还基于杂交应力方法和 ANS 方法构造了固壳单元。Simo 和 Hughes<sup>[28]</sup>等指出, 杂交应力方法、EAS 方法以及非协调元方法均可统一为 **B-bar** 方法, 在该方法中应变位移矩阵为假定应变算子所替代。

固壳单元除上面所描述的优点外, 由于采用 ANS 方法克服板壳的剪切和厚度锁闭, 因此对厚/薄板壳结构均适用。此外, 无需引入板壳理论忽略其法向应力的基本假定, 可以采用真实的三维应力应变关系, 因此可如实体单元般描述桥梁各构件的三维真实应力状态。现在, 许多商业有限元程序均已将 EAS 单元加入其单元库, 如 ANSYS V9.0、MARC V2007、ABAQUS V6.5 和桥梁专用分析程序 LUSAS 等。

同固壳单元相似, 徐兴等<sup>[29]</sup>和凌道盛<sup>[30]</sup>分别构造的 16-20 节点实体退化板壳元及三棱柱数值流形板单元也具有上述优点。文献[29-30]均通过将 Mindlin 板假定引入三维弹性本构关系得到。为确保单元位移模式能模拟挠度在板中面内的变化, 单元上下表面的边中节点必须存在, 或采用高阶数值流形覆盖, 单元自由度相对较多。

与协调位移元相比, 非协调元<sup>[31]</sup>扩大了试探函数的选择空间, 可获得比协调元更高的计算精度。非协调元和基于 EAS 方法的单元相同, 为确保数值解答的收敛必须要求通过常应力分片检验。分片检验的概念最早由 Bazelay 等<sup>[32]</sup>提出, Taylor 等<sup>[33]</sup>指出检验单元收敛性时只要求满足弱式分片检验, 不强求满足强式分片检验。进一步研究表明, 对无转动自由度的固壳元必须通过膜分片检验, 但不强制通过常弯曲强式分片检验<sup>[34,35]</sup>。目前, 已有许多方法被提出用以确保非协调元在不规则网格下通过分片检验: Taylor 等<sup>[36]</sup>建议计算非协调应变位移矩阵时取单元中心处的雅可比矩阵; Wilson 等<sup>[37]</sup>通过给应变位移矩阵附加修正矩阵, 强迫单元通过分片检验; Choi 等<sup>[38]</sup>和陈万吉<sup>[39]</sup>分别采用直接修正法和精化直接刚度法使单元通过分片检验; Wu 等<sup>[40]</sup>则采用拉格朗日乘子法对单元刚度矩阵进行修正。文献[36-39]的修正方法本质上与虚参数法<sup>[41]</sup>相同, 均通过修正单元常应变矩阵强迫单元通过分片检验。

## 1.2.2 板梁分析理论研究进展

板梁分析理论是介于梁和板壳有限元法之间的一种理论，具有操作简便的特点，许多研究成果已证明了该方法的有效性<sup>[42-44]</sup>。

王荣辉、曾庆元<sup>[42]</sup>应用板梁单元提出了考虑截面板单元组成的箱梁计算方法，节点的轴向位移和扭转位移采用线性函数，得到了精度比较好的变形结果，但没有对箱梁应力结果进行验证。该方法由于采用的单元尺寸比常规板壳单元要大，因此，选择合理的形函数就显得尤为重要。已有箱梁理论研究表明，轴向位移和扭转位移沿梁纵向假定为线性变化时不能反映约束扭转、畸变和剪力滞等特性。从提高计算精度考虑，对上述位移需要引入高阶的位移插值函数来描述箱梁结构变形特征。

谢旭等<sup>[43]</sup>根据箱梁在纵向的变形特性，引入高阶位移函数，改进了基于板梁单元的箱梁计算方法。该方法可得到较高精度的位移和应力结果，且在支点附近的应力和变形比板壳单元的结果更为合理。但是，该文献分析结果的验证仅局限于钢桥。考虑到预应力混凝土箱梁板厚相对较大，其适应性需进一步验证。此外，作为整体分析简化方法，其计算效率仍需进一步提高。

陈衡治等<sup>[44]</sup>在文献[42]的基础上同样采用高阶插值形函数，构造了适用于厚壁箱梁的单元。为较好地考虑翼板的横向变形，分析翼板的单元在横向需要两个中节点，并引入了高次轴向位移函数。为提高计算效率，采用子结构法进行自由度凝聚。吴再新等<sup>[45]</sup>提出的板段元法在理论上与之较为接近，该单元为克服薄板的剪切锁闭，采用了替代剪切应变(ANS)方法。

此外，Hamed 等<sup>[4]</sup>将箱梁结构视为板和梁的组合构件，分别考虑板、梁各自的变形，并采用位移协调条件对板、梁进行组合，求解了箱梁结构的自由振动问题。

板梁分析理论同基于中面构造的板壳元相似，在用于桥梁结构分析时仍存在许多不足：

1. 竖向荷载作用下，箱梁顶板和底板表现为面外弯曲变形，而腹板则以面内弯曲变形为主，为分别考虑顶板、底板和腹板的不同变形特征，板梁分析理论对顶板和底板通常采用 6 节点板壳元分析，而腹板则往往采用 4 节点板壳元分析，这对竖向荷载作用下的结构响应是合适的。但是，水平荷载作用下，箱梁顶、底板以及腹板的变形特征与竖向荷载作用下的变形特征恰恰相反。若仍采用上述网格划分方案，则很难确保可合理描述横向荷载作用下桥梁结构不同构件的变形特点。此外，单元列式的不统一给程序实现和网格划分带来了不便。