数学解题理论与实践
高中分册

赵雄辉主编

湖南教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学解题理论与实践. 高中分册／赵雄辉主编. —长沙：湖南教育出版社，2015.8（2016.4 重印）

ISBN 978－7－5539－2456－4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①中学数学课—高中—题解 Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 106933 号

书　　名	数学解题理论与实践（高中分册）
主　　编	赵雄辉
策划编辑	胡　旺
责任编辑	甘　哲　邹楚林
责任校对	崔俊辉　刘　源
出版发行	湖南教育出版社出版发行（长沙市韶山北路 443 号）
网　　址	http://www.hneph.com
电子邮箱	hnjycbs@sina.com
微信服务号	多点学习
客　　服	电话 0731－85486979
经　　销	湖南省新华书店
印　　刷	长沙宇航印刷有限公司
开　　本	787×1092　16 开
印　　张	24.5
字　　数	530 000
版　　次	2015 年 8 月第 1 版　2016 年 4 月第 1 版第 2 次印刷
书　　号	ISBN 978－7－5539－2456－4
定　　价	48.00 元

数学解题理论与实践

高中分册

编写委员会

主　　任：赵雄辉

副 主 任：欧阳新龙　黄仁寿

编　　委：（按姓氏笔画排序）

王开和　王献忠　龙立荣　申建春　李文英　李代凤

李献军　张国平　张理科　周大明　胡　旺　赵奔灵

贺才田　费建华　唐　亮　唐作明　唐振球　曾红斌

廖建忠　谭俊凭　颜望辉

主　　编：赵雄辉

本册主编：黄仁寿　欧阳新龙

编　　者：黄仁寿　沈文选　何日生　崔亚辉　刘　军

Preface | 前　言

数学课程有丰富的教育价值，数学教育要承担全面的教育责任.

中小学开设数学课程，要为学生未来的生活提供必要的数学基础知识、基本技能和基本思想，要为学生进一步学习准备数学工具，要利用数学发展学生的思维，提高学生分析问题和解决问题的能力，提高学生的抽象概括、推理论证、空间想象和数据处理的能力，以便他们在未来无法预料的局势中做出有意义的选择，还要培养学生良好的情感与态度，锻炼克服困难的意志，形成坚持真理、严谨求实的科学态度，等等.

这些目标的实现，需要经历漫长的数学学习过程. 而在这缓慢而艰难的数学课程学习中，解题扮演着重要的角色. 客观事实告诉我们，学习数学，许多时间是在学习解答数学题目，通过解题巩固知识，熟练技巧，发展思维，培养能力，锻炼意志品质，把知识、方法、思想设计到数学问题之中，再让学生在解题中达到许多不同的教学目的. 所以波利亚说，“可以把解题看作是人类的最富有特征的一种活动”，帮助学生在从事这种活动中获得收益是数学教育的任务.

正是因为数学老师要花大量时间教学生做题目，老师自己就要有做题目的经验、体会与教训. 而“解题是一种实践性技能，就像游泳、滑雪或者弹钢琴一样，只能通过模仿和实践来学到它”（波利亚），如果老师自己没有寻求思路的困惑，没有完整写出解题过程的训练，完全靠照搬习题解答来讲解，就难以让自己的解题教学活动生动有趣. 所以说：

没有足够的全面解题实践就难以找到教会学生解题的诀窍；

不经常做题目的老师就不会获得做题目的喜悦；

不喜欢做数学题目的人就难以真正喜欢数学；

不喜欢数学的人最好不要教数学.

于是乎，每个数学老师要在自己的教师职业生涯中始终保持解题的习惯. 尽管

我们从小学到大学都做过数以千计的题目，在从事数学教育职业活动的同时，还要继续琢磨题目，去品味做题的过程，反思做过的题目，保持做题目的热情，享受做题目的乐趣，从做题目中获取营养，并输送到教学中.

正是基于这种认识，湖南省中学数学教学研究专业委员会组织编写了这两本书，试图提供一些范例资源和问题资源，引导老师们适当做一点题目，通过分析、解答、反思来玩味一些题目.

在编写过程中，我们意识到，给老师选什么样的题目，提供什么样的分析，如何反思，是一件很困难的事情，不少问题选取和解答看上去不适合老师的基础，分析写得不理想，可改起来却并不容易. 可见，选择好的题目、做出有思维量的分析，还是我们要长久努力探究的课题. 很高兴的是，很多老师对第一版提出了一些有益的意见和建议，本书编写组对此进行了精心的修订和完善，在此我们对辛勤付出的老师们表示衷心的感谢！同时，我们也欢迎更多读者对本书中可待修改之处批评指正，以便不断提高、完善. 所以，特别期待老师们在使用过程中一起参加本书的修改，你觉得哪些题目不合适，可以增加哪些题目，怎么分析，怎么反思，怎么拓展，都可以与作者交流. 来信请发邮件至 2057689947@qq.com.

本书是一些老师集体合作讨论的结果，除了主要编写者之外，为本书编写提供资料的还有：彭小林，肖宗传，邓磊，刘军，李丽银，尹成平，唐狄杰，周静波，张茜，易芳艳，张晓岩，胥登，刘贵顺，曾山.

赵雄辉

2016 年 3 月 18 日

Contents | 目　录

策 略 篇

基 础 篇

提 高 篇

策 略 篇

第 1 章　数学问题与解题概述

应用系统科学方法来研究数学教学已经有多年的历史了，它大大提高了教育理论的科学性，同时也大大增强了教学实践的自觉性. 在这些成果中，自然包括了对数学解题教与学的研究. 因此，当我们研究数学解题的理论时，用系统科学的观点来描述数学问题与数学解题就水到渠成了.

1.1　数学问题

数学问题是一个由四要素组成的系统，记作 $R(Y，O，Z，P)$，

Y 表示初始状态，即题的条件（条件信息），或系统 R 的问题性特征.

O 表示最终状态，即题的目标（目标信息），或系统 R 的稳定性特征.

Z 表示解，即由初始状态到最终状态的转化过程（运算信息），或系统 R 的转换特征.

P 表示解题依据，即由初始状态到最终状态转化的理论与实践的基础（依据信息），或系统 R 的机理或转换基础.

按照系统科学的观点，数学问题是由解题主体 M（这里指人）与数学题系统 R 组成的集合（M，R）. 如果主体 M 接触系统 R 后认为，R 中全部元素、性质及关系都是他所知道的或不知道的，那么我们就称系统 R 对于主体 M 为稳定性系统，记作 R_0；如果主体 M 接触系统 R 后，四个要素中至少有一项是已知的，又至少有一项是未知的，那么我们就称系统 R 相对于主体 M 为问题性系统，记为 R_x. 如果主体 M 被要求从 R 中确定他所不了解的元素的性质和关系时，R 对于 M 就成为问题，问题反映了解题者现有水平与客观需要的矛盾. 因此，问题就是矛盾，而解题就是将问题性系统转化为稳定性系统，解题过程是人们寻求解的思维活动.

在问题情境中，“未知的”（元素、元素的性质或元素间的关系等）一方面像空着的位置，需要加以填充，另一方面又由“已知的”（元素、元素性质、元素间的关系等）客观决定着，构成“已隐蔽地确定”与“未明显地给予”的统一. 解题的思维活动正是从已明确地给予的、已知的东西出发，去发现隐蔽地存在的、待求解（证）的结论. 这是一个积极而生动的创造过程.

与通常讲的数学题的概念相比，上述数学问题的概念具有两个特点：

（1）强调主体 M 的作用

数学问题并不是纯客观的孤立的题系统 R，而是由 R 与解题主体 M 构成的整体.

一个 R 是否成为问题，首先是 R 对于 M 是否成为问题性系统；其次是 M 有否解决 R 的意向和要求. 由此可见，那些不能激发学习者思考的、过于简单或者过于繁难的题目，那些多次重复、使人乏味或者远离学习者需要、被学习者认为漠不关心的数学习题都不能看成具有教学价值的数学问题.

（2）使数学问题更具广泛性

例如，对数学概念的研究，对数学方法的概括与探讨，数学在实际生活中的应用等等都是数学问题，在数学教学中应该重视它们的价值.

我们可以根据问题 R_x 中未知元素的个数，将问题分类如下表：

未知要素的个数	问题类型	记号	确定度
3	问题型问题	R_x^3	最不确定
2	探索型问题	R_x^2	较不确定
1	训练型问题	R_x^1	确定
0	标准型问题	R_x^0	完全确定

【范例资源】

例 1 对于高中学生，刚开始学习不等式的证明，分别有以下问题：

问题 1：设 a，b 为正实数，求证：$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$. 这是 R_x^0 型问题.

问题 2：设 a，b 为正实数，求证：$\dfrac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$. 这是 R_x^1 型问题，解是未知的.

问题 3：设 a，b，c 为任意实数，求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$. 这是 R_x^2 型问题，解与解的依据都是未知的.

问题 4：设 a，b 为正实数，讨论$\sqrt{2}$与$\dfrac{a}{b}$和$\dfrac{a+2b}{a+b}$的关系. 这是 R_x^3 型问题. 最终状态、解、解的依据都是未知的.

在具体解决的过程中，这几类习题的求解通常是逐级变换的，即是由三个转化时态构成的：$R_x^3\to R_x^2$，$R_x^2\to R_x^1$，$R_x^1\to R_x^0$. 并且随着解题时态的进展，思维的目的性愈来愈明确，思维的方向性愈来愈集中，逻辑思维的成分逐渐增加，非逻辑思维的成分逐渐减少，思维的结果愈来愈明确. 其具体情况如下表.

时态	$R_x^3\to R_x^2$	$R_x^2\to R_x^1$	$R_x^1\to R_x^0$
思维的指向性	不明确	比较明确	明确
思维的发散性	强发散	发散	集中
思维的形式和方法	想象、联想、类比、发散思维、直觉思维	联想、类比、归纳、探索性演绎、直觉思维、发散思维、逻辑思维	演绎、完全归纳、逻辑思维
思维要素	探索、选择、判断	选择、判断、探索、推理	推理

为了讨论问题的方便，对数学问题按照一些标准进行分类，给出具体的名称. 例如，R_x^0 型问题常称为标准性题，R_x^1 型问题常称为训练性题，R_x^2 型问题常称为探索性

题，R_x^3 型问题常称为研究性题．在中学课本中，大多数是标准性题和训练性题，即课本中的练习与习题．标准性题和训练性题有时也称为封闭型题，探索性题与研究性题也称为开放型题．当然，这样称呼也是与主体 M 有关的．事实上，同一道数学题，对于不同的主体可能是不同的题类；又随着 M 的知识、技能增减，可以使问题类别“升格”或“降格”；另外，还随着解题环境的不同，也可能影响类别（因解题环境对解题者 M 存在着暗示或干扰作用）．

在四个要素中，全部与数学有关，则称为纯数学问题，若只有 Z、P 与数学有关，则称为数学应用问题．

在数学解题教学中，封闭型题与开放型题具有解题训练的互补作用，两者均不可偏废．封闭型题一般用于巩固知识，主要引起“同化”作用；而开放型题则使主体容易暴露知识的缺陷，主要引起“顺应”作用；都促进解题能力的提高．

例 2　（1）如图 1.1－1，两圆内切于点 P，过小圆上一点 C（或 D）作小圆的切线交大圆于点 A、B，则$\angle APC=\angle BPC$（或$\angle BPD$）．

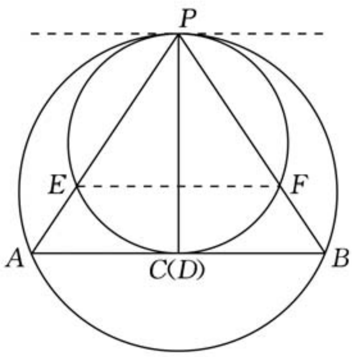

图 1.1－1

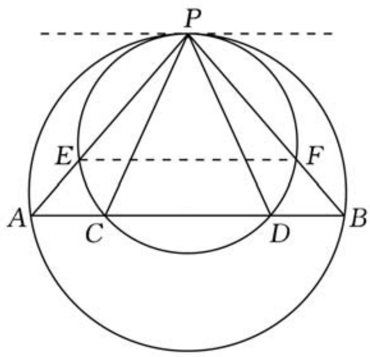

图 1.1－2

（2）如图 1.1－2，两圆内切于点 P，一条直线依次交大圆于 A、B，交小圆于 C、D（即图 1.1－1 中的切线变为割线，图中$\angle APC=\angle BPD$），问是否仍有$\angle APC=\angle BPD$ 成立？为什么？

（3）如果图 1.1－1，图 1.1－2 中的两圆相交于 P、Q 两点，一直线与其中一圆相切且与另一圆相交，还有这样的结论吗？又若一直线与这两圆均相交，仍有这样的结论吗？

◆分析：问题（1）给出了条件和结论，解题的依据与方法虽未给出，但较明显．只需过点 P 作公切线，利用弦切角与圆周角的关系，得到 $EF\parallel AB$，进而由两平行线所夹圆弧相等而证得$\angle APC=\angle BPC$（或 BPD）．因而问题（1）是一个封闭型题．

问题（2）是问题（1）的推广．给了条件及结论的方向，在证明方法上是类似的．因此仍是一个封闭型题．

问题（3）是问题（1）与（2）的推广．给了条件，但结论需经探求，而且解题依据与方法也变得较为复杂而不能明显想到．因此这是一个开放型题．下面分三种情形解答（还有两种情形留给读者）．

◆解答：（1）如图 1.1－3，两圆相交于 P、Q 两点，过小圆上一点 C（或 D）作小

圆的切线与大圆相交于 A、B，则$\angle APC=\angle BQD$，$\angle AQC=\angle BPD$，或$\angle APD=\angle BQC$，$\angle AQD=\angle BPC$.

证明：如图 1.1－3，由$\angle ACP=\angle PQC=\angle PQD'=\angle PC'D'$，知 $AB\parallel D'C'$，有$\overset{\frown}{AD'}=\overset{\frown}{C'B}$，亦即$\overset{\frown}{AC'}=\overset{\frown}{D'B}$，故$\angle APC=\angle BQD$.

由$\angle EFP=\angle EQP=\angle AQP=\angle ABP$，知 $EF\parallel AB$，有$\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{DF}$，故$\angle AQC=\angle BPD$.

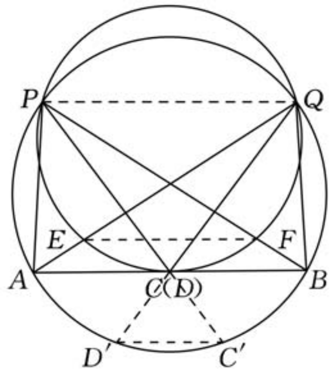

图 1.1－3

（2）如图 1.1－4，两圆相交于 P、Q 两点，一条直线依次交一个圆于 A、B，交另一个圆于 C、D，则$\angle APC=\angle BQD$，$\angle AQC=\angle BPD$，$\angle APD=\angle BQC$，$\angle AQD=\angle BPC$.

证明：如图 1.1－4，由$\angle PCD=180^\circ-\angle PQD=\angle PC'D'$，知 $AB\parallel C'D'$，有$\overset{\frown}{AC'}=\overset{\frown}{D'B}$，故$\angle APC=\angle BQD$.

由$\angle EFP=\angle EQP=\angle AQP=\angle ABP$，知 $EF\parallel AB$，有$\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{DF}$，故$\angle AQC=\angle BPD$.

进而有$\angle APD=\angle BQC$，$\angle AQD=\angle BPC$.

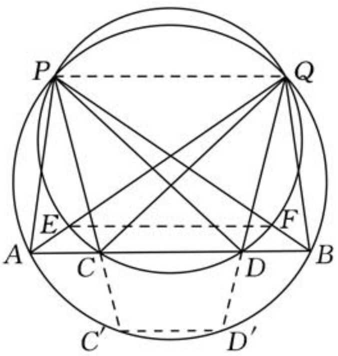

图 1.1－4

（3）如图 1.1－5，两圆相交于 P、Q 两点，一条与公共弦 PQ 相交的直线依次与一个圆交于A、B，交另一个圆于C、D，则$\angle APC=\angle BQD$，$\angle AQC=\angle BPD$，$\angle APD+\angle BQC=180^\circ$，$\angle AQD+\angle BPC=180^\circ$.

证明：如图 1.1－5，由$\angle APC=\angle APQ-\angle CPQ=\angle ABQ-\angle CDQ=\angle BQD$，及$\angle AQC=\angle AQP-\angle CQP=\angle ABP-\angle CDP=\angle BPD$.

由$\angle PQC=\angle PDA$ 及$\angle PQB=\angle PAD$ 有$\angle APD+\angle BQC=180^\circ$.

同理$\angle AQD+\angle BPC=180^\circ$.

还有两种情形这 4 对角均互补就留给读者了.

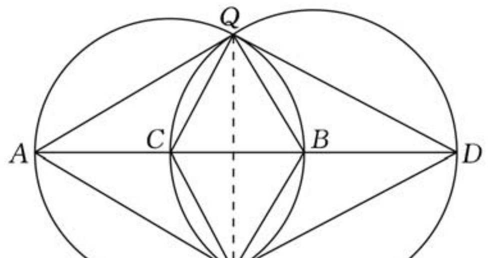

图 1.1－5

例 3　下列各题均在不同程度上具有开放性：

（1）某数的平方可表示为四个连续奇数的乘积，求所有具有这种性质的数.

（2）设 α、β 是两个任意锐角，问能否以 $\sin\alpha$、$\sin\beta$、$\sin(\alpha+\beta)$为边作三角形？

（3）$\underbrace{444\cdots4}_{n+1个}\underbrace{888\cdots8}_{n个}9$ 是否为某个自然数的完全平方？证明你的结论.

（4）找出满足 $f(x)\pm g(x)=f(x)\cdot g(x)$的初等函数 $f(x)$与 $g(x)$.

◆解答：（1）这是一个形式上的结论开放题. 因为我们不知道具有所论性质的数究竟有多少个，解题方法也是不明显的.

若设所求的数为 x，第一个奇数为 n，则有

$$x^2=n(n+2)(n+4)(n+6),\text{或 } x^2=(n^2+6n+4)^2-16,$$

通过分析平方数的尾数及差可知：在平方数中只有 0，9 才具有 a^2-16 的形式，再由 x^2 是奇数，最后可确定只有 $9=(-3)\cdot(-1)\cdot1\cdot3$ 是问题的答案.

（2）这题给出了条件，结论也只有两种可能，并且显然可用常规的三角方法，即比较 $\sin\alpha+\sin\beta$，$\sin\alpha-\sin\beta$ 与 $\sin(\alpha+\beta)$ 的大小关系来获得结论. 但是它还有另外的方法可解，因而是一个推理开放题，例如可用构造法获解：在半径为 0.5 的圆 O 内，作$\angle BOC=2\alpha$，$\angle COA=2\beta$，连 BC、CA、AB，由于 2α、2β 均小于平角，B、A 必分居于 OC 之两侧. 易知此时$\angle BAC=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle ACB=180^\circ-\alpha-\beta$，而由正弦定理恰有 $BC=\sin\alpha$，$CA=\sin\beta$，$AB=\sin(\alpha+\beta)$.

（3）这题给出了条件，结论有两种可能，需通过推理分析探明，解题方法也不明显，也是一种推理开放题. 先从简单情形开始，$4\,489=67^2$，$444\,889=667^2$，…，可猜测$\underbrace{444\cdots4}_{n+1\text{个}}\underbrace{88\cdots8}_{n\text{个}}9=\underbrace{66\cdots6}_{n\text{个}}7^2$，再由 $44\cdots488\cdots89=4\sum\limits_{k=n+1}^{2n+2}10^k+8\sum\limits_{k=1}^{n}10^k+9=1+4(1+10+10^2+\cdots+10^n)+4(1+10+\cdots+10^{2n+1})=1+4\cdot\frac{1}{9}(10^{n+1}-1)+4\cdot\frac{1}{9}(10^{2n+2}-1)=\frac{1}{9}(4\cdot10^{2n+2}+4\cdot10^{n+1}+1)=\left(\frac{2\cdot10^{n+1}+1}{3}\right)^2$，即证.

（4）这题仅给出了条件，结论所涉及的范围也相当广，先要想象或猜测出这种函数的存在，再进一步探求其他可能性. 因此，此题开放程度较高，是一种带有研究性的问题. 通过仔细地搜索和广泛地联想，我们可以得到满足要求的很多答案，并且还可进一步作出引申. 例如有

$$\cot^2x-\cos^2x=\cot^2x\cdot\cos^2x;\qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-x};$$

$$\frac{ax+b}{cx+d}+\frac{ax+b}{(a-c)x+b-d}=\frac{ax+b}{cx+d}\cdot\frac{ax+b}{(a-c)x+b-d}$$

（$a\neq0,c\neq0$，且 $a=c$，$b=d$ 不同时成立）；

$$\cos2x-\left(1-\frac{1}{2}\sec^2x\right)=\cos2x\cdot\left(1-\frac{1}{2}\sec^2x\right);$$

$$\frac{1}{kx}-\frac{1}{kx+1}=\frac{1}{kx}\cdot\frac{1}{kx+1};$$

$$\tan kA+\tan kB+\tan kC=\tan kA\cdot\tan kB\cdot\tan kC\ (k\in\mathbf{Z},A+B+C=\pi).$$

【问题资源】

1. 例 1 中的几个问题你能解答吗？
2. 例 2（3）中留下的两种情形的图及结论你能给出吗？

【参考答案】

1. 对于问题 1，由$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant0$，有 $a+b-2\sqrt{ab}\geqslant0$ 即证.

对于问题 2，由 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$两边平方，有 $a^2+b^2\geqslant2ab$，两边再加上 a^2+b^2，有

$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$，从而有$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

对于问题 3，证法 1：运用均值不等式，有

$$a^2+b^2+c^2=\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}\geqslant ab+bc+ca.$$

证法 2：配方法，原不等式等价于

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\geqslant 0.$$

而$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$.

证法 3：配方法，$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$$\begin{aligned}&=(a^2-ab-ac)+b^2+c^2-bc\\&=\left(a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\right)^2-\left(\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}+\frac{bc}{2}\right)+b^2+c^2-bc\\&=\left(a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{c}\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

证法 4：运用排序不等式，不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，则

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca.$$

证法 5：运用柯西不等式.

当 $ab+bc+ca<0$ 时，原不等式显然成立.

当 $ab+bc+ca\geqslant 0$ 时，有

$$(a^2+b^2+c^2)^2=(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2)\geqslant(ab+bc+ca)^2,$$

故 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

证法 6：运用判别式. 原不等式等价于

$$a^2-(b+c)a+(b^2+c^2-bc)\geqslant 0$$

其判别式 $\Delta=(b+c)^2-4(b^2+c^2-bc)=-3(b-c)^2\leqslant 0$.

故 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

对于问题 4，当$\frac{a}{b}\geqslant\sqrt{2}$时，有$\frac{a+2b}{a+b}=1+\frac{b}{a+b}=1+\frac{1}{\frac{a}{b}+1}\leqslant 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}$，从而$\frac{a+2b}{a+b}\leqslant\sqrt{2}\leqslant\frac{a}{b}$.

当$\frac{a}{b}<\sqrt{2}$时，有$\frac{a+2b}{a+b}=1+\frac{1}{\frac{a}{b}+1}>1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}$，从而$\frac{a}{b}<\sqrt{2}<\frac{a+2b}{a+b}$.

故$\sqrt{2}$总是在$\frac{a}{b}$与$\frac{a+2b}{a+b}$之间.

2. 情形 1：如图 1.1－6，有

$\angle APD+\angle BQC=180^\circ$，

$\angle AQD+\angle BPC=180^\circ$，

$\angle APC+\angle BQD=180^\circ$，

$\angle AQC+\angle BPD=180^\circ$.

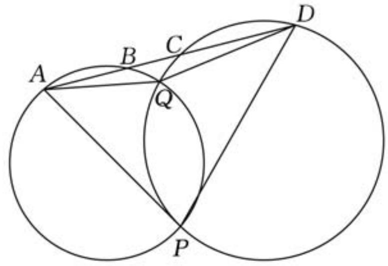

图 1.1－6