高等数学（上册）导学教程

主编／赵恩良

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学（上册）导学教程

赵恩良　主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)导学教程 / 赵恩良主编. —北京:北京理工大学出版社,2019.8
ISBN 978-7-5682-7457-9

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①赵…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 177515 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京地大天成印务有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 8.25
字　　数 / 195 千字
版　　次 / 2019 年 8 月第 1 版　　2019 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 / 25.00 元

责任编辑 / 多海鹏
文案编辑 / 孟祥雪
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 李志强

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

前　言

《高等数学导学教程（上册)》是配套同济大学数学系主编的《高等数学（第七版)》编写的，对应于每一章节的内容. 首先对知识点进行了概括性总结，并配有同步习题. 本书主要面向理工科院校的学生，可作为配套练习使用，也可供使用该教材的教师作为教学参考.

编写《高等数学导学教程（上册)》，主要是为了满足广大工科、经济类、管理类等非数学专业的学生学习高等数学的需要. 期望本书能对提高高等数学的教学质量有所助益，帮助教师掌握高等数学的教学基本要求.

本书按照教材的内容概括了知识点并安排了相应的练习题，题型包括填空题、选择题、计算题和证明题. 本书以基础性习题为主，侧重基本概念、基本知识和基本技能的训练，突出教材重点、难点；同时，适当考虑了提高能力题，并针对较难题目给出了详解的二维码，学生可以通过扫码查看解题的详细过程，这对提高学生综合运用知识点解题的能力也有所帮助.

本书第一章由畅春玲编写；第二章由赵恩良编写；第三章由顾艳丽编写；第四章由韩孺眉编写；第五章由付春菊编写；第六章由王金宝编写；第七章由朱宝艳编写. 全书习题部分由朱宝艳统筹规划，内容部分由赵恩良统稿，全书由靖新主审.

由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

目　录

高等数学(上册)导学教程

班级:　　　　　　学号:　　　　　　姓名:　　　　　　任课教师:

授课章节	第一章　函数与极限　1.1　数列的极限
目的要求	了解极限的概念;掌握极限的性质
重点难点	极限的概念

主要内容:

一、数列极限的定义

极限是高等数学中最基本的概念之一,用以描述变量在一定的变化过程中的终极状态.

定义 1.1.1　设$\{x_n\}$为一数列,如果存在常数 a,对于任意给定的正整数 ε(不论它多么小),总存在整数 N,使得当 $n>N$ 时,不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立,那么就称常数 a 是数列$\{x_n\}$的极限,或者称数列$\{x_n\}$收敛于 a,记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a(n\to\infty)$.

如果不存在这样的常数,就称$\{x_n\}$没有极限或发散,习惯上也说$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在.

二、收敛数列的性质

下面四个定理都是有关收敛数列的性质.

定理 1.1.1　(极限的唯一性)如果数列$\{x_n\}$收敛,那么它的极限唯一.

定理 1.1.2　(收敛数列的有界性)如果数列$\{x_n\}$收敛,那么数列$\{x_n\}$一定有界.

定理 1.1.3　(收敛数列的保号性)如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 且 $a>0$(或 $a<0$),那么存在正整数 $N>0$,当 $n>N$ 时,都有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).

定理 1.1.4　(收敛数列与其子数列间的关系)如果数列$\{x_n\}$收敛于 a,那么它的任一子数列也收敛,且极限也是 a.

本次课作业:

1. 选择题:

“数列极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在”是“数列$\{x_n\}$有界”的(　　).

A. 充要条件

B. 充分但非必要条件

C. 必要但非充分条件

D. 既非充分也非必要条件

学习体会:

2. 填空题： 下列各题中,哪些数列收敛,哪些数列发散？对收敛数列,通过观察 $\{x_n\}$ 的变化趋势,写出它们的极限. (1) $x_n=\frac{1}{2^n}$ ____________； (2) $x_n=2+\frac{1}{n^2}$ ____________； (3) $x_n=\frac{n-1}{n+1}$ ____________； (4) $x_n=2\cdot(-1)^n$ ____________； (5) $x_n=\frac{2^n-1}{3^n}$ ____________； (6) $x_n=n-\frac{1}{n}$ ____________.	**学习体会：**

授课章节	第一章　函数与极限　1.2 函数的极限;1.3 无穷大与无穷小
目的要求	理解函数极限的定义;掌握函数极限的性质;掌握无穷小和无穷大的概念及无穷小的性质
重点难点	求函数极限的方法;无穷大的定义

学习体会:

主要内容:

一、函数极限的定义

因为数列$\{x_n\}$可看作自变量为n的函数:$x_n = f(n), n \in \mathbf{N}^+$,所以数列$\{x_n\}$的极限为$a$,就是当自变量$n$取正整数而无限增大(即$n\to\infty$)时,对应的函数值$f(n)$无限接近于确定的数$a$.把数列极限概念中的函数为$f(n)$而自变量的变化过程为$n\to\infty$等特殊性撇开,这样可以引出函数极限的一般概念:在自变量的某个变化过程中,如果对应的函数值无限接近于某个确定的数,那么这个确定的数就叫作在这一变化过程中函数的极限.由于极限与自变量的变化过程密切相关,因此我们对于函数极限分以下情况讨论.

1. 自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 1.2.1　设函数$f(x)$在$|x|$大于某正数时有定义,如果存在常数A,对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在着正数X,使得当x满足不等式$|x| > X$时,对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数A就叫作函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty)$$

此定义可简单地表达为:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, X > 0,$ 当$|x| > X$时,有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

从几何上来说,作直线$y = A - \varepsilon$和$y = A + \varepsilon$,则总有一个正数X存在,使得当$x < -X$或$x > X$时,函数$y = f(x)$的图形位于这两条直线之间,这时,直线$y = A$是函数$y = f(x)$图形的水平渐近线.

2. 自变量趋于有限值时函数的极限

定义 1.2.2　设函数$f(x)$在点x_0的某去心邻域内有定义,如果存在常数A,对于任意给定的正数ε(无论它多么小),总存在正数δ,使得当x满足不等式$0 < |x - x_0| < \delta$时,对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

从几何上来说,任意给定一正数 ε,作平行于 x 轴的两条直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$,介于这两条直线之间是一横条区域. 即对于给定的 ε,存在着点 x_0 的 δ 邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

在此定义中,把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x-\delta<x<x_0$,那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A$$

类似地,把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x<x_0<x+\delta$,那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A$$

左极限与右极限统称为单侧极限.

根据定义容易证明:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=A$$

二、函数极限的性质

下面三个定理都是有关收敛数列的性质:

定理 1.2.1　(函数极限的唯一性)如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,那么这个极限唯一.

定理 1.2.2　(函数极限的局部有界性)如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)|\leqslant M$.

定理 1.2.3　(函数极限的局部保号性)如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且 $A>0$ (或 $A<0$),那么存在常数 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

三、无穷小

定义 1.3.1　如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 时的极限为零,那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 时的无穷小. 通常用 α,β 等表示无穷小.

定理 1.3.1　在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 中,函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$,其中 α 是无穷小.

学习体会:

学习体会:

四、无穷大

定义 1.3.2 设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义(或$|x|$大于某一正数时有定义),如果对于任意给定的正数M(不论它多么大),总存在正数δ(或正数X),只要x适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$),对应的函数值$f(x)$总满足不等式$|f(x)|>M$,则称函数$f(x)$为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷大.

定理 1.3.2 在自变量的同一变化过程中,若$f(x)$为无穷大,且$f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小;若$f(x)$为无穷小,且$f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

本次课作业:

1. 设$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x-1}, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x, & 0<x<1, \\ 1, & 1\leqslant x<2, \end{cases}$ 求$f(0^-)$,$f(0^+)$,$f(1^-)$,$f(1^+)$,讨论$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$是否存在.

2. 如图 1-1 所示的函数,下列陈述中哪些是对的,哪些是错的?

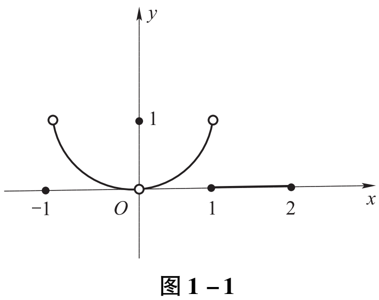

图 1-1

(1) $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=1.$ (　　)

(2) $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)$不存.(　　)

(3) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$ (　　)

(4) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1.$ (　　)

(5) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1.$ (　　)

(6) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0.$ (　　)

(7) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0.$ (　　)

(8) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0.$ (　　)

3. 下列变量中,变量__________是无穷小,__________是无穷大,__________既不是无穷小,也不是无穷大.

A. $x\to 0, \dfrac{1+2x}{x^2}$　　B. $x\to 0^+, \ln x$

C. $x\to 0, x^3+\sin x$　　D. $x\to \pi, x^3+\sin x$

E. $x\to 0, e^{-x}-1$　　F. $x\to +\infty, e^{-x}-1$

4. 设 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$,求此函数在 $x=0$ 处的左右极限,并讨论当 $x\to 0$ 时的极限.

学习体会:

班级: 学号: 姓名: 任课教师:

授课章节	第一章 函数与极限 1.4 极限运算法则
目的要求	掌握极限运算法则;会求极限
重点难点	利用极限运算法则求极限;掌握复合函数极限运算法则

主要内容:

一、极限运算法则

本节重点讨论函数极限的运算法则,同时会用到上节学过的无穷小的性质.

定理 1.4.1 两个无穷小的和是无穷小.

定理 1.4.2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 1.4.1 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 1.4.2 有限个无穷小的乘积是无穷小.

定理 1.4.3 如果$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,那么

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

(3) 若又有 $B\neq0$,则$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

推论 1.4.3 如果$\lim f(x)$存在,而 c 为常数,则

$$\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$$

推论 1.4.4 如果$\lim f(x)$存在,而 n 是正整数,则

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$$

定理 1.4.4 设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$,如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,那么

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n\pm y_n]=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=A\cdot B$;

(3) 当 $y_n\neq0(n=1,2,\cdots)$且 $B\neq0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$.

定理 1.4.5 如果 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$,而 $\lim\varphi(x)=a,\lim\psi(x)=b$,那么 $a\geqslant b$.

定理 1.4.6 设函数 $y=f[g(x)]$是由函数 $u=g(x)$与函数 $y=f(u)$复合而成的,$f[g(x)]$在点 x_0 的某去心邻域内有定义,若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$,$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,且存在 $\delta_0>0$,当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$时,有 $g(x)\neq u_0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

学习体会:

班级:　　　　　　　　学号:　　　　　　　　姓名:　　　　　　　　任课教师:

注:有理函数求极限的方法如图 1－2 所示.

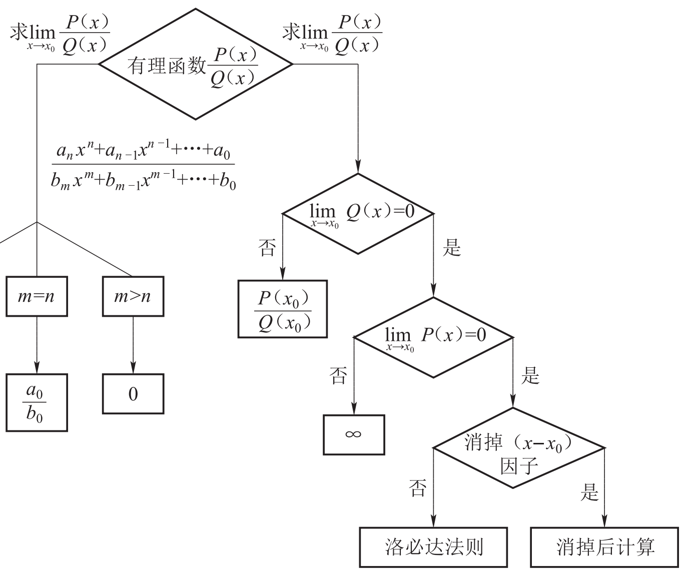

图 1－2

本次课作业:

1．填空题:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=$ ________________ ;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(4x+1)^{30}(9x+2)^{20}}{(6x-1)^{50}}=$ ________________ .

2．计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)+\left(1+\frac{4}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{2n}{n}\right)\right]$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right]$.

学习体会:

3．计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；

（2）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^4-4x^2+3}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-3x+6}{x^8-7x-1}$；

（4）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+2x-3}$；

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-1}{4^x+1}$；

（6）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$.

学习体会：

班级:　　　　　　学号:　　　　　　姓名:　　　　　　任课教师:

授课章节	第一章　函数与极限　1.5　极限存在准则　两个重要极限
目的要求	掌握极限存在准则;熟练应用两个重要极限求极限
重点难点	利用重要极限求极限;利用极限存在准则求极限

主要内容:

本节主要讨论判定极限存在的两个准则以及作为应用准则的例子——两个重要极限.

一、准则 I

准则 I　如果数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件:

(1) 从某项起,即$\exists n_0 \in N$,当$n > n_0$时,有$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$,$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

那么数列$\{x_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

准则 I　如果

(1) 当$x \in \mathring{U}(x_0, r)$(或$|x| > M$)时,$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = A$,　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} h(x) = A$.

那么$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)$存在,且等于$A$.

二、准则Ⅱ

准则Ⅱ　单调有界数列必有极限.

注意:(1) 收敛的数列必有界,有界的数列却未必收敛;

(2) 既单调又有界的数列存在极限意味着单增有上届收敛或单减有下界收敛;

(3) 不用证明;

(4) 利用此定理证明,既要研究单调性又要研究有界性.

本次课作业:

1.计算下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sin 8x}$;　　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{x}$;

学习体会:

（3）$\lim\limits_{x\to\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{2^n}$（$x$ 为不等于零的常数）；（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

学习体会：

2. 计算下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$.