



浙江省高等教育重点建设教材

A

高等数学

ADVANCED MATHEMATICS

(专升本)

李永琪 主 编
许红娅 张素红 副主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社



浙江省高等教育重点建设教材

高等数学

(专升本)

主 编 李永琪
副主编 许红娅 张素红



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:专升本 / 李永琪主编. ——杭州:浙江
大学出版社, 2019. 1
ISBN 978-7-308-18811-1

I. ①高… II. ①李… III. ①高等数学—成人高等教育—
升学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 291583 号

高等数学(专升本)

李永琪 主编

许红娅 张素红 副主编

责任编辑 周卫群

责任校对 邹小宁

封面设计 周 灵

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州中大图文设计有限公司

印 刷 杭州高腾印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 16

字 数 305 千

版 印 次 2019 年 1 月第 1 版 2019 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-18811-1

定 价 35.00 元



版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社市场运营中心联系方式: 0571-88925591; <http://zjdxcb.s.tmall.com>

前 言

《高等数学》(专升本)教材于2007年首次出版。本教材编写中充分考虑了专升本学生的特点,既注重与一元微积分的衔接,又贯彻“以应用为目的,以必需够用为度”的原则,把重点放在掌握概念,强化应用,培养能力,提高素质上;在课程定位上,不仅把高等数学作为重要的基础课和工具课,而且将其视为素质课,以启发培养学生的思维能力,促进学生学习能力的提高,实现传授知识和提升能力双目的。因此,深受师生的喜爱与好评。

结合教材几年的使用情况和专升本学生的现状与需求,我们对原教材的内容作了较大的调整,编写时力求内容精练,表述确切,思路清晰,便于教学;注意定义、定理的实际背景、应用范围和分析问题的方法,以及数学运算能力的培养;注重充实几何、经济等领域的实际问题,通过实例既阐明数学概念,又使课程与其他学科相联系,增强应用数学的意识,为后继课程的学习打好基础。书中带*号标记的章节为不同专业选学内容。

学习高等数学,做习题是一个极为重要的环节,一本好的教材需要一套数量适中、难易适当的习题相配。我们根据多年的教学积累,对习题做了精选。为了便于教师组织教学和学生自学,在每节后都配有习题;为了便于学生检查自己的学习情况,全面复习和巩固每一章的所学内容,在每一章后都附有自测题,其习题答案附于书后。

目 录

第 1 章 一元函数微积分回目	001
1.1 导数运算及其应用	001
1.1.1 导数概念	001
1.1.2 导数运算	002
1.1.3 微分	006
1.1.4 导数的应用	007
习题 1.1	009
1.2 积分运算及其应用	010
1.2.1 不定积分	010
1.2.2 定积分	015
习题 1.2	020
1.3 一元微积分在经济分析中应用	021
1.3.1 边际分析	021
1.3.2 最值在经济分析中应用	021
1.3.3 函数的弹性	025
习题 1.3	026
综合测试题一	027
第 2 章 微分方程	029
2.1 微分方程的基本概念	029
2.1.1 引例	029
2.1.2 微分方程的基本概念	030
2.2 可分离变量的微分方程	032
2.2.1 可分离变量的微分方程	032
* 2.2.2 齐次微分方程	034

习题 2.2	038
2.3 一阶线性微分方程	038
2.3.1 一阶线性微分方程	038
* 2.3.2 用适当的变量替换转换方程的类型	041
习题 2.3	043
2.4 可降价的高阶微分方程	044
2.4.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型微分方程	044
2.4.2 $y'' = f(x, y')$ 型微分方程	044
2.4.3 $y'' = f(y, y')$ 型微分方程	046
习题 2.4	047
2.5 二阶线性微分方程解的结构	048
2.5.1 二阶齐次线性微分方程	048
2.5.2 二阶非齐次线性微分方程	049
2.6 二阶常系数齐次线性微分方程	050
习题 2.6	053
2.7 二阶常系数非齐次线性微分方程	053
2.7.1 $f(x) = P_m(x) e^{\lambda x}$ 型	054
2.7.2 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x]$ 型	057
习题 2.7	059
综合测试题二	059
第 3 章 向量代数与空间解析几何	061
3.1 空间直角坐标系	061
3.1.1 空间直角坐标系	061
3.1.2 空间两点间的距离公式	063
习题 3.1	064
3.2 向量及其线性运算	064
3.2.1 向量的概念	064
3.2.2 向量的线性运算	065
3.2.3 向量的坐标表示	067
习题 3.2	069
3.3 向量的数量积与向量积	070
3.3.1 向量的数量积	070

4.4 多元复合函数的偏导数	116
习题 4.4	121
4.5 隐函数的偏导数	122
4.5.1 一个方程的情形	122
* 4.5.2 方程组的情形	125
习题 4.5	126
4.6 偏导数在几何上的应用	126
4.6.1 空间曲线的切线与法平面	126
4.6.2 曲面的切平面与法线	128
习题 4.6	130
4.7 多元函数的极值	131
4.7.1 多元函数的极值	131
4.7.2 多元函数的条件极值及最值应用问题	133
习题 4.7	137
综合测试题四	137
第 5 章 多元函数积分学	139
5.1 点函数积分的概念	139
5.1.1 曲顶柱体的体积	139
5.1.2 点函数积分的定义	140
5.1.3 点函数积分的性质	141
5.2 二重积分	142
5.2.1 二重积分的概念	142
5.2.2 二重积分在直角坐标系下的算法	143
5.2.3 二重积分在极坐标系下的算法	148
习题 5.2	152
5.3 二重积分的应用	154
5.3.1 空间立体的体积	154
5.3.2 求曲面的面积	155
5.3.3 求平面薄片的质量	157
习题 5.3	158
5.4 三重积分	158
5.4.1 三重积分的概念	158

5.4.2	三重积分在直角坐标系下的算法	159
5.4.3	三重积分在柱面坐标系下的算法	161
* 5.4.4	三重积分在球面坐标系下的算法	163
	习题 5.4	165
5.5	曲线积分	166
5.5.1	对弧长的曲线积分	166
5.5.2	对坐标的曲线积分	168
5.5.3	格林公式	172
5.5.4	平面上曲线积分与路径无关的条件	176
	习题 5.5	180
* 5.6	曲面积分	181
5.6.1	对面积的曲面积分	181
5.6.2	对坐标的曲面积分	182
5.6.3	高斯公式	185
	习题 5.6	187
	综合测试题五	188
第 6 章	无穷级数	190
6.1	常数项级数的概念及其性质	190
6.1.1	常数项级数的概念	190
6.1.2	级数的基本性质	192
	习题 6.1	194
6.2	正项级数	194
6.2.1	比较判定法	195
6.2.2	比值判定法	198
* 6.2.3	根值判定法	199
	习题 6.2	200
6.3	任意项级数	200
6.3.1	交错级数	201
6.3.2	绝对收敛与条件收敛	202
	习题 6.3	204
6.4	幂级数	204
6.4.1	函数项级数及其收敛域	204

6.4.2	幂级数的收敛半径与收敛区间	205
6.4.3	幂级数的运算性质	209
	习题 6.4	212
6.5	函数的幂级数展开	212
6.5.1	泰勒级数	212
6.5.2	函数的幂级数展开	215
	习题 6.5	219
* 6.6	傅里叶级数	219
6.6.1	三角函数系的正交性	220
6.6.2	傅里叶级数	220
6.6.3	奇、偶函数的傅里叶级数	224
6.6.4	正弦级数与余弦级数	224
6.6.5	周期为 $2l$ 函数的傅里叶级数	226
	习题 6.6	227
	综合侧试题六	227
	参考答案	230

第 1 章

一元函数微积分回目

考虑到专升本学生的特点,在本科阶段我们以学习多元函数微积分为主,为了使学习内容上有一个良好的衔接,我们首先回目一元函数微积分的内容.

本章首先复习导数与积分的基本概念及基本运算;其次又特别为经管类学生复习一元微积分在经济方面的某些应用.

1.1 导数运算及其应用

掌握求导运算是学习微积分的基础,要熟记导数基本公式表,以及求导法则,并通过练习熟练掌握求导运算.

本节首先回顾导数的定义、几何意义;其次主要是通过例题复习导数运算;最后说说导数的某些应用.边看边做例题吧.

1.1.1 导数概念

1. 导数定义

导数是表示函数 $f(x)$ 随自变量 x 变化而变化的快慢程度,所以也称为变化率.

设 $y = f(x)$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点的导数为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果函数 $y = f(x)$ 在某区间上每一点都可导,则得到函数在该区间的导函数,记号如下:

$$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx},$$

在 x_0 点的导数记号为 $y'|_{x=x_0}, f'(x_0), \frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ 等.

2. 导数几何意义

$f'(x_0)$: 表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率(如图 1-1).

切线方程: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$;

法线方程: $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$,

$$f'(x_0) = \tan \alpha.$$

3. 可导与连续的关系

可导 \Rightarrow 连续; 连续 \nRightarrow 可导.

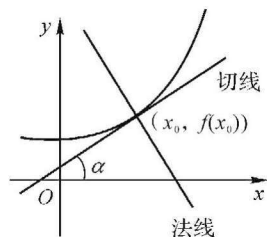


图 1-1

1.1.2 导数运算

1. 常数与基本初等函数的导数公式

$$(C)' = 0$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2. 求导法则

◆ 函数的和、差、积、商求导公式:

设函数 $u = u(x), v = v(x)$ 可导, 则成立

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(Cu)' = Cu';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

◆ 反函数求导公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

即,反函数导数等于直接函数导数的倒数.

◆ 复合函数求导公式

设 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 均可导,则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在 x 点也可导,且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

3. 求导举例

利用导数基本公式表及求导法则,可以解决初等函数的求导问题,下面看例题.

【例 1】 设 $y = x - x^3 + \frac{2}{\sqrt{x}} = -e$, 求 y' .

解 利用导数基本公式表,及求导的四则运算,可得

$$\begin{aligned} y' &= (x)' - (x^3)' + 2(x^{-\frac{1}{2}})' - (e)' \\ &= 1 - 3x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} - 0 \\ &= 1 - 3x^2 - x^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

【例 2】 设 $y = \frac{\ln u}{u}$, 求 $\frac{dy}{du}, \frac{dy}{du} \Big|_{u=e}$.

解 利用导数基本公式表及函数商的求导法则,可得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{(\ln u)'u - (\ln u)(u)'}{u^2} = \frac{\frac{1}{u} \cdot u - \ln u}{u^2} = \frac{1 - \ln u}{u^2}, \\ \frac{dy}{du} \Big|_{u=e} &= \frac{1 - \ln u}{u^2} \Big|_{u=e} = \frac{1 - \ln e}{e^2} = 0. \end{aligned}$$

下面看几个复合函数求导的例子.

【例 3】 设 $y = \ln \cos(3x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 这就是复合函数求导,关键是要弄清该函数是由哪些基本初等函数复合而成,然后从外往里,层层求导,再作乘积,直到对自变量求导为止.

引入中间变量, $y = \ln u$, $u = \cos v$, $v = 3x$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = (\ln u)' (\cos v)' (3x)' \\ &= \frac{1}{u} \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 = \frac{1}{\cos(3x)} \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3 = -3 \tan(3x). \end{aligned}$$

引入中间变量较麻烦,所以我们一般不引入中间变量,而是直接求导.从复

合函数求导公式可见,复合求导的分解步骤为:观察复合函数,哪部分看成整体就是基本初等函数,然后先用导数基本公式表中相应的公式求导;再乘上看成整体的函数对 x 的导数,依次进行下去.

仍用此例说明,看看下面的分解运算过程:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos(3x)} (\cos(3x))' && \text{cos}(3x)\text{看成整体, } (\ln u)' = \frac{1}{u} \\ &= \frac{1}{\cos(3x)} (-\sin(3x)) (3x)' && 3x\text{看成整体, } (\cos v)' = -\sin v \\ &= \frac{1}{\cos(3x)} (-\sin(3x)) \cdot 3 = -3 \tan(3x). \end{aligned}$$

【例 4】 设 $y = 2^{\sin^2 x}$, 求 y' .

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= 2^{\sin^2 x} \cdot \ln 2 \cdot (\sin^2 x)' && (2^u)' = 2^u \ln 2 \\ &= 2^{\sin^2 x} \cdot \ln 2 \cdot 2 \sin x \cdot (\sin x)' && (u^2)' = 2u \\ &= 2^{\sin^2 x} \cdot \ln 2 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x && (\sin x)' = \cos x \\ &= 2^{\sin^2 x} \cdot \ln 2 \cdot \sin(2x). \end{aligned}$$

注意:当熟练后,可以一气呵成,不必用上述分解步骤.

【例 5】 设 $y = e^{-2x} \cos(3x^2)$, 求 y' .

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= (e^{-2x})' \cos(3x^2) + e^{-2x} (\cos(3x^2))' \\ &= e^{-2x} (-2) \cos(3x^2) + e^{-2x} (-\sin(3x^2)) (6x) \\ &= -2e^{-2x} \cos(3x^2) - 6x \cdot e^{-2x} \sin(3x^2). \end{aligned}$$

【例 6】 设 $y = x^{\sin x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 这是幂指函数,可以先转换成指数函数,再求导.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (e^{\ln x^{\sin x}})' = (e^{\sin x \cdot \ln x})' = e^{\sin x \cdot \ln x} (\sin x \cdot \ln x)' \\ &= e^{\sin x \cdot \ln x} ((\sin x)' \ln x + \sin x \cdot (\ln x)') \\ &= x^{\sin x} (\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}). \end{aligned}$$

【例 7】 设 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 求 y', y'' .

$$\text{解 } y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} (x + \sqrt{1+x^2})'$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \right) \\
 &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} \\
 &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \\
 y'' &= (y')' = ((1+x^2)^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.
 \end{aligned}$$

【例 8】 设 $y = f(e^{2x})$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 这是抽象函数与具体函数复合而成的复合函数, 利用复合函数求导法则, 设 $y = f(u)$, $u = e^{2x}$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)(e^{2x})' = f'(e^{2x}) \cdot e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x} \cdot f'(e^{2x}).$$

下面举几个隐函数与参数函数求导的题目.

【例 9】 设由方程 $x^2 - y^2 = 1$ 确定 y 是 x 的函数 $y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 这是隐函数求导的问题, 解法如下:

等式两边对 x 求导, 并注意到 y 是 x 的函数 $y(x)$, 所以当出现 y 时, 要将其看成是一种复合函数的求导问题,

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(1),$$

看成复合
函数求导

即
$$2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0.$$

解出 $\frac{dy}{dx}$, 就是此隐函数的导数

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

【例 10】 设由方程 $e^y + xy = e$ 确定 y 是 x 的函数 $y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$, 及此曲线在对应于 $x = 0$ 点处的切线方程与法线方程.

解 这也是隐函数求导, 等式两边对 x 求导:

$$\frac{d(e^y)}{dx} + \frac{d(xy)}{dx} = \frac{d(e)}{dx},$$

即
$$e^y \cdot \frac{dy}{dx} + y + x \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

解出
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x + e^y}.$$

令 $x = 0$, 代入原方程, 得 $e^y + 0 = e$, 解得 $y = 1$.

从而
$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \left. \left(-\frac{y}{x + e^y} \right) \right|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -\frac{1}{e}.$$

最后再求切线方程, 由上面运算可知, 切点为 $(0, 1)$, 切线斜率为 $y' \Big|_{x=0} = -\frac{1}{e}$,

故切线方程为
$$y - 1 = -\frac{1}{e}(x - 0),$$

即
$$y = -\frac{1}{e}x + 1,$$

法线方程为
$$y - 1 = e(x - 0),$$

即
$$y = ex + 1.$$

【例 11】 设 $\begin{cases} x = 3e^{-t} \\ y = 2e^t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 这是参数方程求导, 公式为
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(2e^t)'}{(3e^{-t})'} = \frac{2e^t}{-3e^{-t}} = -\frac{2}{3}e^{2t}.$$

1.1.3 微分

微分是与导数密切相关的一个概念, 形象地说, 它考虑的是对于自变量 x 的微小改变量 Δx , 函数 y 大约改变多少.

设 $y = f(x)$, 给 x 一个增量 Δx , 得函数增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, 若

$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, 其中 $\begin{cases} A \text{ 与 } \Delta x \text{ 无关} \\ o(\Delta x) \text{ 是 } \Delta x \text{ 的高阶无穷小} \end{cases}$, 则

$$\begin{cases} \text{称 } f(x) \text{ 在 } x \text{ 点可微分} \\ A = f'(x) \\ \text{微分 } dy = f'(x) \Delta x \end{cases}.$$

习惯将微分记成 $dy = y' dx$.

如例 1: 求微分: 设 $y = e^{\sin x}$, 则微分

$$dy = d(e^{\sin x}) = (e^{\sin x})' dx = e^{\sin x} \cos x dx;$$

求微分: $d(x^2 \ln x) = (x^2 \ln x)' dx = (2x \ln x + x) dx$.

或利用微分法则 $d(uv) = v du + u dv$,

$$\begin{aligned} d(x^2 \ln x) &= \ln x d(x^2) + x^2 d(\ln x) \\ &= \ln x \cdot 2x dx + x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = (2x \ln x + x) dx. \end{aligned}$$

如例 2: 凑微分: $x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3)$, 或 $x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3 + 1) = \frac{1}{3} d(x^3 + C)$.

$$\frac{1}{x} dx = d(\ln x) = d(\ln x + C),$$

$$e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} d(e^{3x}) = \frac{1}{3} d(e^{3x} + C).$$

注意: 可导 \Leftrightarrow 可微.

1.1.4 导数的应用

可以用导数来讨论函数的性态, 具体如下:

$$\text{函数一般性态} \begin{cases} \text{区间性态} \begin{cases} \text{单调区间} \\ \text{凹凸区间} \end{cases} \\ \text{点性态} \begin{cases} \text{极值点} \\ \text{拐点} \end{cases} \end{cases}$$

单调区间、极值点 —— 用 y' 讨论;

凹凸区间、拐点 —— 用 y'' 讨论.

◆ 用导数判定函数单调性

当 $x \in (a, b)$ 时, $\begin{cases} y' > 0 \\ y' < 0 \end{cases} \Rightarrow y = f(x)$ 在 (a, b) 上 $\begin{cases} \text{单调增加} \\ \text{单调减少} \end{cases}$.

注意: 单调区间分界点 x_0 的特征是: $f'(x_0) = 0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在.

◆ 用导数求极值

取到极值必要条件: 设 $f(x_0)$ 是极值 $\Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \text{ (可导时)} \\ f'(x_0) \text{ 不存在} \end{cases}$.