浙江省高等教育重点建设教材

高等数学

ADVANCED MATHMATICS

（专升本）

李永琪　主　编
许红娅　张素红　副主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

浙江省高等教育重点建设教材

高 等 数 学

(专升本)

主　编　李永琪
副主编　许红娅　张素红

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:专升本 / 李永琪主编. ——杭州: 浙江大学出版社, 2019.1
ISBN 978-7-308-18811-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学—成人高等教育—升学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 291583 号

高等数学(专升本)
李永琪 主编
许红娅 张素红 副主编

责任编辑 周卫群
责任校对 邹小宁
封面设计 周 灵
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排 版 杭州中大图文设计有限公司
印 刷 杭州高腾印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 16
字 数 305 千
版 印 次 2019 年 1 月第 1 版 2019 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-18811-1
定 价 35.00 元

前　　言

《高等数学》(专升本)教材于2007年首次出版。本教材编写中充分考虑了专升本学生的特点,既注重与一元微积分的衔接,又贯御"以应用为目的,以必需够用为度"的原则,把重点放在掌握概念,强化应用,培养能力,提高素质上;在课程定位上,不仅把高等数学作为重要的基础课和工具课,而且将其视为素质课,以启发培养学生的思维能力,促进学生学习能力的提高,实现传授知识和提升能力双目的。因此,深受师生的喜爱与好评。

结合教材几年的使用情况和专升本学生的现状与需求,我们对原教材的内容作了较大的调整,编写时力求内容精练,表述确切,思路清晰,便于教学;注意定义、定理的实际背景、应用范围和分析问题的方法,以及数学运算能力的培养;注重充实几何、经济等领域的实际问题,通过实例既阐明数学概念,又使课程与其他学科相联系,增强应用数学的意识,为后继课程的学习打好基础。书中带*号标记的章节为不同专业选学内容。

学习高等数学,做习题是一个极为重要的环节,一本好的教材需要一套数量适中、难易适当的习题相配。我们根据多年的教学积累,对习题做了精选。为了便于教师组织教学和学生自学,在每节后都配有习题;为了便于学生检查自己的学习情况,全面复习和巩固每一章的所学内容,在每一章后都附有自测题,其习题答案附于书后。

目　录

第 1 章

一元函数微积分回目

考虑到专升本学生的特点，在本科阶段我们以学习多元函数微积分为主，为了使学习内容上有一个良好的衔接，我们首先回目一元函数微积分的内容.

本章首先复习导数与积分的基本概念及基本运算；其次又特别为经管类学生复习一元微积分在经济方面的某些应用.

1.1 导数运算及其应用

掌握求导运算是学习微积分的基础，要熟记导数基本公式表，以及求导法则，并通过练习熟练掌握求导运算.

本节首先回顾导数的定义、几何意义；其次主要是通过例题复习导数运算；最后说说导数的某些应用. 边看边做例题吧.

1.1.1 导数概念

1. 导数定义

导数是表示函数 $f(x)$ 随自变量 x 变化而变化的快慢程度，所以也称为变化率.

设 $y=f(x)$，则 $f(x)$ 在 x_0 点的导数为

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果函数 $y=f(x)$ 在某区间上每一点都可导，则得到函数在该区间的导函数，记号如下：

$$y', f'(x), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},$$

在 x_0 点的导数记号为 $y'\big|_{x=x_0}, f'(x_0), \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 等.

2. 导数几何意义

$f'(x_0)$：表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率(如图 1-1).

切线方程：$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$；

法线方程：$y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$，

$$f'(x_0) = \tan\alpha .$$

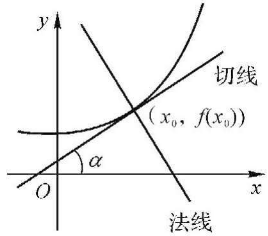

图 1-1

3. 可导与连续的关系

可导 $\Rightarrow$ 连续；连续 $\nRightarrow$ 可导.

1.1.2 导数运算

1. 常数与基本初等函数的导数公式

$(C)' = 0$　　$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$

$(a^x)' = a^x \ln a$　　$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$　　$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$　　$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$　　$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$　　$(\text{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

2. 求导法则

◆ 函数的和、差、积、商求导公式：

设函数 $u = u(x), v = v(x)$ 可导，则成立

$(u \pm v)' = u' \pm v'$；　　$(Cu)' = Cu'$；

$(uv)' = u'v + uv'$；　　$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

◆ 反函数求导公式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$$

即,反函数导数等于直接函数导数的倒数.

◆ 复合函数求导公式

设 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 均可导,则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在x点也可导,且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

3. 求导举例

利用导数基本公式表及求导法则,可以解决初等函数的求导问题,下面看例题.

【例 1】 设 $y=x-x^3+\frac{2}{\sqrt{x}}=-\mathrm{e}$,求$y'$.

解 利用导数基本公式表,及求导的四则运算,可得

$$\begin{aligned} y' &= (x)'-(x^3)'+2(x^{-\frac{1}{2}})'-(\mathrm{e})' \\ &= 1-3x^2+2\cdot(-\frac{1}{2})\cdot x^{-\frac{1}{2}-1}-0 \\ &= 1-3x^2-x^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

【例 2】 设 $y=\frac{\ln u}{u}$, 求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$,$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{u=\mathrm{e}}$.

解 利用导数基本公式表及函数商的求导法则,可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\frac{(\ln u)'u-(\ln u)(u)'}{u^2}=\frac{\frac{1}{u}\cdot u-\ln u}{u^2}=\frac{1-\ln u}{u^2},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right|_{u=\mathrm{e}}\left.\frac{1-\ln u}{u^2}\right|_{u=\mathrm{e}}=\frac{1-\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2}=0.$$

下面看几个复合函数求导的例子.

【例 3】 设 $y=\ln\cos(3x)$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 这就是复合函数求导,关键是要弄清该函数是由哪些基本初等函数复合而成,然后从外往里,层层求导,再作乘积,直到对自变量求导为止.

引入中间变量,$y=\ln u$, $u=\cos v$,$v=3x$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=(\ln u)'(\cos v)'(3x)' \\ &= \frac{1}{u}\cdot(-\sin 3x)\cdot 3=\frac{1}{\cos(3x)}\cdot(-\sin(3x))\cdot 3=-3\tan(3x). \end{aligned}$$

引入中间变量较麻烦,所以我们一般不引入中间变量,而是直接求导. 从复

合函数求导公式可见，复合求导的分解步骤为：观察复合函数，哪部分看成整体就是基本初等函数，然后先用导数基本公式表中相应的公式求导；再乘上看成整体的函数对 x 的导数，依次进行下去.

仍用此例说明，看看下面的分解运算过程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos(3x)}(\cos(3x))'$$

$\cos(3x)$看成整体，$(\ln u)'=\dfrac{1}{u}$

$$=\frac{1}{\cos(3x)}(-\sin(3x))(3x)'$$

$3x$看成整体，$(\cos v)'=-\sin v$

$$=\frac{1}{\cos(3x)}(-\sin(3x))\cdot 3=-3\tan(3x).$$

【例 4】 设 $y=2^{\sin^2 x}$，求 y'.

解
$$y'=2^{\sin^2 x}\cdot\ln 2\cdot(\sin^2 x)'$$

$(2^u)'=2^u\ln 2$

$$=2^{\sin^2 x}\cdot\ln 2\cdot 2\sin x\cdot(\sin x)'$$

$(u^2)'=2u$

$$=2^{\sin^2 x}\cdot\ln 2\cdot 2\sin x\cdot\cos x$$

$(\sin x)'=\cos x$

$$=2^{\sin^2 x}\cdot\ln 2\cdot\sin(2x).$$

注意：当熟练后，可以一气呵成，不必用上述分解步骤.

【例 5】 设 $y=\mathrm{e}^{-2x}\cos(3x^2)$，求 y'.

解
$$\begin{aligned}y'&=(\mathrm{e}^{-2x})'\cos(3x^2)+\mathrm{e}^{-2x}(\cos(3x^2))'\\&=\mathrm{e}^{-2x}(-2)\cos(3x^2)+\mathrm{e}^{-2x}(-\sin(3x^2))(6x)\\&=-2\mathrm{e}^{-2x}\cos(3x^2)-6x\cdot\mathrm{e}^{-2x}\sin(3x^2).\end{aligned}$$

【例 6】 设 $y=x^{\sin x}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 这是幂指函数，可以先转换成指数函数，再求导.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=(\mathrm{e}^{\ln x^{\sin x}})'=(\mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln x})'=\mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln x}(\sin x\cdot\ln x)'\\&=\mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln x}((\sin x)'\ln x+\sin x\cdot(\ln x)')\\&=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).\end{aligned}$$

【例 7】 设 $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，求 y',y''.

解
$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$y''=(y')'=((1+x^2)^{-\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

【例 8】 设 $y=f(\mathrm{e}^{2x})$,求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 这是抽象函数与具体函数复合而成的复合函数,利用复合函数求导法则,设 $y=f(u),u=\mathrm{e}^{2x}$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)(\mathrm{e}^{2x})'=f'(\mathrm{e}^{2x})\cdot\mathrm{e}^{2x}\cdot 2=2\mathrm{e}^{2x}\cdot f'(\mathrm{e}^{2x}).$$

下面举几个隐函数与参数函数求导的题目.

【例 9】 设由方程 $x^2-y^2=1$ 确定 y 是 x 的函数 $y(x)$,求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 这是隐函数求导的问题,解法如下:

等式两边对 x 求导,并注意到 y 是 x 的函数 $y(x)$,所以当出现 y 时,要将其看成是一种复合函数的求导问题,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1),$$

看成复合函数求导

即
$$2x-2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

解出$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,就是此隐函数的导数

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{y}.$$

【例 10】 设由方程 $\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$ 确定 y 是 x 的函数 $y(x)$,求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$,及此曲线在对应于 $x=0$ 点处的切线方程与法线方程.

解 这也是隐函数求导,等式两边对 x 求导:

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^y)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}(xy)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e})}{\mathrm{d}x},$$

即
$$\mathrm{e}^y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y+x\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

解出
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x+\mathrm{e}^y}.$$

令 $x=0$，代入原方程，得 $\mathrm{e}^y+0=\mathrm{e}$，解得 $y=1$.

从而
$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\left.\left(-\frac{y}{x+\mathrm{e}^y}\right)\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

最后再求切线方程，由上面运算可知，切点为 $(0,1)$，切线斜率为 $y'\big|_{x=0}=-\frac{1}{\mathrm{e}}$，

故切线方程为
$$y-1=-\frac{1}{\mathrm{e}}(x-0),$$

即
$$y=-\frac{1}{\mathrm{e}}x+1,$$

法线方程为
$$y-1=\mathrm{e}(x-0),$$

即
$$y=\mathrm{e}x+1.$$

【例 11】 设 $\begin{cases}x=3\mathrm{e}^{-t}\\y=2\mathrm{e}^{t}\end{cases}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 这是参数方程求导，公式为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{(2\mathrm{e}^t)'}{(3\mathrm{e}^{-t})'}=\frac{2\mathrm{e}^t}{-3\mathrm{e}^{-t}}=-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t}.$$

1.1.3 微分

微分是与导数密切相关的一个概念，形象地说，它考虑的是对于自变量 x 的微小改变量 Δx，函数 y 大约改变多少.

设 $y=f(x)$，给 x 一个增量 Δx，得函数增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，若 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 $\begin{cases}A\text{ 与 }\Delta x\text{ 无关}\\o(\Delta x)\text{ 是 }\Delta x\text{ 的高阶无穷小}\end{cases}$，则

$$\begin{cases}\text{称 } f(x) \text{ 在 } x \text{ 点可微分} \\ A = f'(x) \\ \text{微分 } dy = f'(x)\Delta x\end{cases}.$$

习惯将微分记成 $\quad dy = y'dx$.

如例1:求微分:设 $y = e^{\sin x}$,则微分

$$dy = d(e^{\sin x}) = (e^{\sin x})'dx = e^{\sin x}\cos x dx;$$

求微分:$d(x^2\ln x) = (x^2\ln x)'dx = (2x\ln x + x)dx$.

或利用微分法则 $\quad d(uv) = vdu + udv$,

$$\begin{aligned}d(x^2\ln x) &= \ln x d(x^2) + x^2 d(\ln x) \\ &= \ln x \cdot 2x dx + x^2 \cdot \frac{1}{x}dx = (2x\ln x + x)dx.\end{aligned}$$

如例2:凑微分:$x^2 dx = \frac{1}{3}d(x^3)$,或 $x^2 dx = \frac{1}{3}d(x^3 + 1) = \frac{1}{3}d(x^3 + C)$.

$$\frac{1}{x}dx = d(\ln x) = d(\ln x + C),$$

$$e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}d(e^{3x}) = \frac{1}{3}d(e^{3x} + C).$$

注意:可导 $\Leftrightarrow$ 可微.

1.1.4 导数的应用

可以用导数来讨论函数的性态,具体如下:

$$\text{函数一般性态}\begin{cases}\text{区间性态}\begin{cases}\text{单调区间}\\\text{凹凸区间}\end{cases}\\\text{点性态}\begin{cases}\text{极值点}\\\text{拐点}\end{cases}\end{cases}$$

单调区间、极值点 —— 用 y' 讨论;

凹凸区间、拐点 —— 用 y'' 讨论.

◆ 用导数判定函数单调性

当 $x \in (a,b)$ 时,$\begin{cases}y' > 0\\y' < 0\end{cases} \Rightarrow y = f(x)$ 在 (a,b) 上 $\begin{cases}\text{单调增加}\\\text{单调减少}\end{cases}$.

注意:单调区间分界点 x_0 的特征是:$f'(x_0) = 0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在.

◆ 用导数求极值

取到极值必要条件:设 $f(x_0)$ 是极值 $\Rightarrow \begin{cases}f'(x_0) = 0\,(\text{可导时})\\f'(x_0)\text{不存在}\end{cases}$.