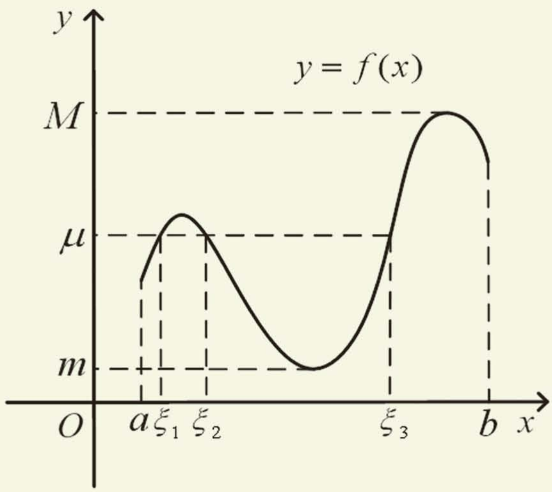
大学文科数学

DAXUE WENKE SHUXUE

徐会林　黄贤通◎编著

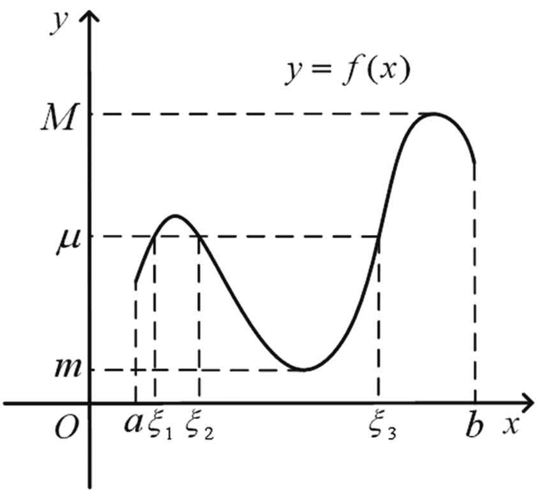


江西高校出版社
JIANGXI UNIVERSITIES AND COLLEGES PRESS

大学文科数学

DAXUE WENKE SHUXUE

徐会林　黄贤通◎编著



江西高校出版社
JIANGXI UNIVERSITIES AND COLLEGES PRESS

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/徐会林,黄贤通编著. —南昌:江西高校出版社,2017.2

ISBN 978-7-5493-5163-3

Ⅰ.①大…　Ⅱ.①徐…　②黄…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 046797 号

出版发行	江西高校出版社
社址	江西省南昌市洪都北大道 96 号
总编室电话	(0791)88504319
销售电话	(0791)88511423
网址	www.juacp.com
印刷	虎彩印艺股份有限公司
经销	全国新华书店
开本	700mm×1000mm　1/16
印张	12.75
字数	236 千字
版次	2017 年 2 月第 1 版
	2017 年 2 月第 1 次印刷
书号	ISBN 978-7-5493-5163-3
定价	29.00 元

赣版权登字-07-2017-199

前　言

随着社会信息化程度的不断提高,计算机和互联网的广泛应用与普及,数学科学的地位和作用被越来越多的人认可.数学的方法、思维与精神不仅在自然科学和工程技术领域起着重要作用,而且正以越来越快的速度渗透到人文社会科学的各个领域,并显示出巨大的启发和推动作用.每一个想成为有较高文化素质的现代大学生,都应具备较高的数学素质.因此,大学数学教育对文科专业的大学生来说是必不可少的.

本教材是专门为大学文科专业开设的大学数学课程编写的,以传授经典的大学数学知识为主.本教材的预期目标是使学生不仅掌握具有应用功能的数学工具,而且潜移默化地受到逻辑思维与理性思维的训练.在编写教材时,我们遵循了以下编写思路,并希望达到相应的教学目的:

(1)精选教材内容.在保证知识完整性的前提下,以尽可能短的篇幅涵盖一元函数微积分和线性代数的基本概念和主要知识点,在教材内容安排上尽量做到紧凑合理.

(2)衔接中学教材.从中学数学的集合、函数、概率及导数的初步知识出发,一方面逐步拓宽知识面的广度,增加知识点的难度;另一方面,介绍部分中学数学知识的背景、原理及证明.

(3)激发学生兴趣,提高数学素养.本教材编写的语言力求做到通俗易懂,避免大段的抽象叙述,章节之间尽可能衔接恰当,注重知识点的连贯;重点讲解主要知识点的来龙去脉,在不影响理解的前提下,尽量不深入介绍抽象性的理论证明.

正如国家级教学名师南开大学的顾沛教授所说,大学文科数学教育应发挥五个方面的作用:第一,掌握必要的数学工具,用来处理和解决人文学科中普遍存在的数量化问题与逻辑推理问题;第二,了解数学文化,提高数学素质;第三,潜移默化地培养学生“数学方式的理性思维”,如抽象思维、逻辑思维等;第四,培养全面的审美情操,培养对数学的美感认知;第五,为学生的终身学习打基

础、做准备. 这五点也正是我们在编写教材的过程中遵循的原则.

本教材内容编排如下:第一章介绍了集合、关系以及集合的应用等内容;第二章介绍了行列式、矩阵的概念与运算以及线性方程组的求解等线性代数的初步知识;第三章介绍了一元函数微积分学,主要内容包括函数的极限、连续、导数,不定积分,定积分等;第四章介绍了信息安全与密码学的相关知识. 为提高学生的数学文化素养,我们在每一章都设置了课外阅读内容,分别介绍了三次数学危机和博弈论的经典故事模型.

本教材是江西省教育科学“十三五”规划课题(编号:16YB128)的研究成果,同时本教材的出版得到了赣南师范大学教材建设基金的资助. 在教材的编写过程中,赣南师范大学数学与计算机科学学院的领导和同事给予了很大的帮助和支持,徐会林、周端美、廖冬妮和黄贤通老师对书稿进行了认真的审阅,并提出了许多宝贵的意见和建议,在此表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,书中难免会有一些错误和不足之处,恳请各位专家、同行和广大读者批评指正.

编　者

2017 年 1 月

目 录 Contents

第2章　线性代数初步

第3章　一元函数微积分

第 1 章　集合论及其应用

集合论以集合为研究对象,是数学的一个基本分支学科. 集合论在数学中占有独特的地位,它的概念已经渗透到数学的所有领域. 本章主要介绍集合的概念、运算及其应用,重点介绍集合的笛卡儿乘积、笛卡儿乘积的子集 —— 二元关系以及集合的应用.

§1.1　集合及其运算

1.1.1　集合的相关概念

1. 集合的定义

集合是现代数学中的一个基本概念,同时在现实生活中也无处不在. 例如,一个自然班的全体同学构成一个集合,经停一个火车站的所有列车构成一个集合,一个小区的所有业主构成一个集合,全体自然数构成一个集合,等等. 我们无法给出集合的确切定义,就像在几何中无法定义点和直线一样. 一般地,所谓**集合**是指具有特定性质的事物的全体,而构成这个集合的事物称为该集合的**元素**. 例如,在全班同学构成的集合中,班里的每个同学都是它的元素;在全体自然数构成的集合中,每个自然数都是它的元素.

通常用带下标或不带下标的大写字母表示集合,如 X,Y,A_1,B_2 等;用带下标或不带下标的小写字母表示集合的元素,如 x,y,a_1,b_2 等. 若 a 是集合 A 的元素,就称 a 属于 A,记作 $a \in A$;若 a 不是集合 A 的元素,就称 a 不属于 A,记作 $a \notin A$.

由有限个元素构成的集合称为**有限集**;由无限个元素构成的集合称为**无限集**. 特别地,不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$. 习惯上,我们用 $\mathbf{N}$ 表示全体自然数构成的自然数集;用 $\mathbf{Z}$ 表示全体整数构成的整数集;用 $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数构成的有理数集;用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数构成的实数集;用 $\mathbf{C}$ 表示全体复数构成的复数集.

集合及元素具备以下几点性质：

（1）确定性. 集合中的元素是确定的，即给定一个集合 A，则任一元素 a 或者属于或者不属于集合 A，二者必居其一.

（2）互异性. 集合中的元素是互异的，即在一个集合中，任何两个元素都是互不相同的，每个元素只能出现一次.

（3）无序性. 集合中的元素是无序的，即在一个集合中，每个元素的地位都是相同的，没有先后次序之分.

表示集合的方法通常有两种：列举法和描述法. **列举法**是指把集合的所有元素一一列举出来，有时也可只列出部分元素，而其余元素可从前后关系中推出. 例如，由元素 a,b,c,d 构成的集合 A_1 可表示为

$$A_1=\{a,b,c,d\};$$

由从 1 到 100 的 100 个自然数构成的集合 A_2 可表示为

$$A_2=\{1,2,3,\cdots,100\}.$$

描述法是指用集合中所有元素共有的性质来刻画集合的一种方法. 设 M 是所有具有性质 P 的元素 x 构成的集合，则可表示为 $M=\{x \mid P(x)\}$. 例如，由全体正偶数构成的集合 A_3 可表示为

$$A_3=\{x \mid x\text{ 是正偶数}\};$$

方程 $x^2=4$ 的解集 A_4 可表示为

$$A_4=\{x \mid x^2=4\}.$$

正如实数之间有相等关系与大小关系一样，集合之间也有两种基本关系：相等关系与包含关系. 设 A,B 为两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 对任意集合 A，我们规定 $\varnothing\subseteq A$. 如果集合 A 与 B 的元素相同，则称这两个集合**相等**，记作 $A=B$. 由集合的子集与集合相等的概念可以推得：

定理 1.1 设 A,B 为两个集合，则 $A=B$ 的充分必要条件是 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$. 对几个常用的数集，我们有 $\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$.

例 1.1 判断集合 $A=\{x \mid x=3i,i\in\mathbf{N}\}$ 与 $B=\{x \mid x=6j,j\in\mathbf{N}\}$ 之间的关系.

解：任取 $x\in B$，由集合 B 的定义可知，存在 $j\in N$ 使得 $x=6j$ 成立. 令 $i=2j$，则有 $i\in N$ 且 $x=3i$ 成立，故 $x\in A$，进而有 $B\subseteq A$.

另一方面，取 $i=1$，则有 $3\in A$，而 $3/6=1/2\notin N$，故 $3\notin B$，进而有 $A\neq B$. 由 $B\subseteq A$ 且 $A\neq B$ 可知 $B\subsetneqq A$.

例 1.2 写出集合 $A=\{a,b\}$ 的所有子集,并指出哪些是真子集.

解:集合 A 的所有子集有 $\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}$,其中 $\varnothing,\{a\},\{b\}$ 是真子集.

2. 集合的幂集

定义 1.1 集合 A 的全体子集构成的集合称为 A 的**幂集**,记作 $P(A)$,即 $P(A)=\{x\mid x\subseteq A\}$.

例 1.3 设 $A=\{a,b\}$,$B=\{1,2,3\}$,求 $P(A)$ 和 $P(B)$.

解:由幂集的定义可知

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},A\},$$

$$P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},B\}.$$

若用下标“1”表示某元素参与构成了某子集,用下标“0”表示某元素未参与构成某子集,则例 1.3 中集合 B 的全体子集为

$$B_{000}=\varnothing,B_{100}=\{1\},B_{010}=\{2\},B_{001}=\{3\},B_{110}=\{1,2\},$$

$$B_{101}=\{1,3\},B_{011}=\{2,3\},B_{111}=\{1,2,3\}=B.$$

因此,B 的幂集可表示为 $P(B)=\{B_{000},B_{100},B_{010},B_{001},B_{110},B_{101},B_{011},B_{111}\}$.

不难看出,若集合 A 是由 n 个元素构成的有限集,则 A 有 2^n 个子集,即 $P(A)$ 有 2^n 个元素.

3. 区间与邻域

以数为元素的集合,也就是数的集合称为**数集**. 区间与邻域是最常用的两类数集.

设 a 和 b 为实数且 $a<b$,则数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为**开区间**,记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

a 和 b 分别称为开区间 (a,b) 的左端点和右端点. 数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 分别是 $[a,b]$ 的左端点和右端点,这里有 $a\in[a,b]$ 和 $b\in[a,b]$ 成立.

类似地,可以定义**半开半闭区间**:

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$ 称为区间的**长度**,有限长度的区间称为**有限区间**. 从数轴上看,有限区间为有限长度的线段. 将闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 分别在数轴上表示出来,如图 1.1 中(a) 与(b) 所示. 此外,无限长度的区间

称为**无限区间**. 引入记号 ∞（读作无穷大），$+\infty$ 及 $-\infty$，常见的无限区间有：

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},(a,+\infty)=\{x\mid x>a\},$$

$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\},(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}.$$

无限区间 $[a,+\infty)$ 与 $(-\infty,b)$ 分别在数轴上表示出来，如图 1.1 中(c)与(d)所示.

实数集 $\mathbf{R}$ 可以用区间表示为 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间.

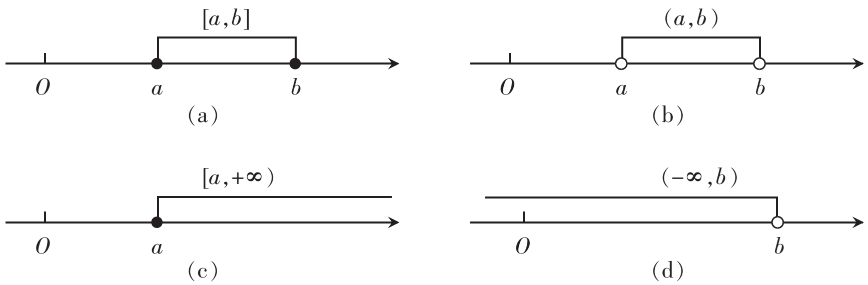


图 1.1

邻域是另一类常用的数集.

定义 1.2　设 δ 为任意正数，称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

其中，点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，如图 1.2 所示.

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 等价于 $|x-a|<\delta$，因此，$U(a,\delta)$ 表示的是到点 a 的距离不超过 δ 的点的全体. 去掉中心后的点 a 的 δ 邻域称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\overset{o}{U}(a,\delta)$，即

$$\overset{o}{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

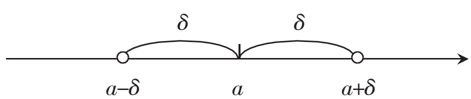


图 1.2

1.1.2　集合的运算

1. 集合的基本运算

集合有四种基本运算：并、交、差与补.

设 A,B 是两个集合,由所有属于 A 或属于 B 的元素构成的集合,称为集合 A 与 B 的**并集**(简称并),记作 $A \cup B$,即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由所有属于 A 且属于 B 的元素构成的集合,称为集合 A 与 B 的**交集**(简称交),记作 $A \cap B$,即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

由所有属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合,称为集合 A 与 B 的**差集**(简称差),记作 $A - B$,即

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

例 1.4　已知 $A = \{1,2,3,4\}$,$B = \{3,4,5,6\}$,求:

$$A \cup B, A \cap B, A - B, B - A.$$

解:由定义可知

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}, A \cap B = \{3,4\},$$
$$A - B = \{1,2\}, B - A = \{5,6\}.$$

一般地,我们将讨论的问题限定在一个大的集合 I 中进行,其他集合都是它的子集. 此时,我们称集合 I 为**全集**,$I - A$ 为 A 的**补集**,记作 $\sim A$,即 $\sim A = I - A$. 例如,在实数集 $\mathbf{R}$ 中,区间 $(0,1]$ 的补集为 $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$.

习惯上,我们用平面上封闭曲线的内部区域表示集合的图形,这种图形称为**文氏(Venn)图**. 集合的并、交、差与补可以用文氏图很直观地表示出来,如图1.3 所示.

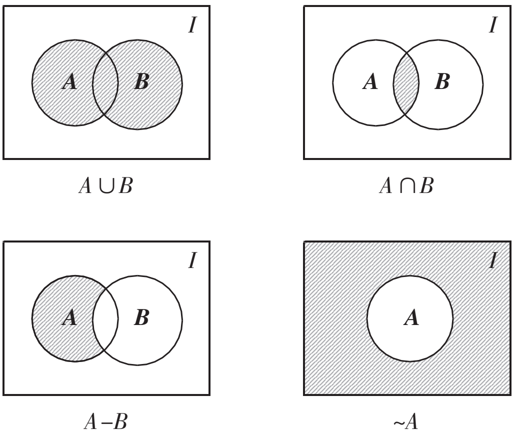


图 1.3

2. 集合的运算法则

设 A,B,C 为三个任意集合,则有下列运算法则成立:

(1) 同一律:$A\cup\varnothing=A, A\cap I=A$;

(2) 排中律:$A\cup\sim A=I, A\cap\sim A=\varnothing$;

(3) 复原律:$\sim(\sim A)=A$;

(4) 支配律:$A\cup I=I, A\cap\varnothing=\varnothing$;

(5) 幂等律:$A\cup A=A, A\cap A=A$;

(6) 交换律:$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(7) 结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(8) 分配律:$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(9) 吸收律:$A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$;

(10) 德摩根律:$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$, $\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$.

上述法则均可利用集合的并、交、差、补以及集合相等的定义来验证. 有了这些运算法则后,学习和生活中的很多问题都可以用集合来描述.

例 1.5 某图书馆有藏书 1000 万册,可以利用搜索引擎查阅馆藏图书资源. 有一位读者希望了解我国 2000 年以来出版的所有描写大学生生活的长篇小说,以及我国 1987 年以来出版的所有不是描写商界的长篇小说. 请将该读者要了解的图书用集合表示出来.

解: 设全集 I 为该图书馆的所有藏书构成的集合,并记

F 为所有我国出版的书构成的集合;

G 为所有 2000 年以来出版的书构成的集合;

H 为所有描写大学生生活的书构成的集合;

R 为所有长篇小说构成的集合;

S 为所有 1987 年以来出版的书构成的集合;

K 为所有描写商界的书构成的集合.

将该读者要了解的图书记为集合 A,则有

$$\begin{aligned}A&=(F\cap G\cap H\cap R)\cup(F\cap S\cap\sim K\cap R)\\&=F\cap[(G\cap H\cap R)\cup(S\cap\sim K\cap R)]\\&=F\cap R\cap[(G\cap H)\cup(S\cap\sim K)].\end{aligned}$$

§1.2 集合的笛卡儿乘积

1.2.1 有序对与有序组

为引入集合的笛卡儿乘积,我们先来介绍有序对与有序组的概念.

定义 2.1 由两个元素 a,b 按一定顺序排成的二元组称为一个有序对或有序偶,记作 (a,b),其中 a 称为第一元素,b 称为第二元素.

在平面直角坐标系中,点的坐标 (x,y) 就是一个有序对,它的横坐标 x 是第一元素,纵坐标 y 是第二元素. 一般来说,(x,y) 和 (y,x) 表示两个不同的点. 又如,在一个表示月和日的有序对中,$(4,7)$ 表示 4 月 7 日,而 $(7,4)$ 表示 7 月 4 日,显然 $(4,7) \neq (7,4)$. 因此,两个有序对相等的充分必要条件是构成有序对的元素相同且顺序也相同,即

定理 2.1 设 (a,b),(x,y) 为两个有序对,则 $(a,b)=(x,y)$ 的充分必要条件是 $a=x$ 且 $b=y$.

例 2.1 已知 $(x-1,2y)=(y^2,x)$,求 x 和 y.

解: 由有序对相等的充要条件可知

$$\begin{cases} x-1=y^2, \\ 2y=x, \end{cases}$$

求解可得 $x=2$,$y=1$.

两个元素构成的有序对可以推广到 n 个元素构成的有序组.

定义 2.2 $n(n \geqslant 2)$ 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 按一定顺序排成的 n 元组称为一个 n 元有序组,记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

两个 n 元有序组相等的充分必要条件是构成有序组的元素相同且顺序也相同,即

定理 2.2 设 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 为两个 n 元有序组,则它们相等的充分必要条件是 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$.

1.2.2 集合的笛卡儿乘积

下面,我们引入集合的笛卡儿乘积的概念.

定义 2.3 设 A,B 为两个集合,从集合 A 中任取一个元素 a,从集合 B 中任取一个元素 b,构成有序对 (a,b),所有这些有序对构成的集合称为集合 A 与 B

的笛卡儿乘积，记作 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

特别地，记 $A\times A$ 为 A^2. 在平面直角坐标系中，所有点的集合可以表示为笛卡儿乘积：

$$\mathbf{R}^2=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}.$$

例 2.2 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3\}$，求 $A\times B$ 与 $B\times A$.

解：由笛卡儿乘积的定义可知

$$A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\},$$
$$B\times A=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}.$$

设集合 A 有 m 个元素，集合 B 有 n 个元素，由排列组合的知识可知 $A\times B$ 有 mn 个元素.

例 2.3 设 $A=\{1,2\}$，$B=\{a,b\}$，请通过构造二维表计算笛卡儿乘积 $A\times B$ 与 A^2.

解：(1) $A\times B=\{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b)\}$，这是因为

表 2.1

集合 B / $A\times B$ / 集合 A	a	b
1	$(1,a)$	$(1,b)$
2	$(2,a)$	$(2,b)$

(2) $A^2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$，这是因为

表 2.2

集合 A / A^2 / 集合 A	1	2
1	$(1,1)$	$(1,2)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$

定义 2.4 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个集合，称

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

为这 n 个集合的笛卡儿乘积. 特别地，称 $A^n=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n个}$ 为 A 的 n 次幂.

例 2.4 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2\}$，$C=\{\alpha,\beta\}$，求 $A\times B\times C$.