高频考点题型抢分特训

申招斌

高考数学（文科）

湖南教育出版社

前言

进入高考二轮与三轮复习阶段,学生均有强烈的紧迫感。然而,由于禁补令及高考一轮复习多而全,已侵占了传统的高考二轮与三轮复习的时间,压缩了高考二轮与三轮的运作时间。因而,学生急需一种创新产品来适应目前的高考二轮与三轮复习的新形势。为此,本丛书编委会特邀雅礼中学、湖南师范大学附属中学、长郡中学、长沙万星学校等各科名师,认真研究考纲并结合多年教学经验,编写了这套《高频考点·题型抢分特训》,针对高考题型、热点知识(高频考点)进行“布点”预测强化,以达到高考“抢分”之目的。

本丛书有三大亮点:

1 **强化高考复习的“抢分”理念与“回归”理念。**“抢分”是本丛书最核心的亮点,也是区别同类书籍的一大创新。而“回归”的内容均是在高考得分点上布局,包括知识点布点、题型布点与解题方法布点。

2 **解决当前高考二轮复习的困惑。**目前市面上的高考一轮复习图书大都做得大而全,题多量大,难度几近高考二轮的难度。传统的高考二轮复习图书往往是以学科知识体系为线索,以专题复习的方式呈现,很多内容是高考一轮复习已讲的内容,且高考二轮复习大多轻视基础,注重综合,平均难度高于高考,使用效果不理想。本丛书可承接大而全的高考一轮复习,通过创新变革改变传统的高考二轮、三轮复习方式,兼顾题型与高考热点,兼顾不同水平的考生,全面有效地提升考生的高考能力以及高考成绩。

3 **弥补市场上的高考三轮强化训练针对性不强的不足。**大部分学校的高考三轮强化训练资料是从网上下载名校试卷,或订购成套试卷。而这些试卷并不适合本校的学生,同时,这种训练没有明确的主题与目的,效果不佳。很多学校甚至没有这一环节,花大量时间进行漫天撒网的题海战术,虽然能取得一定的成效,但此方式不属于高效之举。实施目的性不强的题海战术应该成为过去式。

本丛书在内容设置上进行科学编排，主要分为两大板块：

1 **题型突破。**以高考题型为突破点，依据高考能力要求，针对题型特点进行编写。精选典型高考真题或名校模拟题，结合各学科特征，归纳常用方法，突破高考题型，针对性强，实用性强，有利于考生准确、合理、高效地开展考前三个月的复习。

2 **高频考点回归练。**深入分析近三年高考命题选点，精准提炼考点，以考点为核心分析命题趋势，以考点为线索梳理整合知识，以考点为指导精选试题。在突出常考知识点的同时，选题侧重基础，注重“回归”。帮助学生回归基础，消除知识点的盲区，确保学生基础题少丢分或不丢分。

成功没有捷径却有方法。希望广大考生在选用本书时，用心琢磨透每道典题，领会书中列举的解题方法，参透各个考点，达到“突破题型不丢分，回归基础保得分”。在高考这个没有硝烟的战场上，打好漂亮的一仗！

目　录

第三部分　高频考点回归练

第一部分

题型分析与求解篇

PART ONE ≫

数

学

第一章 选择题的求解策略

第一节 选择题的基本认识

据统计，在每年的数学高考中，选择题能占到试卷总分的 40%，其中易、中、难的比例约为 4∶5∶1，平均难度在 0.7 左右，在高考中选择题的得分能占到学生数学成绩的 50%，是学生得分的重要来源. 本章以选择题的结构特征与回答方式上的特点为基础，分析选择题的求解策略，构建求解选择题的方法体系.

选择题在试卷中具有“单、多、广、活”的特点，即内容比较单一(大多只涉及 1～3 个知识点，仅进行 1～3 步运算)，数量比较多，覆盖面比较广，题型比较活，以定量计算型为主(有些“定性论证型”选择题也可以通过定量计算来解决).

求解选择题要求学生“熟、准、快”，即内容熟悉、概念准确、推演快速，体现选择题的题型特征.

研究选择题的解法，必须包括这样一个战略性的目标：快速求解！但是，怎样才能“快”呢？当然，首先要“内容熟悉、概念准确”，问题是，基础知识和基本能力怎样与题型特征结合起来？目前无论网上还是一些数学论文中方法都很多，却大都缺乏系统性，不能从根本上优化学生的思维结构，作者认为，快速解答选择题的关键是结合选择题自身特点(小题小做)，避免总是“把信息量较多、赋分值较低的选择题”当成解答题来做(小题大做).

下面通过一道例题，让大家感受和体验怎样求解选择题.

典例 1 已知可导函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$，满足 $f'(x)>f(x)$，则对任意的正数 a，$f(a)$，$e^af(0)$之间的关系为 ( )

A. $f(a)<e^af(0)$　　B. $f(a)=e^af(0)$

C. $f(a)>e^af(0)$　　D. 与 $f(x)$或 a 有关

解析 这道题的背景是：已知可导函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$，满足 $f'(x)>f(x)$，则对任意的正数 a，恒有 $f(a)>e^xf(0)$.

构建函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}(x\in\mathbf{R})$，$F'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$，得 $F(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，因而对 $a>0$，有 $F(a)>F(0)\Rightarrow\dfrac{f(a)}{e^a}>\dfrac{f(0)}{e^0}$，得 $f(a)>e^af(0)$，选 C.

【答案】 C

但对于一般学生来说，构建函数是个障碍，那如何突破这个障碍呢？充分挖掘题干的内涵，即只要满足题干的条件就有唯一的结论，所以取 $f(x)=-1$(或 -3，-5)，则 $f'(x)=0$，显然满足条件 $f'(x)>f(x)$，且对 $a>0$，有 $f(a)=f(0)=-1$ 可否定选项 A、B；又 $f(a)=-1>-e^a=e^af(0)$，可快速得到选项 C. 这个解法充分利用了选择题的自身特点，把一个需要构造函数来求解的中档题，通过一个常函数而转化为数值 -1 与 $-e^a$ 的大小比较，避免了“小题大做”.

作为选择题，首先已在结构形式上释放出比解答题更多的已知信息(给出了 4 个选项，且 4 个选项中有且只有一项正确)；同时，在回答方式上选择题既可以由题干直接论证又可以将选择支作为条件使用.

如果选择题的编拟使用了全称判断，那就可以通过特例来排除诱误支，得出正确选择. 因而，只需从无穷多个满足条件的模型中取出一个特殊的模型，就能得出这个“唯一确定”的答案.

求解选择题不仅存在随机猜测(正确率可达 0.25)，而且存在合理猜测和合情推理，“合理猜测和合情推理”不仅是机智的，而且也是可行的，正确率可以超过 0.5.

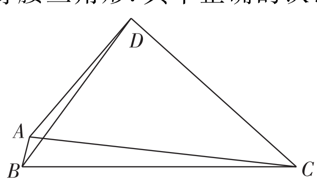
所以，利用选择题的结构特点，根据“系统方法论”，使用一些特殊的方法是可行的、正确的.

第二节　选择题选择支的分析

我们知道，从选择支中获取信息是选择题精巧求解的一个源泉．但是，这里有一些技术问题，比如，代入验证时，是 A、B、C、D 依次代入，还是有目的地挑某一选择支代入？显然，弄好了，我们代入一个选择支就能得出结论，问题是如何选择顺次呢？又如，特值验证时，碰巧了，取一个值就肯定了一支或者否定了 3 个支，问题是，这个特殊值是怎么找到的呢？

为了解决这些问题，我们建议采用“选择支的结构分析法”，通常做法是把 4 个选择支的内容对照着列成一个列联表，然后对比它们的关系，找出最关键的环节，找出最特别的数值，找出最经济的解题方案．

典例 2　如下图，四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD，DA 的长分别是 1，9，8，6，对于以下命题：①四边形 $ABCD$ 外切于圆；②四边形 $ABCD$ 不内接于圆；③对角线不互相垂直；④$\angle ADC\geqslant 90^\circ$；⑤$\triangle BCD$ 是等腰三角形．其中正确的认识有（　　）



A. ①真、②假、④真　　B. ③真、④假、⑤真
C. ③真、④假、⑤假　　D. ②假、③假、④真

解析　如果先对 5 个命题逐一判断真假，是比较麻烦的，也不能反映选择题的特点．特别是命题②的判断比较难，题设给定的四边形其形状并不唯一确定．如果依次判断，这就是“小题大做”（相当于做了 5 道题）．当年的标准答案，验证了 3 个命题也没有看透题目深层结构，那么我们应该先做哪个命题？又最少要判断几个命题呢？对选择支做结构分析可一目了然，列表如下：

选项	①	②	③	④	⑤
A	+	−	?	+	?
B	?	?	+	−	+
C	?	?	+	−	−
D	?	−	−	+	?

（其中“+”表示真，“−”表示假，“?”表示“无法判断真假”）

对比之下，命题④的信息量最大，应该先从命题④做起，第一步否定两个选择支，第二步再否定一个选择支．由 $AC^2<(AB+BC)^2=10^2=CD^2+AD^2$，知④假，这就否定了 A、D．又由于 B、C 对⑤号命题的判断是不同的，故继续由 $BD<AD+AB=7<CD<BC$，知⑤假，否定 B，最后由选择题有且只有一个正确选项，故选 C．这种方法把对 5 个命题的判断转化为对 2 个命题的判断，大大地缩短了解答时间，并且避免了对较难命题的推理论证．这种方法的独到之处在于不破译黑箱而间接认识黑箱，这是系统方法论里的“黑箱理论”．

【答案】 C

典例 3　设实数 a,b,c 满足 $a^2-bc-8a+7=0$，$b^2+c^2+bc-6a+6=0$，那么 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,+\infty)$
B. $(-\infty,1]\cup[9,+\infty)$
C. $(0,7)$
D. $[1,9]$

解析　本题正面求解的方法有很多．保证既充分又必要有一定的综合性，不少同学甚至找不到突破口，利用排除法也不知道怎么取值验证比较合适，列表对选择支进行结构分析．

选项	$(-\infty,0]$	$(0,1)$	1	$(1,7)$	$[7,9)$	9	$(9,+\infty)$
A	+	+	+	+	+	+	+
B	+	+	+	−	−	+	+
C	−	+	+	+	−	−	−
D	−	−	+	+	+	+	−

（其中“+”表示选择支包含此区间或端点，“−”表示选择支不包含此区间或端点）

由表可见，一般地，a 取 2 个特殊值就可得出结果，比如在区间 $(-\infty,0]$ 内取一个值，就可以把选择支缩短为 A、B 或 C、D，再在区间 $[7,9]$ 中取一个值，就可以把答案确定；特殊地，取 $a=\frac{1}{2}$ 时，$bc=\frac{13}{4}$，由 $b^2+c^2+bc-6a+6=0$ 可得 $b^2+c^2=-\frac{25}{4}<0$，矛盾，故包含 $a=\frac{1}{2}$ 的 A，B，C 均可否定，选 D．

【答案】 D

此法来源于对题目结构的认识，具体地讲，是对选择题特殊结构的认识，对选择支做结构分析，是认识题目深层结构的一个途径，选择题的验证法常常可以用“选择支结构分析表”找到为什么取特殊值，取哪个特值的启示．

第三节　选择题的求解策略

由上面对选择题的结构特征分析，可以得出解答选择题的5个基本策略.

由"统一前提"知，4个选择支"有且只有一个正确"，从而产生3个策略.

策略1　肯定1支，即只要能肯定1支，便自动否定3支.

策略2　否定3支，即只要能否定3支，便自动肯定第4支，这是一种典型的黑箱方法，不打开黑箱而破译黑箱之谜！对定量型和定性型的选择题都有效.

策略3　逻辑分析，即理解题意时，也对选择支之间的逻辑关系作出判断，以减少选择干扰，缩小选择支的范围，比如，若 $A\Rightarrow B$，则 A 必假；$A\Leftrightarrow B$，则 A，B 均假；若 A，B 矛盾，则 A，B 必有一真，从而 C，D 均假. 熟悉这些逻辑关系，自觉进行这方面的逻辑分析，可以提高解题效率.

策略4　合情推理，即由图形的直观性，进行简单的逻辑判断或特殊的数值验证，以及特征结构的分析甚至猜想等迅速作答.

策略5　结论也是已知信息，就是说要充分利用4个选择支所提供的信息，从中获取积极的暗示，或是让结论参入推理，或是对其边推理边否定，或是直接从结论出发逆推验证.

以此为依据，我们可以归纳出解答选择题常用的几种方法.

第四节　选择题的求解方法

方法一　直解法

方法指导

直接从题目条件出发，运用有关概念、性质、定理、法则和公式等基本知识，通过严密的推理和准确的运算，并把得出的结果与4个选择支作比较，若演算的结论恰为某一选择支，我们就称为顺推肯定，若演算的过程可以逐步排除3个诱误支，我们就称为顺推否定，一般来说，顺推肯定用得较多.

值得注意的是，顺推肯定是求解选择题的最基本方法，并且这种方法本身也是充满技巧的.

典例调研

典例4　设 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，A,B,C 为该抛物线上三点，若 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$，则 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|$ 等于　　(　　)

A. 9　　B. 6

C. 4　　D. 3

解析　焦点为 $F(1,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，则由 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$ 得 $x_1-1+x_2-1+x_3-1=0$，即 $x_1+x_2+x_3=3$. 而 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|$ 可转化为 A,B,C 三点到准线的距离，即 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=x_1+1+x_2+1+x_3+1=6$. 故选 B.

【答案】 B

点拨　本题考查抛物线及向量的基本知识，解题的关键是将向量运算转化为坐标运算，再结合抛物线的性质将点到焦点的距离转化为点到准线的距离. 一般容易题和中档题都是几个简单考点的"拼凑"，只要基本知识和基本技能过关，解答就不会有任何障碍.

典例5　(重庆高考题)若 $\tan\alpha=2\tan\frac{\pi}{5}$，则 $\dfrac{\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{10}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)}$ 等于　　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

解析　$\dfrac{\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{10}\right)}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{5}\right)}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha-\dfrac{3\pi}{10}\right)}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{5}\right)}=\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{5}\right)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{5}}{\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{5}-\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{5}}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\dfrac{\pi}{5}}{\tan\alpha-\tan\dfrac{\pi}{5}}=3.$

【答案】C

点拨　本题考查了三角函数中的诱导公式、和差公式及三角恒等变换.这类题型往往技巧性较强,所以在平时的学习中,要注意积累不同知识模块处理的技巧,避免"直来直去",耽误时间,形成隐性失分.

典例 6　若向量 $\boldsymbol{a}=(k,3)$,$\boldsymbol{b}=(1,4)$,$\boldsymbol{c}=(2,1)$,且 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为钝角,则 k 的取值范围是　(　　)

A. $(-\infty,3)$

B. $(0,3]$

C. $(-\infty,0)\cup(0,3]$

D. $\left(-\infty,-\dfrac{9}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{9}{2},3\right)$

解析　∵$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为钝角,

∴$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}<0$,即 $(2k-3,-6)\cdot(2,1)<0$,

∴$4k-6-6<0$,∴$k<3$.

又若 $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{c}$,则 $2k-3=-12$,即 $k=-\dfrac{9}{2}$.

当 $k=-\dfrac{9}{2}$ 时,$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(-12,-6)=-6\boldsymbol{c}$,

即 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 反向.它们的夹角不是钝角,所以排除.

综上,k 的取值范围为 $\left(-\infty,-\dfrac{9}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{9}{2},3\right)$.

选 D.

【答案】D

点拨　本题主要考查平面向量的数量积的坐标运算,属于容易题,但隐含了当两向量的夹角为 $180°$ 时,两向量的数量积取负值,即小于 0,但夹角不是钝角.所以运用直解法解题,要扎实掌握基础知识,不要忽视空集、0、零向量、定义域、范围、端点等,否则很容易判断失误.

【小结】直解法是解答选择题最常用的基本方法,低档选择题可用此法迅速求解.直解法运用的范围很广,只要运算正确必能得到正确的答案.提高直解法解选择题的能力,是建立在扎实掌握"双基"的基础之上的,否则一味求快则容易快中出错.

方法二　验证法

方法指导

从题干出发,取满足条件的特殊值,并将得出的结论与 4 个选择支作比较,能直接得到结论的为"验证肯定法",产生矛盾或根本不存在的选择支即可淘汰,称之为"验证否定法",有时一次赋值不能排除 3 个选项,需要再次赋值.利用前面所教的"选择支结构分析法",不仅能很快地找到该赋何值,并且最多两次就能找到正确选项.这类题型较多,只要认真分析题意,找出题中的一般性与选择支的特殊性就可以使用这种方法,当题干与选项组成全称判断时用验证法是非常有效的.

典例调研

典例 7　(全国高考题)若 $a>b>1$,$0<c<1$,则　(　　)

A. $a^c<b^c$　　B. $ab^c<ba^c$

C. $a\log_b c<b\log_a c$　　D. $\log_a c<\log_b c$

解析　(验证法)设符合题意的 $c=\dfrac{1}{2}$,$a=4$,$b=2$,分别代入 A、B、C、D,排除 A、B、D,选 C.

利用验证法,干净利落,痛快淋漓.将一道对 4 个命题需要判断求证的问题变成简单的计算.

(直解法):由于 $0<c<1$,所以函数 $y=x^c$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,因此 $a>b>1$ 时,$a^c>b^c$,A 错误.

由于 $-1<c-1<0$,所以函数 $y=x^{c-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $a>b>1\Leftrightarrow a^{c-1}<b^{c-1}\Leftrightarrow ba^{c}<ab^{c}$,B 错误.

要比较 $a\log_{b}c$ 和 $b\log_{a}c$,只需比较$\dfrac{a\ln c}{\ln b}$和$\dfrac{b\ln c}{\ln a}$,只需比较$\dfrac{\ln c}{b\ln b}$和$\dfrac{\ln c}{a\ln a}$,只需比较 $b\ln b$ 和 $a\ln a$.

构造函数 $f(x)=x\ln x(x>1)$,则 $f'(x)=\ln x+1>1>0$,所以 $f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,因此 $f(a)>f(b)>0\Leftrightarrow a\ln a>b\ln b>0\Leftrightarrow 0<\dfrac{1}{a\ln a}<\dfrac{1}{b\ln b}$.

又由 $0<c<1$ 得 $\ln c<0$,所以 $\dfrac{\ln c}{a\ln a}>\dfrac{\ln c}{b\ln b}\Leftrightarrow b\log_{a}c>a\log_{b}c$,C 正确.

要比较 $\log_{a}c$ 和 $\log_{b}c$,只需比较$\dfrac{\ln c}{\ln a}$和$\dfrac{\ln c}{\ln b}$.

而函数 $y=\ln x$ 在$(1,+\infty)$上单调递增,故 $a>b>1\Leftrightarrow\dfrac{1}{\ln a}<\dfrac{1}{\ln b}$.

又由 $0<c<1$ 得 $\ln c<0$,所以$\dfrac{\ln c}{\ln a}>\dfrac{\ln c}{\ln b}\Leftrightarrow\log_{a}c<\log_{b}c$,D 错误.

【答案】 C

典例 8 (全国高考题)设函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^{2}, & x<1,\\ 4-\sqrt{x-1}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则使得 $f(x)\geqslant 1$ 的自变量 x 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-2)\cup[0,10]$

B. $(-\infty,-2)\cup[0,1]$

C. $(-\infty,-2)\cup[1,10]$

D. $(-2,0)\cup[1,10]$

解析 (验证法)由 $f(x)$的解析式可知 $f(0)=1$,排除 C、D;$f(10)=4-\sqrt{10-1}=1$,排除 B,故选 A.

(选择支结构分析法)利用前面所讲的选择支结构分析法列表如下,可取 $x=0$ 和 $x=10$ 易得正确选项为 A.

选项	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$[0,1)$	1	$(1,10]$
A	+	−	+	+	+
B	+	−	+	+	−
C	+	−	−	+	+
D	−	+	−	+	+

(直解法)解不等式组 $\begin{cases}(x+1)^{2}\geqslant 1,\\ x<1,\end{cases}$ 和不等式组 $\begin{cases}4-\sqrt{x-1}\geqslant 1,\\ x\geqslant 1,\end{cases}$ 再求并集可得$\{x\mid x<-2$或$0\leqslant x\leqslant 10\}$,故选 A.

【答案】 A

典例 9 (江西高考题)$(1+ax+by)^{n}$ 的展开式中不含 x 的项的系数的绝对值的和为 243,不含 y 的项的绝对值的和为 32,则 a,b,n 的值可能是 ( )

A. $a=2,b=-1,n=5$

B. $a=-2,b=-1,n=6$

C. $a=-1,b=2,n=6$

D. $a=1,b=2,n=5$

解析 本题读完题目,一般学生有点不知所措,找不到思路,想利用二项式展开式来求解,又几乎下不了手.仔细思考,"不含 x 项的系数"不就可以设 $x=0$ 吗?所以,当 $x=0$ 时,令 $y=1$,得$(1+|b|)^{n}=243$;令 $y=0,x=1$,则$(1+|a|)^{n}=32$.对照选择支,当 $b=-1$ 时,$(1+|b|)^{n}\neq 243$,排除 A、B,当 $a=-1$ 时,$(1+|a|)^{n}=32$,此时 $n=5$,排除 C,选 D.

【答案】 D

【小结】 能使用"验证法"解答的高考题比较多,同学们要认真理解题意,平时多注意思考"一题多解",熟悉能使用"验证法"的题型特点,这样能保证在高考时"小题小做,直奔结果".

方法三　极限法

方法指导

当一个数式在某一点有意义或图象在某一特征位置具有连续性，但题意又不包含这种情况，或者在数学上它有极限，我们可以用“极限法”求解这类问题.

典例调研

典例10 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作两条相互垂直的相交弦 AB 和 CD，则 $\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}$ 的值为　(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. 2　　D. 4

解析 (极限法)当直线 AB 的斜率→0 时，CD→垂直 x 轴，此时，$|AB|$→正无穷大，$|CD|$→通径，由 $x=1$，$y=\pm2$，所以 $\frac{1}{|AB|}\to0$，$\frac{1}{|CD|}\to\frac{1}{4}$，所以 $\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{1}{4}$，选 A.

(直解法)由题意可知抛物线的焦点坐标为 $F(1,0)$ 且直线 AB，CD 的斜率都存在，设直线 AB 的斜率为 k，则直线 CD 的斜率为 $-\frac{1}{k}$，所以 AB 与 CD 的方程分别为 $y=k(x-1)$ 和 $y=-\frac{1}{k}(x-1)$，分别联立抛物线方程得 $k^2x^2-(4+2k^2)x+k^2=0$ 和 $x^2-(2+4k^2)x+1=0$，利用弦长公式可得 $|AB|=\frac{4(k^2+1)}{k^2}$，$|CD|=4(k^2+1)$，所以 $\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{1}{4}$.

【答案】 A

点拨 本题用直解法有大量的运算，会花费大量的时间，而极限法口算都能完成，方法之用“妙不可言”，节约了大量的时间.

典例11 (全国高考题)正三棱锥 A-BCD 中，E 在棱 AB 上，F 在棱 CD 上，使 $\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}=\lambda(\lambda>0)$，设 α 为异面直线 EF 与 AC 所成的角.β 为异面直线 EF 与 BD 所成的角，则 $\alpha+\beta$ 的值是　(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

解析 (极限法)当 $\lambda\to0$ 时，$E\to A$，且 $F\to C$，从而 $EF\to AC$，此时，$\alpha\to0$，β 趋近于异面直线 AC 与 BD 所成的角，因为 A-BCD 是正三棱锥，易证 $AC\perp BD$，所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，选 D.

(直解法)作 $EG/\!/AC$ 交 BC 于 G，则 $CG:GB=AE:EB=\lambda=CF:FD$，所以 $GF/\!/BD$，即 $\angle GEF=\alpha$，$\angle GFE=\beta$，$\alpha+\beta=\pi-\angle EGF$，易证 $\angle EGF=\frac{\pi}{2}$，故选 D.

【答案】 D

点拨 本题虽然直解法并不难，但同学们找两异面直线所成的角不是很熟练，会有一定的解答障碍，利用极限法比较容易看出这些角之间的关系，答案来得更轻松.

典例12 (湖北高考题)对任意的 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，都有　(　　)

A. $\sin(\sin\theta)<\cos\theta<\cos(\cos\theta)$

B. $\sin(\sin\theta)>\cos\theta>\cos(\cos\theta)$

C. $\sin(\cos\theta)<\cos(\sin\theta)<\cos\theta$

D. $\sin(\cos\theta)<\cos\theta<\cos(\sin\theta)$

解析 (极限法)当 $\theta\to0$ 时，$\sin(\sin\theta)\to0$，$\cos\theta\to1$，$\cos(\cos\theta)\to\cos1$，排除 A、B；

当 $\theta\to\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos(\sin\theta)\to\cos1$，$\cos\theta\to0$，排除 C，故选 D.

【答案】 D

点拨 本题直解法很麻烦，要利用正余弦函数的单调性和分段讨论，直解法不亚于一道大题，而利用极限法不仅简单易算，而且能训练同学们的解题思路.

【小结】 极限法作为“验证法”的补充有其特殊的作用，虽然有点近似“验证法”，但与“验证法”完全不同，“验证法”求得的是确定的值，而“极限法”是极限值.用极限代替定值，要注意两者之间的区别与联系，这样才能更好地掌握这些方法和技巧.

方法四 特征法

方法指导

认真理解题意，抓住题干所提供的结构特征、数值特征、位置特征、对象特征，进行大跨度、粗线条的计算或推理，从而肯定1支或否定3支.

典例调研

典例13 已知 m 为非零常数，对 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+m)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 恒成立，则 $f(x)$ 的最小正周期是 ( )

A. m　　B. $2m$

C. $3m$　　D. $4m$

解析 (特征法)取特征结构 $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$，所以设 $f(x)=\tan x$，此时 $m=\dfrac{\pi}{4}$，则 $f(x)=\tan x$ 的最小正周期 $T=\pi=4m$，选 D.

(直解法)由已知可得

$$f(x+2m)=f[(x+m)+m]=\frac{1+f(x+m)}{1-f(x+m)}=\frac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)},$$

则 $f(x+4m)=-\dfrac{1}{f(x+2m)}=f(x)$，

所以 $T=4m$，选 D.

【答案】D

典例14 (安徽高考题)定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是奇函数又是周期函数，T 是它的一个正周期，若将方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-T,T]$ 上根的个数记为 n，则 n 可能为 ( )

A. 0　　B. 1

C. 3　　D. 5

解析 (特征法)取符合题意的特征函数 $f(x)=\sin x$，则 $T=2\pi$，在 $[-2\pi,2\pi]$ 内，方程 $\sin x=0$ 有5个根，因为“有且只有一个选项正确”，故选 D.

(直解法)由 $f(x)$ 是一个 $\mathbf{R}$ 上的奇函数知 $f(0)=0$，再由 $f(x)$ 是一个周期函数可得 $f(x+T)=f(x)=f(x-T)$，令 $x=0$ 得 $f(T)=f(-T)=f(0)=0$，否定了 A、B；再由 $-f\left(\dfrac{T}{2}\right)=f\left(-\dfrac{T}{2}\right)=f\left(-\dfrac{T}{2}+T\right)=f\left(\dfrac{T}{2}\right)$ 得 $f\left(\dfrac{T}{2}\right)=f\left(-\dfrac{T}{2}\right)=0$，故选 D.

【答案】D

点拨 抽象函数问题对同学们来说是最棘手的，必须对函数的概念及性质有深刻的认识才找得到解题的突破口，本题还要对奇偶性和周期性的数式变换非常熟练才能构建所需要的恒等式；但利用特征法只要对正弦函数有基本的认识就可以求解.

典例15 $\triangle ABC$ 的三个顶点在椭圆 $4x^2+5y^2=6$ 上，其中 A,B 两点关于原点 O 对称，设直线 AC 的斜率为 k_1，直线 BC 的斜率为 k_2，则 k_1k_2 的值为 ( )

A. $-\dfrac{5}{4}$　　B. $-\dfrac{4}{5}$

C. $\dfrac{4}{5}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

解析 (特征法)取符合题意的特征位置，即 A,B 分别为椭圆的长轴上的两个顶点，C 为短轴上的一个顶点，则 $A\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},0\right)$，$B\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},0\right)$，$C\left(0,\dfrac{\sqrt{30}}{5}\right)$，计算得 $k_1k_2=-\dfrac{4}{5}$，选 B.

【答案】B

点拨 本题直解法有很多思路，但都有大量的运算. 利用特征法就极大地简化了过程. 省去了“标准答案”中提供的设置未知数及产生的庞大计算量.

方法五　逻辑法

方法指导

对选择支之间的逻辑关系先做分析，弄清各个选择支之间是否存在同一关系、从属关系、交叉关系、矛盾关系、对立关系等，若 $A\Rightarrow B$，则 A 必假，若 $A\Leftrightarrow B$，则 A,B 都假，若 A 与 B 是对立的关系或矛盾的关系，其中必有一真，从而 C,D 必假. 通过这些关系否定诱误支，肯定正确支，是一种快速解答选择题的特有方法.

典例调研

典例16 （江西高考题）已知向量 $\boldsymbol{m}=(2,1)$，使其与 $\boldsymbol{n}=(a,a^2-3)$ 的夹角为钝角的一个充分而不必要条件 a 的取值范围为　（　　）

A. $(-3,-\frac{3}{2})\cup(-\frac{3}{2},1)$

B. $(-3,2)$

C. $(-3,1)$

D. $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$

解析 （逻辑法）显然 D 是 A、B、C 的真子集，因为只有一个选项正确，所以选 D.

（直解法）由 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 的夹角为钝角可得 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}<0$ 且 $\boldsymbol{m}\neq k\boldsymbol{n}(k<0)$，

即 $2a+a^2-3<0$ 且 $a\neq2(a^2-3)$，得 $-3<a<1$ 且 $a\neq-\frac{3}{2}$.

所以 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 的夹角为钝角的充要条件是 A，所以正确选项一定是 A 的真子集，观察选项，选 D.

【答案】 D

典例17 设函数 $f(x)=a^{-|x|}(a>0)$，且 $f(2)=4$，则　（　　）

A. $f(-1)>f(-2)$　　B. $f(1)>f(2)$

C. $f(2)<f(-2)$　　D. $f(-3)>f(-2)$

解析 （逻辑法）因为 $|-x|=|x|$，所以 $f(x)=a^{-|x|}(a>0)$ 是偶函数，则 $f(-1)=f(1)$，$f(-2)=f(2)$，故 A、B 等价，排除 A、B. 又 C 明显错误，故选 D.

（直解法）由已知可得 $a^{-|2|}=4$，得 $a=\frac{1}{2}$. 又 $f(-x)=f(x)$，所以 $y=f(x)$ 是偶函数；当 $x>0$ 时，$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x$ 是增函数，则 $f(-2)=f(2)>f(1)=f(-1)$，故排除 A、B、C；由 $f(-3)=f(3)>f(2)=f(-2)$，选 D.

【答案】 D

典例18 （江苏高考题）关于实数 a,b 的下列 4 个关系式中，有且只有一个是正确的，这个正确的关系式只可能是　（　　）

A. $|a|<1$ 或 $|b|<1$　　B. $|a|>1$ 且 $|b|>1$

C. $|a+b|<|1+ab|$　　D. $|a|+|b|<2$

解析 若用直解法，题干无任何条件！无法作出选择. 所以必须对 4 个选择支进行分析：

若 C 真 $\Leftrightarrow(a^2-1)(b^2-1)>0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}|a|>1,\\|b|>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|a|<1,\\|b|<1.\end{cases}$ 若 $\begin{cases}|a|>1,\\|b|>1,\end{cases}$ 则 B 真，从而 C、B 同真；若 $\begin{cases}|a|<1,\\|b|<1,\end{cases}$ 则 $|a|+|b|<2$，则 C、D 同真. 所以 C 假. 若 B 真，则 C 也真，所以 B 假. 若 D 真，则 A 也真，所以 D 假. 故选 A.

【答案】 A

点拨 这是一道只能用逻辑法解决的典型例题，也可以看出逻辑法在高考试题中的深度.

方法六 估值法

方法指导

有些问题,由于受条件限制,无法(有时也没有必要)进行精确的运算和判断,所以只能依赖于估算,它以正确的算理为基础,通过合理的观察、比较、判断、推理,从而做出正确的选择.估算省去了很多推导过程和比较复杂的计算,节省了时间,从而显得快捷.其应用广泛,它是人们发现问题、研究问题、解决问题的一种重要的运算方法.

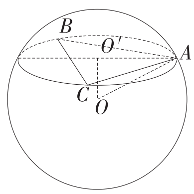
典例调研

典例19 已知过球面上 A,B,C 三点的截面和球心的距离等于球半径的一半,且 $AB=BC=CA=2$,则球面面积是 ( )

A. $\frac{16\pi}{9}$　　B. $\frac{8\pi}{3}$

C. 4π　　D. $\frac{64\pi}{9}$

解析 (估算法)设球的半径为 R,易知△ABC 的外接圆半径 $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,则 $S_{球}=4\pi R^2\geqslant 4\pi r^2=\frac{16}{3}\pi>5\pi$,只有 D 符合,故选 D.



(直解法)球心 O 与正三角形 ABC 形成一个正三棱锥,且球心在三角形 ABC 内的射影为三角形的重心,则 O',O,A 组成一个直角三角形,易求得球的半径为 $\frac{4}{3}$,故球的表面积为 $\frac{64\pi}{9}$.

【答案】 D

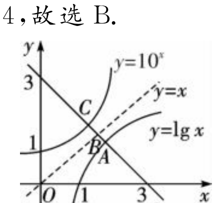
典例20 已知 x_1 是方程 $x+\lg x=3$ 的根,x_2 是方程 $x+10^x=3$ 的根,则 $x_1+x_2=$ ( )

A. 6　　B. 3

C. 2　　D. 1

解析 (估算法)因为 x_1 是方程 $x+\lg x=3$ 的根,所以 $2<x_1<3$,x_3 是方程 $x+10^x=3$ 的根,所以 $0<x_2<1$,所以 $2<x_1+x_2<4$,故选 B.

(直解法)如图,在同一坐标系中作出四个函数,$y=10^x$,$y=\lg x$,$y=3-x$,$y=x$ 的图象.



设 $y=3-x$ 与 $y=\lg x$ 的图象交于点 A,其横坐标为 x_1;$y=10^x$ 与 $y=3-x$ 的图象交于点 C,其横坐标为 x_2;$y=x$ 与 $y=3-x$ 的图象交于点 B,其横坐标为 $\frac{3}{2}$.

因为 $y=10^x$ 与 $y=\lg x$ 互为反函数,点 A 与点 C 关于直线 $y=x$ 对称,所以 $x_1+x_2=2\times\frac{3}{2}=3$,选 B.

【答案】 B

典例21 用 1,2,3,4,5 这五个数字,组成没有重复数的三位数,其中奇数共有 ( )

A. 36 个　　B. 60 个

C. 24 个　　D. 28 个

解析 (估算法)由于五个数字可组成 $A_5^3=60$(个)没有重复数字的三位数,而 5 个数字中,奇数有 3 个,偶数有两个,所求必然超过一半,C、D 都少于一半.故选 A.

(直解法)$A_5^3-2A_4^2=36$.

【答案】 A

【小结】 高考中对计算量大的题目,有时可以对数据进行粗略的估计从而得出正确的答案,特别是对选择题尤其有用,但一定要注意审题,观察选项之间的区别,并加以分析,才能确定正确选项.

估算法是根据变量的趋势或极值的取值情况进行求解的方法.当题目从正面解比较麻烦,特值法又无法确定正确的选项时常用估算法.

方法七　图象法

方法指导

严格地说,图象法并非属于选择题解题思路和方法的范畴,而是一种数形结合的解题思想和策略,但它在解有关选择题时非常简便有效,不过运用图象法解题一定要对有关函数图象、方程曲线、几何图形非常熟悉,特别是对于二元代数式的意义,如简单的线性规划中考点的考查,常常与截距、斜率、距离等有关,求解函数的零点、方程的根、两个函数图象的交点等问题中应用广泛.同学们熟练掌握几种二元代数式基本形式的几何意义是很有必要的.在作图时应尽量准确,对于同增或同减的两条曲线的交点问题是作图的一个难点,有时需要借助切线来准确判断,否则错误的图象反会导致错误的选择.

典例调研

典例22 (天津高考题)设两个向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda+2,\lambda^2-\cos^2\alpha)$,$\boldsymbol{b}=\left(m,\dfrac{m}{2}+\sin\alpha\right)$,其中 λ,m,α 为实数,若 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$,则$\dfrac{\lambda}{m}$的取值范围是　(　　)

A. $[-6,1]$　　B. $[4,8]$

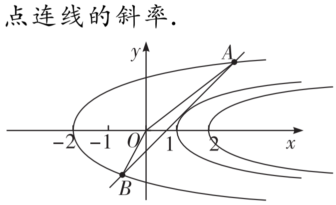
C. $(-\infty,1]$　　D. $[-1,6]$

解析 (图象法)为了大家的习惯,我们用 x 代替 m,用 y 代替 λ,

由 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$,得 $\begin{cases}y+2=2x,\\y^2-\cos^2\alpha=x+2\sin\alpha\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-2,\\y^2=x+2-(1-\sin\alpha)^2,\end{cases}$

则 (x,y) 就是直线与抛物线的交点,$\dfrac{y}{x}=k$ 就是此交点与原点连线的斜率.



由 $0\leqslant(1-\sin\alpha)^2\leqslant4$ 知,动抛物线从 $y^2=x-2$ 的位置从右往左平移,止于 $y^2=x+2$ 的位置,之间经历了与直线相离、相切、相交的三种关系,解方程组 $\begin{cases}y=2x-2,\\y^2=x+2,\end{cases}$ 得 $A(2,2)$,$B\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{3}{2}\right)$,故 k 的取值范围在 $k_{OB}=-6$,$k_{OA}=1$ 之间,所以 $k\in[-6,1]$,选 A.

(直解法)由 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$ 得 $\lambda+2=2m$,　①

$\lambda^2-\cos^2\alpha=m+2\sin\alpha$.　②

假设 $m=0$,

由①②可得 $\begin{cases}\lambda+2=0,\\\lambda^2-\cos^2\alpha=2\sin\alpha,\end{cases}$

消去 $\sin^2\alpha-2\sin\alpha+3=0$,

即 $(1-\sin\alpha)^2+2=0$,此式不成立,所以 $m\neq0$.

令 $\dfrac{\lambda}{m}=k(k\neq2)\Leftrightarrow\lambda=km$,

代入①②得 $\begin{cases}mk+2=2m(k\neq2),\\m^2k^2-1+\sin^2\alpha=m+2\sin\alpha,\end{cases}$

再消去 m 得 $\sin^2\alpha-2\sin\alpha+\dfrac{3k^2+6k-8}{(2-k)^2}=0$,

即$\dfrac{2(k^2+5k-6)}{(2-k)^2}=-(1-\sin\alpha)^2\leqslant0$.

所以 $-6\leqslant k\leqslant1$,选 A.

【答案】A

典例23 (山东高考题)设函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,$g(x)=ax^2+bx(a,b\in\mathbf{R},a\neq0)$.若 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象有且仅有两个不同的公共点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则下列判断正确的是 (　　)

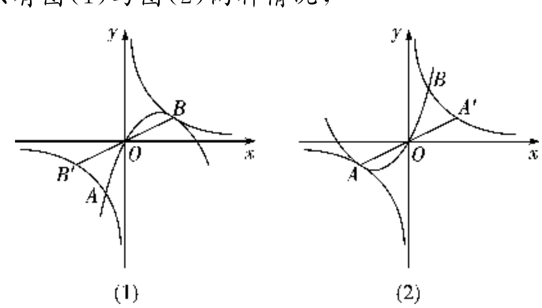
A. 当 $a<0$ 时,$x_1+x_2<0$,$y_1+y_2>0$

B. 当 $a<0$ 时,$x_1+x_2>0$,$y_1+y_2<0$

C. 当 $a>0$ 时,$x_1+x_2<0$,$y_1+y_2<0$

D. 当 $a>0$ 时,$x_1+x_2>0$,$y_1+y_2>0$

解析 方法一:由题意知满足条件的两函数图象只有图(1)与图(2)两种情况,

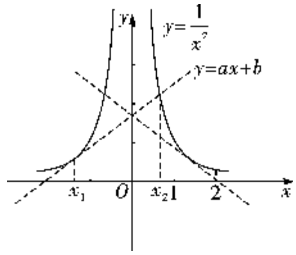


图(1)中,作 B 关于原点的对称点 B',据图可知,当 $a<0$ 时,$x_1+x_2>0$,$y_1+y_2<0$,故 B 正确.

图(2)中,作 A 关于原点的对称点 A',据图可知,当 $a>0$ 时,$x_1+x_2<0$,$y_1+y_2>0$,C,D 均错.

方法二：$\frac{1}{x}=ax^2+bx\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}=ax+b$，

分别作出 $y=\frac{1}{x^2}$ 和 $y=ax+b$ 的图象(如下图).



不妨设 $x_1<0,x_2>0$，当 $a>0$ 时，$x_1+x_2<0$，

$y_1+y_2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}>0$；

当 $a<0$ 时，$x_1+x_2>0$，$y_1+y_2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}<0$. 故选 B.

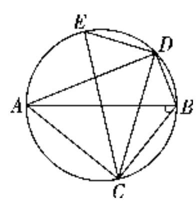
【答案】B

典例 24 (全国高考题)$\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cdot\cos 50°$的值为 ( )

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

解析 (图象法)从三角式的结构可以看出近似于余弦定理的形式，可以构建右边的图形.



设圆的直径 $AB=CE=1$，$\angle ABD=70°$，$\angle CBA=50°$，

所以在 Rt$\triangle ABD$ 中，$BD=\sin 20°$，

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$BC=\cos 50°$.

在$\triangle DBC$ 中，$\angle DBC=120°$，

$$DC^2=\sin^2 20°+\cos^2 50°-2\sin 20°\cos 50°\cos 120°$$
$$=\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50°.$$

在 Rt$\triangle CDE$ 中，$\angle CED=60°$，

$CD=CE\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50°=\frac{3}{4}$，选 C.

(直解法)

原式 $=\frac{1-\cos 40°}{2}+\frac{1+\cos 100°}{2}+\frac{1}{2}(\sin 70°-\sin 30°)$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(\cos 100°-\cos 40°)+\frac{1}{2}\sin 70°$

$=\frac{3}{4}-\sin 70°\sin 30°+\frac{1}{2}\sin 70°$

$=\frac{3}{4}$.

故选 C.

【答案】C

点拨 由于新课标教材没有和差化积公式，也没有积化和差公式，所以直解法对于大部分学生有困难，但利用代数式或三角式的几何意义，很容易构建三角形利用几何知识求解.

【小结】 利用函数图象解答有关问题时，要特别注意函数的奇偶性、单调性、极值、特殊点处的函数值等."数缺形时少直观，形少数时难入微"，对于一些具体几何背景的数学题，如能构造出与之相应的图形进行分析，则能在数形结合、以形助数中获得形象直观的解法.

抢分特训

特训 1 已知 $f_1(x)=\sin x+\cos x$，$f_{n+1}(x)$是 $f_n(x)$的导函数，即 $f_2(x)=f_1'(x)$，$f_3(x)=f_2'(x)$，…，$f_{n+1}(x)=f_n'(x)$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $f_{2\,016}(x)$等于 ( )

A. $-\sin x-\cos x$　　B. $\sin x-\cos x$

C. $-\sin x+\cos x$　　D. $\sin x+\cos x$

特训 2 斜率为 1 的直线 l 与椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 相交于 A,B 两点，则$|AB|$的最大值为 ( )

A. 2　　B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$　　D. $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

特训 3 整数数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，若此数列的前 800 项的和是 2 013，前 813 项的和是 2 000，则其前 2 015 项的和为 ( )

A. -13　　B. 15

C. 1 000　　D. 1 013

特训 4 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别是角 A,B,C 所对的边，B 是 A 和 C 的等差中项，则 $a+c$ 与 $2b$ 的大小关系是 ( )

A. $a+c<2b$　　B. $a+c>2b$

C. $a+c\geqslant 2b$　　D. $a+c\leqslant 2b$

特训 5 在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，若 $a_5a_6=9$，则 $\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{10}=$ ( )

A. 12　　B. 10

C. 8　　D. $2+\log_3 5$

特训 6 在下列四个函数中，满足性质"对于区间(1,2)上的任意 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，$|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$恒成立"的只有 ( )

A. $f(x)=\frac{1}{x}$　　B. $f(x)=|x|$