初中数学竞赛训练教程·重点高中提前批考试用书

主编◎徐淑慰　李德华　施央娣

培优竞赛新思维

- 专题归类　模块清晰
- 课时分解　覆盖全面
- 典例精讲　综合拓展
- 实战演练　巩固强化

数学

八年级

宁波出版社
NINGBO PUBLISHING HOUSE

初中数学竞赛训练教程 · 重点高中提前批考试用书

主编◎徐淑慰　李德华　施央娣

培优竞赛新思维

数学

八年级

宁波出版社
NINGBO PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

培优竞赛新思维. 数学八年级 / 徐淑慰，李德华，施央娣主编. —宁波：宁波出版社，2019.7
ISBN 978-7-5526-3407-5

Ⅰ. ①培… Ⅱ. ①徐… ②李… ③施… Ⅲ. ①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 262816 号

培优竞赛新思维·数学八年级
PEIYOU JINGSAI XINSIWEI·SHUXUE BANIANJI

主　　编	徐淑慰　李德华　施央娣
责任编辑	王蓓蕾　廖维勇
出版发行	宁波出版社
地址邮编	宁波市甬江大道 1 号宁波书城 8 号楼 6 楼　315040
网　　址	http://www.nbcbs.com
电　　话	0574－87287821(编辑室)　0574－87286804(发行部)
印　　刷	浙江开源印务有限公司
开　　本	889 毫米×1194 毫米　1/16
印　　张	11.75
字　　数	470 千
版　　次	2019 年 7 月第 1 版
印　　次	2019 年 7 月第 1 次印刷
标准书号	ISBN 978-7-5526-3407-5
定　　价	38.00 元

如发现缺页或倒装，影响阅读，请与承印厂联系调换　电话：0574－87638192

CONTENTS 目录

专题一　三角形

第1讲　全等三角形

重难点知识回顾

一、全等图形的概念

能够完全重合的两个图形称为全等图形.

全等图形的形状和大小都相同,这是全等图形的特征,只是形状相同而大小不同,或者面积相等但形状不同的两个图形都不是全等图形.

二、全等图形的性质及应用

1.性质:全等图形的形状和大小都相同.

2.应用:

(1)若事先知道两个图形全等,可得它们的大小相同,即知道其中一个的面积可知另一个的面积.

(2)可作为判断两个图形全等的依据,先看它们的形状是否相同,再看大小是否相等.

三、全等三角形的概念

能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形.

四、全等三角形的表示方法

符号"≌"读作"全等于",如$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$全等,表示为$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

注意:在写两个三角形全等时,通常把对应顶点的字母写在对应位置上,这样容易写出对应边、对应角.例如,$\triangle ABC$与$\triangle DFE$全等,其中点A与点D,点B与点F,点C与点E是对应顶点,记作"$\triangle ABC \cong \triangle DFE$",而不写作"$\triangle ABC \cong \triangle EFD$".

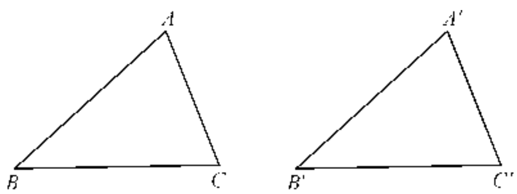
五、全等三角形的性质

性质:全等三角形的对应边相等,对应角相等.

如图,$\because \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$,

$\therefore \angle A=\angle A'$,$\angle B=\angle B'$,$\angle C=\angle C'$,

$AB=A'B'$,$AC=A'C'$,$BC=B'C'$.



六、对应边与对边、对应角与对角的区别

对应边、对应角是对两个三角形而言的,指两条边、两个角的关系;而对边、对角是对同一个三角形中边和角的关系而言的,对边是指角的对边,对角是指边的对角.

七、找对应边、对应角通常有以下几种方法

1.全等三角形对应角所对的边是对应边,两个对应角所夹的边是对应边.

2.全等三角形对应边所对的角是对应角,两条对应边所夹的角是对应角.

3.有公共边的,公共边是对应边.

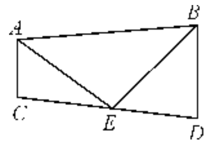
4.有公共角的,公共角是对应角.

5.有对顶角的,对顶角是对应角.

6.两个全等三角形中一对最长边(或最大角)是对应边(或对应角),一对最短边(或最小角)是对应边(或对应角).

典型例题

例1 如图,已知 $AC\parallel BD$,EA,EB 分别平分 $\angle CAB$,$\angle DBA$,边 CD 过点 E.求证:$AB=AC+BD$.

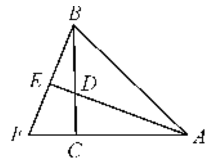


(例 1)

证明:在 AB 上截取 AF,使 $AF=AC$,连结 EF,则 $\triangle ACE\cong\triangle AFE$,$\therefore\angle AFE=\angle C$.由于 $\angle C$ 与 $\angle D$ 互补,$\angle AFE$ 与 $\angle BFE$ 互补,$\therefore\angle BFE=\angle D$.$\because\angle FBE=\angle DBE$,$BE=BE$,$\therefore\triangle FBE\cong\triangle DBE$,$\therefore BF=BD$.从而可得 $AB=AC+BD$.

例2 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$AC=BC$,$\angle ACB=90^\circ$,AD 平分 $\angle BAC$,$BE\perp AD$ 交 AC 的延长线于点 F,且点 E 为垂足,则结论:①$AD=BF$;②$CF=CD$;③$AC+CD=AB$;④$BE=CF$;⑤$BF=2BE$,其中正确结论的个数是 ( )

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

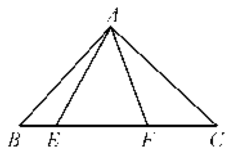


(例 2)

答案:D　**解析**:在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCF$ 中,$\because AC=BC$,$\angle ACB=\angle BCF=90^\circ$,又 $\because AE\perp BF$,$\therefore\angle CAD+\angle CDA=\angle BDE+\angle CBF=90^\circ$.$\because\angle CDA=\angle BDE$,$\therefore\angle CAD=\angle CBF$,$\therefore\triangle ACD\cong\triangle BCF$($ASA$),$\therefore AD=BF$,$CD=CF$.$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,$\therefore\angle BAE=\angle FAE$.$\because\angle AEB=\angle AEF=90^\circ$,$AE=AE$,$\therefore\triangle ABE\cong\triangle AFE$($ASA$),$\therefore AB=AF$,$BE=EF$,$\therefore AC+CD=AC+CF=AF=AB$,$BF=2BE$.

而图中 $BE\neq CF$,否则 $\angle CBF=30^\circ$,而题设中没有这样的条件.综上可知①②③⑤正确,④不正确,应选 D.

例3 如图,已知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,$\angle BAC=90^\circ$,点 E,F 是 BC 边上的两点,且 $\angle EAF=45^\circ$.求证:$BE^2+CF^2=EF^2$.



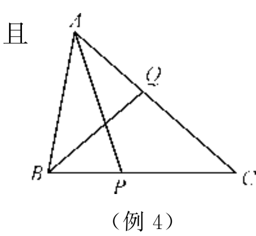
(例 3)

证明:过点 C 作 $CD\perp BC$,且 $CD=BE$,连结 AD,FD,$\because AB=AC$,$\angle B=\angle ACB=\angle ACD=45^\circ$,$\therefore\triangle ABE\cong\triangle ACD$,$\therefore AE=AD$,$\angle EAD=\angle BAC=90^\circ$.$\because\angle EAF=45^\circ$,$\therefore\angle FAD=45^\circ$,$\therefore\angle EAF=\angle FAD$,$\therefore\triangle AEF\cong\triangle ADF$,$\therefore EF=DF$,$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle DFC$ 中,$FC^2+DC^2=FD^2$,即 $BE^2+CF^2=EF^2$.

例4 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=60^\circ$,$\angle ACB=40^\circ$,P,Q 分别在边 BC,CA 上,并且 AP,BQ 分别是 $\angle BAC$,$\angle ABC$ 的角平分线.求证:

(1)$BQ=CQ$.

(2)$BQ+AQ=AB+BP$.



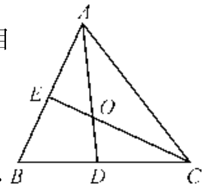
(例 4)

解析:(1)$\because BQ$ 是 $\angle ABC$ 的角平分线,$\therefore\angle QBC=\frac{1}{2}\angle ABC$.$\because\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=180^\circ$,且 $\angle BAC=60^\circ$,$\angle ACB=40^\circ$,$\therefore\angle ABC=80^\circ$,$\therefore\angle QBC=\frac{1}{2}\times80^\circ=40^\circ$,$\therefore\angle QBC=\angle C$,$\therefore BQ=CQ$.

(2)延长 AB 至点 M,使得 $BM=BP$,连结 MP.$\because\angle ABC=\angle M+\angle BPM$,又 $\because\angle M=\angle BPM$,$\therefore\angle M=\angle BPM=40^\circ=\angle C$.$\because AP$ 平分 $\angle BAC$,$\therefore\angle MAP=\angle CAP$,在 $\triangle AMP$ 和 $\triangle ACP$ 中,

$\because \begin{cases} \angle M=\angle C, \\ AP=AP, \\ \angle MAP=\angle CAP, \end{cases}$ $\therefore \triangle AMP\cong\triangle ACP(AAS)$，$\therefore AM=AC$. $\because AM=AB+BM=AB+BP$，$AC=AQ+QC=AQ+BQ$，$\therefore AB+BP=AQ+BQ$.

例5　如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=60^\circ$，AD，CE分别平分$\angle BAC$，$\angle ACB$，且AD，CE相交于点O. 求证：$AC=AE+CD$.



（例 5）

证明：在AC上截取$CF=CD$，连结OF. $\because CE$平分$\angle ACB$，$\therefore \angle FCO=\angle DCO$. $\because OC=OC$，$\therefore \triangle ODC\cong\triangle OFC(SAS)$，$\therefore \angle COD=\angle COF$. $\because \angle ABC=60^\circ$，$AD$，$CE$分别平分$\angle BAC$，$\angle ACB$，$\therefore \angle AOC=120^\circ$，$\therefore \angle COD=60^\circ$，$\therefore \angle COF=\angle AOF=\angle AOE=60^\circ$. 在$\triangle AEO$和$\triangle AFO$中，$\because \angle EAO=\angle FAO$，$\angle AOE=\angle AOF$，$AO=AO$，$\therefore \triangle AEO\cong\triangle AFO(ASA)$，$\therefore AE=AF$. $\because AC=AF+CF$，$\therefore AC=AE+CD$.

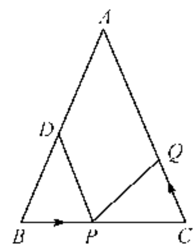
例6　如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=10$厘米，$BC=8$厘米，点D为AB的中点.

(1)如果点P在线段BC上以3厘米/秒的速度由点B向点C运动，同时，点Q在线段CA上由点C向点A运动.

①若点Q的运动速度与点P的运动速度相等，则经过1秒后，$\triangle BPD$与$\triangle CQP$是否全等？若全等，请说明理由.

②若点Q的运动速度与点P的运动速度不相等，则当点Q的运动速度为多少时，能够使$\triangle BPD$与以C，Q，P三点为顶点的三角形全等？

(2)若点Q以②中的运动速度从点C出发，点P以原来的运动速度从点B同时出发，都按逆时针沿$\triangle ABC$三边运动，求经过多长时间点P与点Q第一次在$\triangle ABC$的哪条边上相遇？



（例 6）

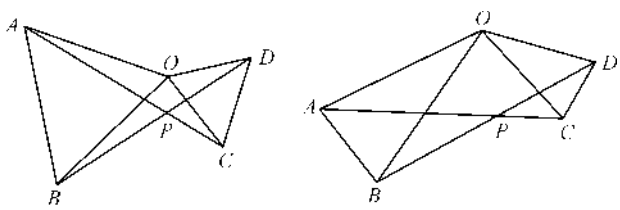
解析：(1)①$\because t=1$ s，$\therefore BP=CQ=3\times1=3$(cm). $\because AB=10$ cm，点D为AB的中点，$\therefore BD=5$ cm. 又$\because PC=BC-BP$，$BC=8$ cm，$\therefore PC=8-3=5$(cm)，$\therefore PC=BD$. 又$\because AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle C$，$\therefore \triangle BPD\cong\triangle CQP$. ②$\because v_P\neq v_Q$，$\therefore BP\neq CQ$，又$\because \triangle BPD$与以$C$，$Q$，$P$三点为顶点的三角形全等，$\angle B=\angle C$，$\therefore BP=PC=4$ cm，$CQ=BD=5$ cm，$\therefore$点P，点Q运动的时间$t=\dfrac{BP}{3}=\dfrac{4}{3}$(s)，$\therefore v_Q=\dfrac{CQ}{t}=\dfrac{5}{\frac{4}{3}}=\dfrac{15}{4}$(cm/s).

(2)设经过x秒后点P与点Q第一次相遇，由题意，得$\dfrac{15}{4}x=3x+2\times10$，解得$x=\dfrac{80}{3}$. $\therefore$点P共运动了$\dfrac{80}{3}\times3=80$(cm)，$\because 80=2\times28+24$，$\therefore$经过$\dfrac{80}{3}$ s点P与点Q第一次在边AB上相遇.

例7　已知：在$\triangle AOB$和$\triangle COD$中，$OA=OB$，$OC=OD$.

(1)如图①，若$\angle AOB=\angle COD=60^\circ$，求证：①$AC=BD$. ②$\angle APB=60^\circ$.

(2)如图②，若$\angle AOB=\angle COD=\alpha$，则$AC$



图①　　图②

（例 7）

与 BD 间的数量关系式为________，$\angle APB$ 的大小为________(直接写出结果，不证明).

解析:(1)①证明：$\because \angle AOB=\angle COD=60^\circ$，$\therefore \angle AOB+\angle BOC=\angle COD+\angle BOC$，$\therefore \angle AOC=\angle BOD$.

在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOD$ 中，$\begin{cases} AO=BO, \\ \angle AOC=\angle BOD, \\ OC=OD, \end{cases}$ $\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD(SAS)$，$\therefore AC=BD$.

②证明：$\because \triangle AOC \cong \triangle BOD$，$\therefore \angle OAC=\angle OBD$，$\therefore \angle OAC+\angle AOB=\angle OBD+\angle APB$，$\therefore \angle OAC+60^\circ=\angle OBD+\angle APB$，$\therefore \angle APB=60^\circ$.

(2)$AC=BD$，$\angle APB=\alpha$.

例8 已知下列四个判断：

(1)有两边及其中一边上的高对应相等的两个三角形全等.

(2)有两边及第三边上的高对应相等的两个三角形全等.

(3)三角形6个边、角元素中，有5个元素分别相等的两个三角形全等.

(4)一边及其他两边上的高对应相等的两个三角形全等.

上述判断是否正确？若正确，说明理由；若不正确，请举出反例.

解析:判断(1)(2)(3)(4)都不正确.

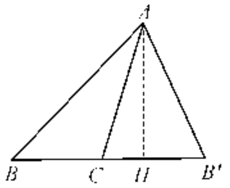
判断(1)的反例：如答图①，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AB'C$ 中，AH 为高，$AC=AC$，$BC=B'C$，$AH=AH$，但这两个三角形不全等.

判断(2)的反例：如答图②，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABC'$ 中，AH 为高，$AB=AB$，$AC=AC'$，$AH=AH$，但两个三角形不全等.

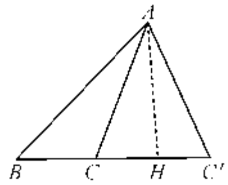
判断(3)的反例：设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $AB=16$，$AC=24$，$BC=36$；$\triangle A'B'C'$ 的三边长分别为 $A'B'=24$，$A'C'=36$，$B'C'=54$，由于 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的对应边成比例，故 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，从而它们有5个边、角元素分别相等：$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，$AC=A'B'$，$BC=A'C'$，但它们不全等.

判断(4)的反例：如答图③，在 $\triangle ABC$ 中，AD，BE 分别是边 BC，AC 上的高，作 $\angle BAF=\angle BAC$，且 $BF \perp AF$，延长 BC，FA 交于点 C'，则高 $BF=BE$，$AD=AD$，又 $AB=AB$，但 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABC'$ 不全等.

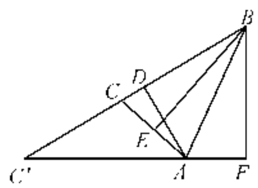
综上所述，题中四个判断都不正确.



(答图①)



(答图②)



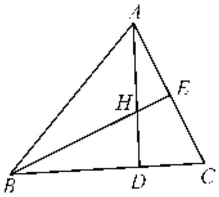
(答图③)

实战演练

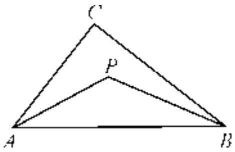
A组

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=45^\circ$，$AC=4$，点 H 是高 AD 和 BE 的交点，则线段 BH 的长度为 ( )

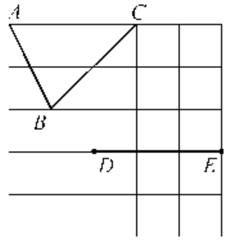
A. $\sqrt{6}$　　B. 4　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 5



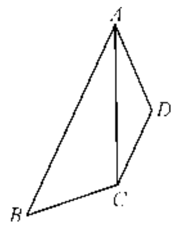
（第 1 题）



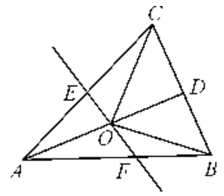
（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）



（第 5 题）

2. 如图，已知△ABC，求作一点 P，使点 P 到∠A 两边的距离相等，且 $PA=PB$，下列确定点 P 的方法中正确的是　（　　）

A. P 为∠A，∠B 两角平分线的交点

B. P 为∠A 的平分线与 AB 的垂直平分线的交点

C. P 为 AC，AB 两边上的高的交点

D. P 为 AC，AB 两边的垂直平分线的交点

3. 如图是 5×5 的正方形网格，以点 D，E 为两个顶点作位置不同的格点三角形，使所作的格点三角形与△ABC 全等，这样的格点三角形最多可以画出　（　　）

A. 2 个　　B. 4 个　　C. 6 个　　D. 8 个

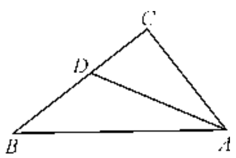
4. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 平分∠BAD，$AB>AD$，则下列结论正确的是　（　　）

A. $AB-AD>BC-CD$　　B. $AB-AD=BC-CD$

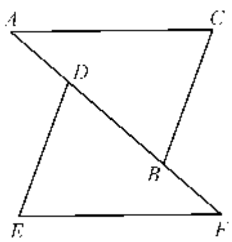
C. $AB-AD<BC-CD$　　C. $AB-AD$ 与 $BC-CD$ 的大小关系不能确定

5. 如图，在△ABC 中，$AB=AC$，D 是 BC 中点，AC 的垂直平分线分别交 AC，AD，AB 于点 E，O，F，则图中全等三角形有　（　　）

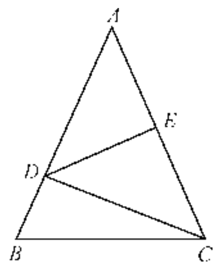
A. 1 对　　B. 2 对　　C. 3 对　　D. 4 对



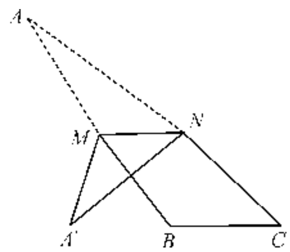
（第 6 题）



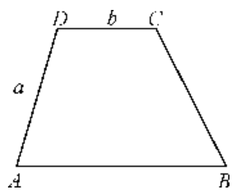
（第 7 题）



（第 8 题）



（第 9 题）



（第 10 题）

6. 如图，已知∠$C=90°$，AD 为△ABC 的角平分线，$BC=40$，$AB=50$，若 $BD:DC=5:3$，则△ADB 的面积为________.

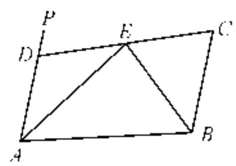
7. 如图，已知 $AC=FE$，$BC=DE$，点 A，D，B，F 在一条直线上，要使△ABC≌△FDE，还需添加一个条件，这个条件可以是________.

8. 如图，已知 $AB=AC$，AC 的中垂线 DE 交 AB 于点 D，$BC=6$，△CDB 的周长为 15，则 $AC=$________.

9. 如图，将△ABC 沿它的中位线 MN 折叠后，点 A 落在点 A' 处，若∠$A=28°$，∠$B=120°$，则∠$A'NC=$________.

10. 如图，已知 $AB\parallel CD$，∠$D=2$∠B，设 $AD=a$，$CD=b$，则 $AB=$________.

11. 如图，已知 $AP\parallel BC$，∠PAB 的平分线与∠CBA 的平分线相交于点 E，CE 的延长线交 AP 于点 D，已知 $AD=4$，$BC=6$，求 AB 的长.

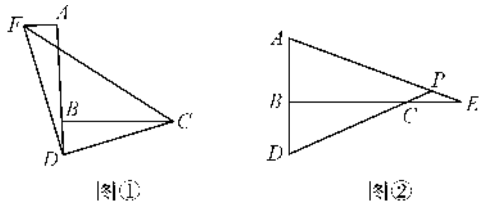


（第 11 题）

12. 如图，已知$\angle ABC=90^\circ$，D是直线AB上的一点，$AD=BC$.

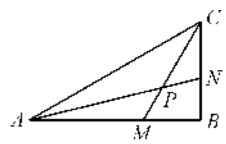
(1)如图①，过点A作$AF\perp AB$，并截取$AF=BD$，连结DC，DF，CF，判断$\triangle CDF$的形状并证明.

(2)如图②，E是直线BC上的一点，且$CE=BD$，直线AE，CD相交于点P，请问$\angle APD$的度数是一个固定的值吗？若是，请求出它的度数；若不是，请说明理由.



（第12题）

13. 如图，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle B=90^\circ$，点M在边AB上，且$AM=BC$，点N在边BC上，且$CN=BM$，连结AN，CM相交于点P，求$\angle APM$的度数.

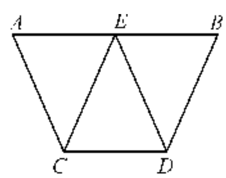


（第13题）

14. 如图，已知$AB\parallel CD$，E是AB的中点，$CE=DE$. 求证：

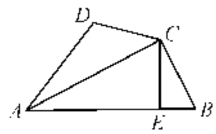
(1)$\angle AEC=\angle BED$.

(2)$AC=BD$.



（第14题）

15. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，AC 平分 $\angle BAD$，过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，并且 $AE=\frac{1}{2}(AB+AD)$，求 $\angle ABC+\angle ADC$ 的度数.

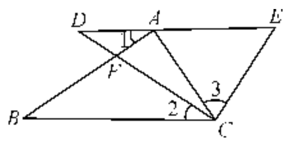


（第 15 题）

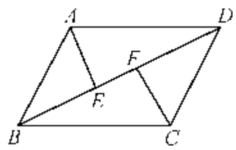
B 组

16. 如图，已知点 A 在 DE 上，点 F 在 AB 上，且 $AC=CE$，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，则 DE 等于　　（　　）

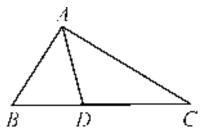
A. CD　　B. BC　　C. AB　　D. $AE+AC$



（第 16 题）



（第 17 题）



（第 18 题）

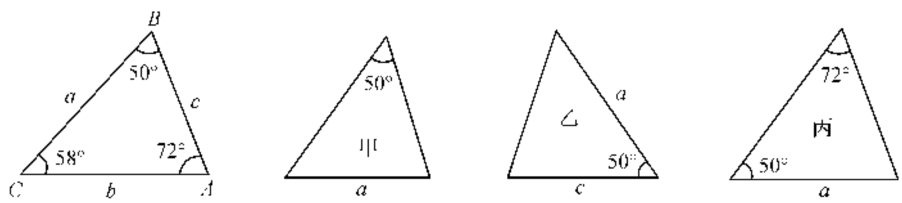
17. 如图，已知 $AB=CD$，$AE\perp BD$ 于点 E，$CF\perp BD$ 于点 F，$AE=CF$，则图中的全等三角形有　　（　　）

A. 1 对　　B. 2 对　　C. 3 对　　D. 4 对

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$\angle B=2\angle C$，点 D 在边 BC 上，AD 平分 $\angle BAC$，若 $AB=1$，则 BD 的长为　　（　　）

A. $\sqrt{3}-1$　　B. $2\sqrt{3}-2$　　C. $\sqrt{2}-1$　　D. $2\sqrt{2}-2$

19. 如图，已知 $\triangle ABC$ 的六个元素，则下列甲、乙、丙三个三角形中和 $\triangle ABC$ 全等的图形是　　（　　）

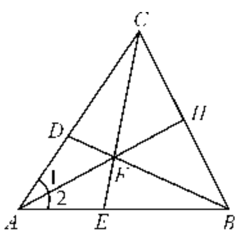


（第 19 题）

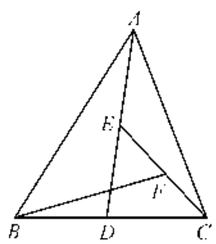
A. 甲、乙　　B. 甲、丙　　C. 乙、丙　　D. 乙

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，E，D 分别是边 AB，AC 上的点，BD，CE 相交于点 F，AF 的延长线交 BC 于点 H，若 $\angle 1=\angle 2$，$AE=AD$，则图中的全等三角形共有　　（　　）

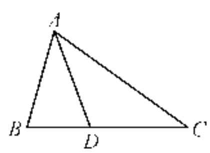
A. 3 对　　B. 5 对　　C. 6 对　　D. 7 对



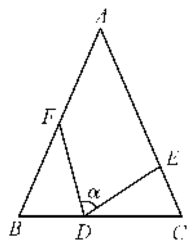
（第 20 题）



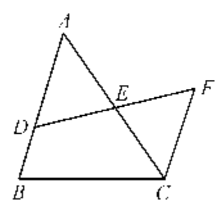
（第 21 题）



（第 22 题）



（第 23 题）



（第 25 题）

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D，E，F 分别为 BC，AD，CE 的中点，若 $S_{\triangle BFC}=1$，则 $S_{\triangle ABC}=$________.

22. 如图,在$\triangle ABC$中,$\angle BAC$的平分线交BC于点D,若$AC=AB+BD$,$\angle C=35^\circ$,则$\angle B$的度数是________.

23. 如图,已知$\angle B=\angle C$,$BF=CD$,$BD=CE$,那么$\angle\alpha$与$\angle A$的关系为________________.

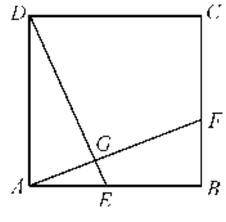
24. 在$\triangle ABC$中,$AB=5$,$AC=3$,则BC边上的中线AD的长的取值范围是________.

25. 如图,D是$\triangle ABC$的边AB上一点,DF交AC于点E,给出3个论断:①$DE=FE$;②$AE=CE$;③$FC\parallel AB$,以其中一个论断为结论,其余两个论断为条件,可得出3个命题,其中正确的命题个数是________.

26. 如图,在正方形$ABCD$中,点E,F分别在边AB,BC上,$AF=DE$,AF和DE相交于点G.

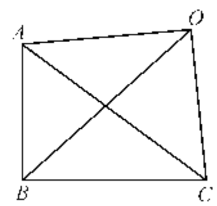
(1)观察图形,写出图中所有与$\angle AED$相等的角.

(2)选择图中与$\angle AED$相等的任意一个角,并加以证明.



(第26题)

27. 如图,在$Rt\triangle ABC$中,$\angle ABC=90^\circ$,$AB=3$,在$Rt\triangle AOC$中,$OA=OC$,$\angle AOC=90^\circ$,连结OB,设$OB=4\sqrt{2}$,求BC的长.



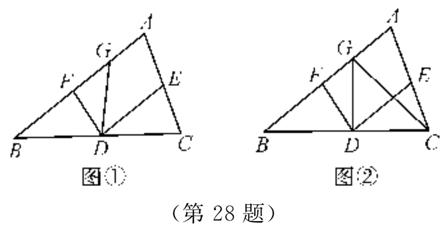
(第27题)

28. 如图①,在$\triangle ABC$中,D,E,F分别为三边的中点,点G在边AB上,$\triangle BDG$与四边形$ACDG$的周长相等,设$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$.

(1)求线段BG的长.

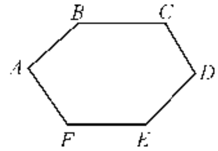
(2)求证:DG平分$\angle EDF$.

(3)连结CG,如图②,若$\triangle BDG$与$\triangle DFG$相似,求证:$BG\perp CG$.

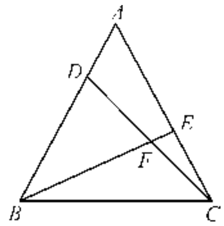


(第28题)

29. 如图，在六边形 $ABCDEF$ 中，$AB=BC=CD=DE=EF=FA$，且 $\angle A+\angle C+\angle E=\angle B+\angle D+\angle F$. 求证：$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$.


（第 29 题）

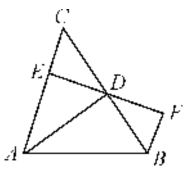
30. 如图，D，E 分别是等边 $\triangle ABC$ 的两边 AB，AC 上的点，且 $AD=CE$，BE 与 CD 相交于点 F，求 $\angle BFC$ 的度数.

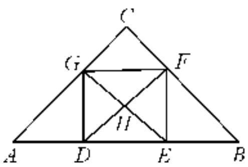

（第 30 题）

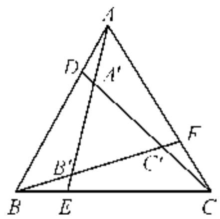
C 组

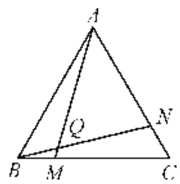
31. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE\perp AC$，垂足为 E，$BF\parallel AC$ 交 ED 的延长线于点 F，若 BC 恰好平分 $\angle ABF$，$AE=2BF$，给出下列四个结论：①$DE=DF$；②$DB=DC$；③$AD\perp BC$；④$AC=3BF$，其中正确的有（　　）

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个


（第 31 题）


（第 32 题）


（第 33 题）


（第 34 题）

32. 如图，$\triangle ABC$ 是一个等腰直角三角形，四边形 $DEFG$ 是其内接正方形，H 是正方形的对角线的交点，那么，由图中的线段所构成的三角形中相互全等的三角形的对数为（　　）

A. 12　　B. 13　　C. 26　　D. 36

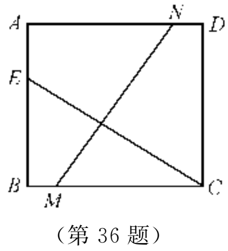
33. 如图，$\triangle ABC$ 为等边三角形，$AD=BE=CF$，D，E，F 不是中点，连结 AE，BF，CD，构成一些三角形，如果三个全等的三角形组成一组，那么图中全等的三角形的组数是（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

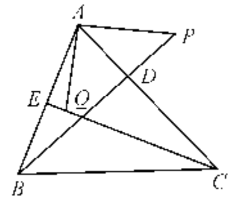
34. 如图，$\triangle ABC$ 为等边三角形，点 M，N 分别在边 BC，AC 上，且 $BM=CN$，BN 与 AM 相交于点 Q，则 $\angle BQM$ 的度数是________.

35. 在 $\triangle ABC$ 中，高 AD 和 BE 相交于点 H，且 $BH=AC$，则 $\angle ABC=$________.

36. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，$CE=MN$，已知 $\angle MCE=35°$，则 $\angle ANM$ 的度数是________.


（第 36 题）

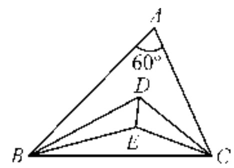
37. 如图,已知 BD,CE 分别是$\triangle ABC$ 中 AC,AB 边上的高,点 P 在 BD 的延长线上,$BP=AC$,点 Q 在 CE 上,$CQ=AB$,试探索线段 AP 与 AQ 的关系,并说明理由.



(第 37 题)

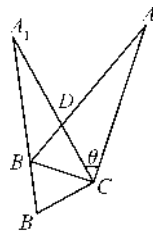
38. 设梯形两底边长为整数,求证:它可以分割为若干个彼此全等的三角形.

39. 如图,在$\triangle ABC$ 中,点 D,E 是$\angle ABC$,$\angle ACB$ 的三等分线的交点,连结 DE,当$\angle A=60°$时,求$\angle BDE$ 的度数.



(第 39 题)

40. 如图,在$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\angle A=\alpha$,以点 C 为中心将$\triangle ABC$ 旋转θ 角度到$\triangle A_1B_1C$ 的位置(旋转过程中保持$\triangle ABC$ 的形状、大小不变),点 B 恰好落在边 A_1B_1 上,试求旋转角 θ(用 α 表示).



(第 40 题)

第2讲　等腰三角形

重难点知识回顾

一、轴对称图形

1. 概念：如果把一个图形沿着一条直线折叠后，直线两侧的部分能互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴.

2. 性质：

(1)对称轴垂直平分连结两个对称点的线段.

(2)成轴对称的两个图形是全等图形.

二、等腰三角形的性质

1. 等腰三角形的两腰相等.

2. 等腰三角形的两个底角相等(在同一个三角形中，等边对等角).

3. 等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线和高线互相重合(简称等腰三角形三线合一).

三、等腰三角形的判定

1. 如果一个三角形的两条边相等，那么这个三角形是等腰三角形.

2. 如果一个三角形有两个角相等，那么这个三角形是等腰三角形(在同一个三角形中，等角对等边).

四、等边三角形的性质

1. 等边三角形的三条边相等，三个内角相等且等于$60°$.

2. 等边三角形顶角平分线、底边上的中线、底边上的高线互相重合.

3. 等边三角形是轴对称图形，有三条对称轴.

五、等边三角形的判定

1. 有三条边相等的三角形是等边三角形.

2. 三个角都相等的三角形是等边三角形.

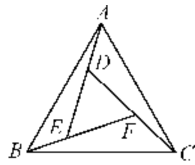
3. 有一个角是$60°$的等腰三角形是等边三角形.

解与等腰三角形相关的问题，全等三角形依然是重要的工具，但更多的是思考运用等腰三角形的特殊性质，这些性质为角度的计算、线段相等的证明、直线位置关系的证明等提供了新的理论依据.

寻找发现等腰三角形是解一些几何题的关键，判定一个三角形为等腰三角形的基本方法是：从定义入手，证明一个三角形的两条边相等；从角入手，证明一个三角形的两个角相等.实际解题中的一个常用技巧是构造等腰三角形，进而利用等腰三角形的性质为解题服务，常用的构造方法有：角平分线＋平行线；角平分线＋垂线；垂直平分线；三角形中角的两倍关系.

典型例题

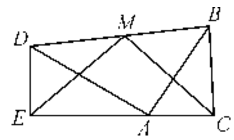
例1 如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，且 $\angle ABE=\angle BCF=\angle CAD$. 求证：$\triangle DEF$ 是等边三角形.



（例 1）

证明：$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore \angle BAC=\angle ABC=\angle ACB=60^\circ$，$AB=AC=BC$. $\because \angle ABE=\angle BCF=\angle CAD$，$\therefore \angle BAE=\angle CBF=\angle ACD$，$\therefore \triangle ABE\cong\triangle BCF\cong\triangle CAD$，$\therefore \angle AEB=\angle BFC=\angle CDA$，$\therefore \angle DEF=\angle EFD=\angle FDE$，$\therefore \triangle DEF$ 是等边三角形（三个角都相等的三角形是等边三角形）.

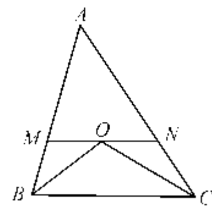
例2 将两个全等的含 30°，60° 角的三角板 ADE 和三角板 ABC 如图所示放置，E，A，C 三点在一条直线上，连结 BD，取 BD 的中点 M，连结 ME，MC，试判断 $\triangle EMC$ 的形状，并说明理由.



（例 2）

解析：$\triangle EMC$ 为等腰直角三角形. 理由如下：连结 AM，由题意得 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形，$\therefore \angle MDE=\angle MAC=105^\circ$，得 $\triangle EDM\cong\triangle CAM$，$\therefore \angle DME=\angle AMC$，$EM=MC$，又 $\because \angle DME+\angle EMA=90^\circ$，$\therefore \angle EMA+\angle AMC=\angle EMC=90^\circ$，故 $\triangle ECM$ 为等腰直角三角形.

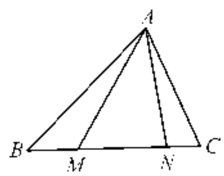
例3 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，BO 平分 $\angle CBA$，CO 平分 $\angle ACB$，M，N 分别为边 AB，AC 上的点，MN 过点 O 且 $MN\parallel BC$，设 $AB=12$，$AC=18$，求 $\triangle AMN$ 的周长.



（例 3）

解析：$\because MN\parallel BC$，$\therefore \angle OBC=\angle BOM$，$\because BO$ 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle OBC=\angle OBM$，$\therefore \angle BOM=\angle OBM$，$\therefore BM=OM$. 同理得 $ON=CN$，$\therefore AM+MN+AN=AM+OM+ON+AN=AM+BM+AN+CN=AB+AC=12+18=30$.

例4 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC$，M，N 为 BC 边上的两点，且 $\angle BAM=\angle CAN$，$MN=AN$，求 $\angle MAC$ 的度数.

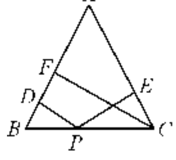


（例 4）

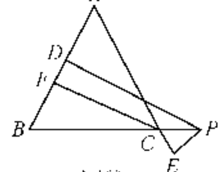
解析：设 $\angle BAM=\angle CAN=\alpha$，$\angle MAN=\beta$，$\angle ABC=\gamma$. $\because MN=AN$，$\therefore \angle AMN=\angle MAN=\beta$. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB=180^\circ$，由于 $\angle BCA=\angle CAB=2\alpha+\beta$，$\therefore 4\alpha+2\beta+\gamma=180^\circ$. 在 $\triangle ABM$ 中，$\beta=\alpha+\gamma$，$\therefore 4\alpha+2\beta+(\beta-\alpha)=180^\circ$，即 $3(\alpha+\beta)=180^\circ$，$\therefore \alpha+\beta=60^\circ$，故 $\angle MAC=60^\circ$.

例5 （1）如图①所示，在等腰 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，P 是 BC 上的一点，过点 P 作 $PD\perp AB$ 于点 D，$PE\perp AC$ 于点 E，过点 C 作 $CF\perp AB$ 于点 F. 求证：$PD+PE=CF$.

（2）如图②所示，若点 P 在 BC 的延长线上，那么 PD，PE 和 CF 存在什么关系？请写出你的猜想并加以证明.



图①



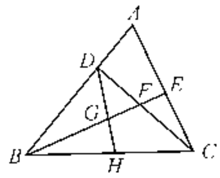
图②

（例 5）

（1）**证明**：连结 AP，则有面积关系：$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}$. 由面积公式得 $AB\cdot CF=AB\cdot PD+AC\cdot PE$. 又 $\because AB=AC$，$\therefore AB\cdot CF=AB(PD+PE)$，$\therefore PD+PE=CF$.

（2）**解析**：猜想“$PD=PE+CF$”. **证明如下**：连结 AP，则有面积关系 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAC}+S_{\triangle ACB}$，由面积公式得 $AB\cdot PD=AC\cdot PE+AB\cdot CF$，又∵$AB=AC$，∴$AB\cdot PD=AB(PE+CF)$，∴$PD=PE+CF$.

例6　如图，在△ABC 中，$\angle ABC=45°$，$CD\perp AB$，垂足为 D，BE 平分$\angle ABC$，且 $BE\perp AC$，垂足为 E，BE 与 CD 相交于点 F，点 H 是边 BC 的中点，连结 DH，与 BE 相交于点 G.



（例 6）

（1）求证：$BF=AC$.

（2）求证：$CE=\frac{1}{2}BF$.

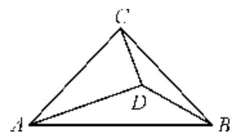
（3）CE 与 BG 的大小关系如何？试说明理由.

（1）**证明**：∵$\angle ABC=45°$，$CD\perp AB$，∴△BDC 为等腰直角三角形，∴$CD=BD$. 又∵$\angle BDF=\angle BEC=90°$，$\angle DFB=\angle EFC$，∴$\angle DBF=\angle DCA$. ∵$\angle ADC=\angle FDB=90°$，∴$\triangle BDF\cong\triangle CDA$，∴$BF=AC$.

（2）**证明**：∵BF 平分$\angle ABC$，∴$\angle ABE=\angle CBE$. 又∵$BE\perp AC$，∴$\angle AEB=\angle CEB=90°$. 又∵$BE=BE$，∴$\triangle BEA\cong\triangle BEC$，∴$CE=AE=\frac{1}{2}AC$. ∵$BF=AC$，∴$CE=\frac{1}{2}BF$.

（3）**解析**：连结 CG. ∵在等腰 Rt△BDC 中，点 H 为 BC 中点，∴DH 垂直平分 BC，∴$BG=CG$. 在 Rt△EGC 中，∵EC 为直角边，CG 为斜边，∴$CG>CE$，即 $BG>CE$.

例7　如图，在△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle CAD=30°$，$AC=BC=AD$. 求证：$BD=CD$.



（例 7）

证明：以 CD 为边在△ADC 内作等边△CDO，连结 AO，则$\triangle ACO\cong\triangle ADO$，∴$\angle OAC=\angle OAD=15°$. ∵$AC=AD$，∴$\angle ACD=\frac{1}{2}(180°-\angle CAD)=75°$，∴$\angle OCA=\angle ACD-\angle OCD=15°$，∴$\angle OAC=\angle OCA$，∴$AO=OC$，$\angle OCA=\angle DCB=15°$. 又∵$AC=BC$，$OC=DC$，∴$\triangle ACO\cong\triangle BCD$，∴$CD=OC=OA=BD$.

实战演练

A 组

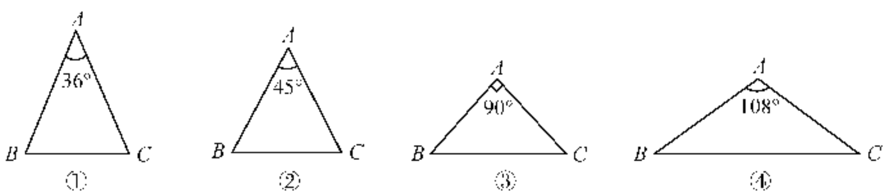
1. 在直角坐标系中，O 为坐标原点，已知 $A(1,1)$，在 x 轴上确定点 P，使△AOP 为等腰三角形，则符合条件的点 P 有　（　　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 若等腰三角形中有一个角等于 50°，则这个等腰三角形的顶角的度数为　（　　）

A. 50°　　B. 80°　　C. 65°或 50°　　D. 50°或 80°

3. 如图，在下列三角形中，若 $AB=AC$，则能被一条直线分成两个小等腰三角形的是　（　　）



（第 3 题）