高等教育公共基础课精品系列规划教材

线性代数及其应用（第2版）

主　编　王　艳

副主编　程　茜　杨　卫

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书以理论结合实际的方式，以解决问题为目标，全面地介绍线性代数的主要内容．全书共5章：第1章为行列式，重点介绍行列式的各种性质计算；第2章矩阵，基于矩阵的基础知识介绍矩阵的应用；第3章 n 维向量与线性方程组，通过案例阐述线性方程组在生产生活中的应用；第4章相似矩阵及二次型，重点讲授特征值、二次型等的应用；第5章线性规划的基本问题，着重介绍有关线性规划的一些基本概念、基本理论及求解线性规划问题的若干方法．本书除了教授常规的计算方法外，还在计算方面重点引入软件操作，希望学生能在这门课程中了解到软件在实际问题中是如何发挥作用的，并且提升学生的编程能力，提升学生在专业课程中的编程思维与逻辑思维．

在本教材的使用中，每章的上机部分在机房进行，教师引导学生对问题进行讨论，学生通过软件实现问题的解决．

版权专有　侵权必究

线性代数及其应用/王艳主编．—2版．—北京：北京理工大学出版社，2019.8

ISBN 978-7-5682-7439-5

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第174970号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司

社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号

邮　　编／100081

电　　话／（010）68914775（总编室）

（010）82562903（教材售后服务热线）

（010）68948351（其他图书服务热线）

网　　址／http：//www.bitpress.com.cn

经　　销／全国各地新华书店

印　　刷／

开　　本／787毫米×1092毫米　1/16

印　　张／12　　责任编辑／多海鹏

字　　数／283千字　　文案编辑／孟祥雪

版　　次／2019年8月第2版　2019年8月第1次印刷　　责任校对／周瑞红

定　　价／35.00元　　责任印制／李志强

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前　言

在科学技术飞速发展、知识更替日新月异的今天，希望、困惑和挑战等无时无刻不出现在我们的生活和学习当中．如何抓住机遇寻求发展？如何迎接挑战适应变化？最直接的办法就是学会学习，终身学习．

大学生的学习任务相当繁重，加上不断压缩的学时，使许多学生对所学的知识缺乏思考，难以深入理解，整体表现出一种浮躁的状态．如果再加之教材的理论过于深入，语言晦涩难懂，就更给学习者带来消极的影响．为了使学生真正掌握所学知识的内涵，把握知识点，了解重点、难点和解题思路，达到事半功倍的效果，我们结合在教学过程中的经验和全国乃至国外优秀教材的精华编写了本书．

线性代数是一门重要基础课，也是培养学生抽象思维和逻辑思维能力及空间想象能力的重要课程．是否全面系统地理解和掌握它的基本内容将直接影响到后续课程的学习．

线性代数的特点是高度抽象并且概括性强，具有严密的逻辑性和独特的公式语言的特点．为了帮助学生更好地学习线性代数，本书虽然围绕着线性代数教学大纲的基本要求展开，但在内容安排、形式体例、行文风格等方面都做了调整，注意表述的清晰与逻辑的严密，同时注重语言的通俗易懂．每一章用一个实际问题引入并展开知识点的讲解，最后又回到开始的实际问题进行全面的讲解，同时引入软件求解的内容，让学生在掌握基本求解方法的同时学会在现实生活中利用软件求解实际问题．

本书还配备练习题，学生可通过知识回顾、课堂练习和课后作业、章节测试对本书设计的知识点进行学习．

本书由王艳主编，其编写第 1 章，程茜编写第 3、4 章，杨卫编写第 2、5 章．

由于编者水平有限，书中难免有疏漏或是不妥之处，欢迎读者批评指正．

编　者

目 录

第 1 章　行列式 …… (1)

1.1　二阶与三阶行列式 …… (2)

1.1.1　引例 …… (2)

1.1.2　二阶与三阶行列式定义及其计算 …… (2)

1.2　全排列及其逆序数 …… (5)

1.3　n 阶行列式的定义 …… (7)

1.4　特殊行列式 …… (10)

1.5　行列式的性质及应用 …… (12)

1.5.1　行列式的性质 …… (12)

1.5.2　利用性质计算行列式 …… (14)

1.6　行列式按行（列）展开 …… (16)

1.6.1　子式、余子式与代数余子式 …… (16)

1.6.2　行列式展开定理 …… (17)

1.7　行列式的计算 …… (19)

1.7.1　直接利用行列式定义计算 …… (19)

1.7.2　利用行列式的性质化成三角形行列式计算 …… (20)

1.7.3　利用行列式按行（列）展开定理计算 …… (20)

1.8　克莱姆法则 …… (22)

1.9　软件应用 …… (24)

习题 …… (26)

第 2 章　矩阵 …… (30)

2.1　矩阵的概念及介绍 …… (31)

2.1.1　矩阵的概念 …… (31)

2.1.2　几种特殊的矩阵 …… (32)

2.2　矩阵的运算 …… (33)

2.2.1 矩阵相等 …… (33)
2.2.2 矩阵加法 …… (33)
2.2.3 数乘矩阵 …… (34)
2.2.4 矩阵乘法 …… (34)
2.2.5 矩阵转置 …… (36)
2.2.6 方阵的行列式 …… (38)
2.2.7 伴随矩阵 …… (39)
2.3 逆矩阵 …… (41)
2.3.1 逆矩阵的概念及性质 …… (41)
2.3.2 可逆矩阵的判定及求法 …… (42)
2.4 矩阵分块法及其计算 …… (44)
2.4.1 矩阵的分块 …… (44)
2.4.2 分块矩阵的运算 …… (45)
2.4.3 乘法运算中的两种分块方式 …… (46)
2.4.4 分块对角矩阵 …… (48)
2.5 矩阵的初等变换及其应用 …… (51)
2.5.1 矩阵的初等变换 …… (51)
2.5.2 阶梯形矩阵和简化梯形矩阵 …… (52)
2.5.3 初等矩阵 …… (53)
2.5.4 初等变换求逆 …… (54)
2.6 矩阵的秩 …… (57)
2.6.1 矩阵秩的定义及性质 …… (57)
2.6.2 初等变换求矩阵的秩 …… (58)
2.7 软件应用 …… (60)
2.7.1 矩阵及其元素的赋值 …… (60)
2.7.2 矩阵的初等运算 …… (60)
2.8 矩阵的应用 …… (62)
习题 …… (63)
第3章 n维向量与线性方程组 …… (65)
3.1 向量组及其线性组合 …… (66)
3.1.1 n维向量的概念 …… (66)
3.1.2 向量组的线性组合 …… (68)
3.1.3 向量组间的线性表示 …… (68)
3.2 向量组的线性相关性 …… (70)
3.2.1 线性相关性概念 …… (70)
3.2.2 线性相关性的判定 …… (71)
3.3 向量组的秩 …… (73)
3.4 齐次线性方程组的求解 …… (77)

3.4.1 线性方程组引言 …… (77)
3.4.2 齐次线性方程组解的判定 …… (77)
3.4.3 齐次线性方程组的一般解 …… (80)
3.4.4 齐次线性方程组的通解的求法 …… (80)
3.5 非齐次线性方程组的求解 …… (84)
3.5.1 非齐次线性方程组 …… (84)
3.5.2 非齐次线性方程组解的判定 …… (85)
3.5.3 非齐次线性方程组解的结构 …… (86)
3.5.4 非齐次线性方程组的通解求法 …… (86)
3.6 线性方程组的应用及上机实现 …… (91)
3.6.1 线性方程组的 MATLAB 求解一般方法 …… (91)
3.6.2 工作天数分配问题 …… (92)
3.6.3 生产计划的安排问题 …… (94)
3.6.4 世界人口预测问题 …… (96)
习题 …… (97)
第 4 章 相似矩阵及二次型 …… (102)
4.1 向量的内积、长度及正交性 …… (103)
4.1.1 内积及其性质 …… (103)
4.1.2 向量的长度与性质 …… (103)
4.1.3 正交向量组 …… (104)
4.1.4 向量的正交规范化 …… (105)
4.1.5 正交矩阵 …… (106)
4.2 特征值与特征向量 …… (110)
4.2.1 特征值与特征向量 …… (110)
4.2.2 特征值与特征向量的性质 …… (114)
4.3 相似矩阵与矩阵的对角化 …… (115)
4.4 二次型及其标准形 …… (120)
4.4.1 二次型的定义 …… (120)
4.4.2 二次型的表示方法 …… (121)
4.4.3 化二次型为标准形 …… (122)
4.5 正定二次型的性质及其应用 …… (126)
4.5.1 二次型有定性的概念 …… (126)
4.5.2 正定矩阵的判别法 …… (127)
4.6 层次分析法 …… (129)
4.7 层次分析法应用 …… (134)
4.7.1 旅游地选择—问题提出 …… (134)
4.7.2 旅游地选择—问题分析 …… (135)
4.7.3 旅游地选择—问题求解 …… (135)

习题 …… (144)
第5章　线性规划的基本问题 …… (146)
5.1　线性规划问题的数学模型 …… (147)
5.1.1　线性规划问题及其数学模型 …… (147)
5.1.2　线性规划问题模型的标准形式 …… (149)
5.2　线性规划解的定义及图解法 …… (151)
5.2.1　线性规划问题解的基本概念 …… (151)
5.2.2　两个变量的线性规划问题的图解法 …… (153)
5.3　线性规划问题的单纯形法 …… (156)
5.3.1　单纯形法的基本思路 …… (156)
5.3.2　确定初始基可行解 …… (158)
5.3.3　最优性检验 …… (159)
5.3.4　基变换 …… (160)
5.3.5　解的判别 …… (162)
5.3.6　单纯形表求解 …… (162)
5.4　人工变量及其处理方法 …… (165)
5.4.1　人工变量 …… (165)
5.4.2　大M法 …… (166)
5.4.3　两阶段法 …… (167)
5.4.4　无最优解和无穷多最优解 …… (169)
5.4.5　退化与循环 …… (170)
5.5　线性规划问题上机实现 …… (170)
5.6　线性规划的应用 …… (173)
5.6.1　配料问题 …… (173)
5.6.2　投资问题 …… (174)
习题 …… (177)
参考文献 …… (179)

第1章

行　列　式

在一个函数、方程或不等式中，如果出现的数学表达式是关于未知数或变量的一次式，那么这个函数、方程或不等式就称为线性函数、线性方程或线性不等式．如果一个实际问题中归纳出来的数学模型中出现的函数、方程式或不等式都是线性的，就称这个数学模型为线性模型．在经济管理活动中，许多变量之间存在着或近似存在着线性关系，使得对这种关系的研究显得非常重要．投入产出线性规划数学模型是最常见的线性模型，在数据计算、信息处理、均衡生产、减少消耗、增加产出等方面有着广泛的应用．在模型的建立中，我们也常将非线性关系近似看作线性关系．线性代数就是研究线性关系的基本数学工具．

在1683年与1693年，日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼茨就分别独立地提出了行列式的概念．以后很长一段时间内，行列式主要应用于对线性方程组的研究．大约一个半世纪后，行列式逐步发展为线性代数的一个独立的分支．1750年，瑞士数学家克莱姆在他的论文中提出了利用行列式求解线性方程组的著名法则——克莱姆法则．随后，1812年，法国数学家柯西发现了行列式在解析几何中的应用．如今，随着计算机的发展，行列式的数值意义已经不大，但行列式的理论依然占据着重要的地位．特别是在本课程中，行列式是研究后面线性代数方程组、矩阵的重要工具．本章思维导图如图1－1所示．

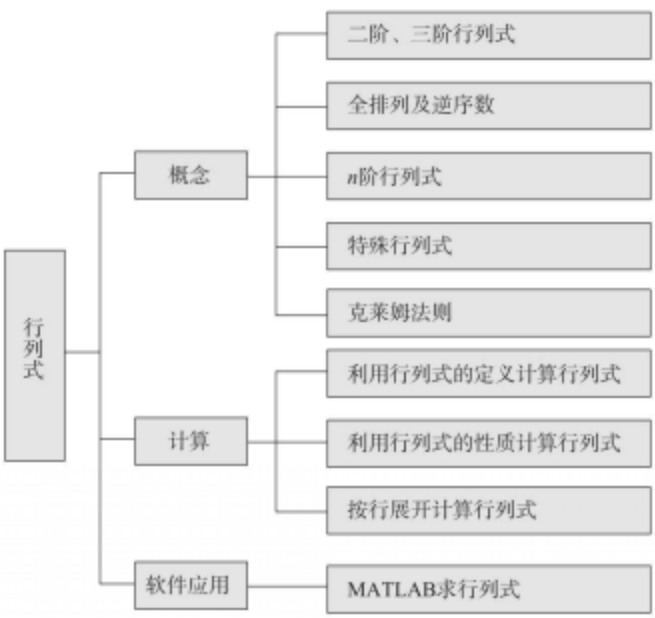


图1－1　本章思维导图

1.1 二阶与三阶行列式

1.1.1 引例

引例1

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

用消元法解方程组（1），当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组（1）有唯一解，且得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{2}$$

为了便于研究，引入二阶行列式的定义.

引例2

假设甲、乙两个运输公司组成一个运输队，它们分别对外提供服务，在运输期间又商定相互提供服务，已知甲公司每创造单位产值需要乙公司提供0.1单位服务；乙公司每创造单位产值需要甲公司0.2单位服务．又知道在该时期内，2个公司创造的产值分别为：甲公司500万元，乙公司700万元．问：每个公司创造的总产值分别为多少？

假设甲公司产值为 x_1，乙公司产值为 x_2，可列方程组如下：

$$\begin{cases} x_1 = 0.1x_2 + 500 \\ x_2 = 0.2x_1 + 700 \end{cases}$$

移项后是一个二元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 - 0.1x_2 = 500 \\ -0.2x_1 + x_2 = 700 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = 581.632\ 7 \text{（万元）} \\ x_2 = 816.326\ 5 \text{（万元）} \end{cases}$$

1.1.2 二阶与三阶行列式定义及其计算

一、二阶行列式

定义 由 2^2 个数组成的符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，表示代数和 $a_{12}a_{22} - a_{12}a_{22}$，称它为二阶行列式，常用 D 来表示．即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中，a_{ij} 是表示二阶行列式中第 i 行第 j 列的元素．横排称为行，竖排称为列，二阶行列式表示一个数值，它只是一个数的另一种表示方式，代表一种运算．

二阶行列式的计算可以用对角线法则来计算，如下所示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

我们将从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线；从右上角到左下角的对角线称为行列式的副（次）对角线．所以，a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为次对角线．

因此，二阶行列式是主对角线上的元素乘积减去次对角线上的元素乘积．

例 1　计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$．

解
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times 3 = -1$$

例 2　计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$．

解
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

有了二阶行列式的概念，对于引例 1，就可以记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，当 $D \neq 0$ 时，引例 1 中方程组（2）的解可表示成 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D}$．

例 3　解二元线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 9 \end{cases}$．

解
$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{5 \times 4 - 2 \times 9}{-2} = -1$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1 \times 9 - 5 \times 3}{-2} = 3$$

所以，$x_1 = -1$，$x_2 = 3$．

同样地，对于引例 1、引例 2，也可以采用行列式的方法进行求解．那么，对于三元的线性方程组，又该如何求解呢？为此，我们给出三阶行列式的定义．

二、三阶行列式

对于三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$，其系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式.

即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

同样，其代表一个数．三阶行列式由9个元素组成，它表示3! = 6项的代数和，其中正负项各占一半，每一项都是取不同行不同列的3个元素的乘积．类似于二阶行列式，三阶行列式也可以用对角线法则的方法记忆其计算方法，如图1-2所示，实连线的三个元素之积带正号，虚连线的三个元素之积带负号．

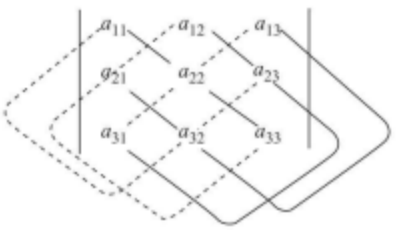


图1-2　三阶行列式计算图

例4　计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ 的值．

解

$$\begin{aligned} D &= 1\times 3\times 5 + (-1)\times(-3)\times(-4) + (-2)\times 2\times 4 - (-2)\times 3\times \\ &\quad (-4) - (-1)\times 2\times 5 - 1\times(-3)\times 4 \\ &= 15 - 12 - 16 - 24 + 10 + 12 = -15 \end{aligned}$$

例5　已知三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 0$，求元素 a 的值．

解　$D = \begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 4a + 3 = (a-1)(a-3)$

已知 $D = 0$，所以 $(a-1)(a-3) = 0$，得 $a = 1$ 或 $a = 3$.

若令 $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$，利用对角线法

则计算出 D,D_1,D_2,D_3 的值，当系数行列式 $D\neq 0$ 时，$x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},x_3=\dfrac{D_3}{D}$.

注：对角线法则只适用于二、三阶行列式.

练习题 1-1

1. 计算 $\begin{vmatrix}4 & -3\\ 5 & 2\end{vmatrix}$.

2. 设 $D=\begin{vmatrix}\lambda^2 & \lambda\\ 3 & 1\end{vmatrix}$，求：(1) 当 λ 为何值时 $D=0$？(2) 当 λ 为何值时 $D\neq 0$？

3. 解方程组 $\begin{cases}2x_1+3x_2=8\\ x_1-2x_2=-3\end{cases}$.

4. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}a-1 & -1\\ 1 & a^2+a+1\end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}3+\sqrt{5} & \sqrt{3}-2\\ \sqrt{3}+2 & 3-\sqrt{5}\end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{vmatrix}$.

5. 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 5\\ -1 & 0 & 6\end{vmatrix}$.

6. 求解方程 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{vmatrix}=0$.

7. 若行列式 $\begin{vmatrix}k & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 9 & 3 & 8\end{vmatrix}=40$，求 k 的值.

8. 已知行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$，求 λ 的值.

9. 已知 $f(x)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & x & 1\\ 5 & 0 & x\end{vmatrix}$，若 $f(x)>0$，求 x 的取值范围.

1.2　全排列及其逆序数

对于 n 个不同的元素，可以给它们规定一个次序，并称这规定的次序为标准次序. 例如 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数，一般规定由小到大的次序为标准次序.

定义 1 由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为一个 n 元全排列，简称为排列.

例如，由 1，2，3 这三个数组成的 123，132，213，231，312，321 都是 3 元（全）排列.

定义 2 在一个排列里，如果某一个较大的数码排在一个较小的数码前面，就说这两个数码构成一个逆序（反序），在一个排列里出现的逆序总数叫作这个排列的逆序数，用 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 表示排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数.

根据定义 2，可按如下方法计算排列的逆序数：

设在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，比 $i_t(t=1,2,\cdots,n)$ 大的且排在 i_t 前面的数共有 t_i 个，则 i_t 的逆序的个数为 t_i，而该排列中所有数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数. 即

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

例 1 计算排列 45321 的逆序数.

解 因为 4 排在首位，故其逆序数为 0；

比 5 大且排在 5 前面的数有 0 个，故其逆序数为 0；

比 3 大且排在 3 前面的数有 2 个，故其逆序数为 2；

比 2 大且排在 2 前面的数有 3 个，故其逆序数为 3；

比 1 大且排在 1 前面的数有 4 个，故其逆序数为 4.

可见，所求排列的逆序数为

$$\tau(45321) = 0+0+2+3+4 = 9$$

定义 3 逆序数为偶数的排列叫作偶排列，逆序数为奇数的排列叫作奇排列.

$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_2$ 前面大于 i_2 的元素个数 $+ i_3$ 前面大于 i_3 的元素的个数 $+\cdots+ i_n$ 前面大于 i_n 的元素的个数，例如，

$\tau(2341) = 0+0+3 = 3$，逆序数为 3，$\tau(2341)$ 为奇排列.

$\tau(4321) = 1+2+3 = 6$，逆序数为 6，$\tau(4321)$ 为偶排列.

定义 4 把一个排列中某两个数码 i 和 j 互换位置，而其余数码不动，就得到一个新排列. 对一个排列所施行的这样一个变换叫作一个对换.

例如，排列 2341 经过元素 2，4 对换变成排列 4321，可记为 $2341 \xrightarrow{(2,4)} 4321$.

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

证 先证相邻对换.

设排列为 $a_1 \cdots a_l\ a\ b\ b_1 \cdots b_m$，对换 a 与 b，得 $a_1 \cdots a_l\ b\ a\ b_1 \cdots b_m$.

当 $a < b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1，b 的逆序数不变；

当 $a > b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变，b 的逆序数减少 1.

因此对换相邻两个元素，排列改变奇偶性.

再证非相邻对换，现设排列为 $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$，现来对换 a 与 b.

因为

$$a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n \xrightarrow{m\text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$$

$$a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n \xrightarrow{m+1\text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$$

所以　　$a_1\cdots a_i a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n \xrightarrow{2m+1\text{ 次相邻对换}} a_1\cdots a_i b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$

因此，对换两个元素，排列改变奇偶性．

也就是说，只要经过一次对换，奇排列变成偶排列，而偶排列变成奇排列．

推论　奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数．

练习题 1－2

1. 求排列 32514 的逆序数．

2. 按自然数从小到大为标准次序，求下列排列的逆序数：$13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$.

3. 计算以下各排列的逆序数，并指出它们的奇偶性：

(1) 42531；　　(2) $135\cdots(2n+1)246\cdots(2n)$.

1.3　n 阶行列式的定义

引言　三阶行列式的构成规律为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

其中，符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 是由 3^2 个元素 a_{ij} 构成的三行、三列方表，横排叫行，纵排叫列；在上述形式下，元素 a_{ij} 的第一个下标叫行下标，第二个下标叫列下标．从形式上看，三阶行列式是上述特定符号表示的一个数，这个数由一些项的和而得：

(1) 项的构成：取自不同的行又于不同的列上的元素的乘积；

(2) 项数：三阶行列式是 $3!=6$ 项的代数和；

(3) 项的符号：每项的一般形式可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 时，即行标为自然排列时，该项的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$，即由列标排列 $j_1j_2j_3$ 的奇偶性决定．

定义　n 阶行列式定义为

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n \\ j_1j_2\cdots j_n}} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)+\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

用符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 表示由 n^2 个数 a_{ij} 所组成的 n 阶行列式，简记为 $|\boldsymbol{A}|$ 或

D，这是一个数. 其中，$i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都是 n 级排列，$\sum$ 表示对所有的 n 级排列求和.

由定义可以看出，n 阶行列式的值等于所有取自不同的行、不同的列上的 n 个元素的乘积 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 的代数和，共有 $n!$ 项，每一项前面的符号由排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 决定.

另外，行列式还可以定义为

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

或

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

以上两个定义式分别以行列的排列为标准序列，其每一项前面的符号由 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 和 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数决定.

例 1 在四阶行列式中，$a_{21} a_{32} a_{14} a_{43}$ 应带什么符号？

解 （1）按行列式定义 5 计算，因为 $a_{21} a_{32} a_{14} a_{43} = a_{14} a_{21} a_{32} a_{43}$，而 4123 的逆序数为 $\tau(4123) = 0 + 1 + 1 + 1 = 3$，所以 $a_{21} a_{32} a_{14} a_{43}$ 的前面应带负号.

（2）按行列式定义 6 计算，因为 $a_{21} a_{32} a_{14} a_{43}$ 的

行指标排列的逆序数为 $\tau(2314) = 0 + 0 + 2 + 0 = 2$，

列指标排列的逆序数为 $\tau(1243) = 0 + 0 + 0 + 1 = 1$.

所以 $a_{21} a_{32} a_{14} a_{43}$ 的前面应带负号.

例 2 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$.

分析 按行列式定义，每一项都是取自不同行不同列的 4 个元素的乘积，共有 4! 项. 但此行列式中有很多零元素，因此有的项为零，故只需找出不含零元素的项，不妨设各个字母表示的都是非零元素. 于是在第一行中只有两个非零元素 a_{11} 和 a_{12}. 当第一行取 a_{11} 时，第二行只能取 a_{23}（a_{21} 与 a_{11} 同列，故不能取），第三行只能取 a_{32}，第四行只能取 a_{44}，即 $a_{11} a_{23} a_{32} a_{44}$ 是其中的一项. 另外，当第一行取 a_{12} 时，第二行可以取 a_{21} 和 a_{23}，但当第二行取 a_{23} 时，第三行只能取零元素，故第二行只可以取 a_{21}，第三行取 a_{33}，第四行取 a_{44}，即另一非零项为 $a_{12} a_{21} a_{33} a_{44}$.

解

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau(1324)} a_{11} a_{23} a_{32} a_{44} + (-1)^{\tau(2134)} a_{12} a_{21} a_{33} a_{44} \\ &= -a_{11} a_{23} a_{32} a_{44} - a_{12} a_{21} a_{33} a_{44} \end{aligned}$$

练习题 1－3

1. 在五阶行列式中，$a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$ 与 $a_{12}a_{21}a_{35}a_{43}a_{54}$ 这两项各取什么符号？

2. 求四阶行列式中带负号且包含因子 a_{11} 和 a_{23} 的所有项．

3. 判断 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$，$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，$a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}$ 以及 $a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}$ 是否为四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 中的一项．

4. 在六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，下列各元素乘积应取什么符号？

（1）$a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$；

（2）$a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$；

（3）$a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$．

5. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ g & h & 0 & 0 \end{vmatrix}$．

6. 用行列式的定义计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

（2）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

（4）$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

1.4 特殊行列式

一、上三角形行列式

上三角形行列式形式如下：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

特点：主对角线及其上方元素不全为零，其余元素全为零.

二、下三角形行列式

下三角形行列式形式如下：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$

特点：主对角线及其下方元素不全为零，其余元素全为零. 下三角形行列式与上三角形行列式统称为三角形行列式.

三、主对角线行列式

主对角线行列式的形式如下：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$$