主编◎齐　敏

上海中考试题分层精编

精选三年试题　覆盖全部考点

专项精编　分层训练

基础题　夯实根基　融合提升

提高题　总结方法　举一反三

数学（提高题）

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

上海中考试题
分层精编　数学
（提高题）

主编　齐　敏

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

上海中考试题分层精编. 数学. 提高题 / 齐敏主编
. —上海：同济大学出版社，2019.12
ISBN 978－7－5608－8928－3

Ⅰ. ①上... Ⅱ. ①齐... Ⅲ. ①中学数学课－初中－习题集－升学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 287971 号

上海中考试题分层精编　数学(提高题)

齐　敏　主编

出 品 人　华春荣　　策　　划　赵俊丽　　责任编辑　徐慧平
责任校对　徐春莲　　封面设计　渲彩轩

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn
（地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021－65985622）
经　　销　全国各地新华书店、网络书店
排版制作　南京展望文化发展有限公司
印　　刷　浙江广育爱多印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　11
字　　数　275000
版　　次　2019 年 12 月第 1 版　2019 年 12 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5608－8928－3

定　　价　42.00 元

前　言

纵观近几年上海的中考数学，试卷结构稳定，重视基础知识、基本技能，关注通性、通法，题目的难、中、易程度控制在1∶1∶8。因为基础题占比较大，学生需要全方位无死角地练习，才能确保基础题的分数一分不丢。中等难度的题目主要涉及多个相关的知识点和多种方法的运用，题目看起来基础，但是综合性比较强，注重数学能力和数学思想的考查。压轴题除了考查知识的综合运用及数学思想以外，还有另一项重要的功能——选拔功能。

很多学生在学完初中的知识以后，就马上进入刷题状态。上海16个区三年内的“一模”“二模”试题是必刷的，然而也有学生毕业前刷过百余套卷子，但是中考的结果却并不理想。这就是典型的“学而不思则罔”，刷题时不思考不理解，就做不到活学活用、融会贯通。而中考试题都是原创的，学生很难在考试中碰到一模一样的题，加上考试的时候难免有紧张的情绪，若不懂得举一反三，很容易影响正常水平的发挥。

针对上述情况，我社推出《上海中考试题分类汇编》丛书。该套图书针对每一年的模拟试题进行了汇总，便于学生查漏补缺、专项训练。但是年度版“分类汇编”对整个初中数学的考点难免有所疏漏，为了弥补年度版“分类汇编”考点不全面、题型不全面的不足，我社特意邀请了浦东新区教育发展研究院的资深教研员，综合近几年模拟试题、考试真题，根据初中知识点和考试重点，编写了《上海中考试题分层精编 数学(基础题)》和《上海中考试题分层精编 数学(提高题)》。

基础题是指在中考试卷中占比80%的较容易的题目。《上海中考试题分层精编 数学(基础题)》覆盖了初中的全部考点，是必须全部掌握的。该书分10个专题，每个专题设置3个栏目：

课本基础知识——给出该专题所需要的课本基础知识，帮助学生整体构建知识网络。

试题精编——精选该专题历年考过的所有题型，不重不漏，帮助学生检测基础知识的掌握程度。

跟踪训练——与“试题精编”题型类似，适合对该专题知识点掌握不够牢靠的学生使用，起到巩固强化的作用。

提高题主要指对能力有一定要求的题目，比如阅读理解题，这种类型的题目年年出新题，考查学生学习新知识和应用知识的能力；几何证明题，注重逻辑推理的严密性；代数综合题，主要是在平面直角坐标系中解决与函数和几何图形相关的问题，注重综合能力的考查。压轴题

中,图形的翻折和旋转及几何图形中的动点问题,是新课标中十分强调的运动思想的体现,它们要用来凸显了中考的选拔功能。《上海中考试题分层精编 数学(提高题)》一书分 6 个专题,每个专题设置 4 个栏目:

基本方法——给出解题的通性、通法。

典型例题——精选该专题考过的题型,总结方法,点拨思路,最后给出严密完整的解题过程。

试题精编——精选该专题历年考过的所有题型,不重不漏,帮助学生检测知识的掌握程度。

跟踪训练——与“试题精编”题型类似,适合对该专题知识点或方法掌握不够牢靠的学生使用,起到巩固强化的作用。

《上海中考试题分层精编 数学(基础题)》一书重在夯实基础知识,帮助学生告别题海战术;《上海中考试题分层精编 数学(提高题)》一书注重综合能力的培养。两者相辅相成,配套使用,相得益彰。

如果把《上海中考试题分类汇编》比作是“鱼”,那这套《上海中考试题分层精编》堪称“渔”。“鱼”和“渔”同样重要,我们希望授人以鱼,更希望授人以渔。

学海无涯题作舟,愿本书成为你“题海”中的一叶轻舟,帮你跳出题海,看清趋势,摸清套路,更快更准地把握中考考试题型,取得满意的成绩。

目　录

专题 11　阅读理解问题

【基本方法】

首先认真阅读所给材料提供的新定义的内容或解决问题的方法，理解其含义或解决问题的方法，然后根据新定义或所给材料中的方法，结合其他有关数学知识，思考、尝试、类比解决有关问题.

【典型例题】

例题 1　(2019·浦东·一模)在平面直角坐标系 xOy 中，我们把对称轴相同的抛物线叫做同轴抛物线.已知抛物线 $y=-x^2+6x$ 的顶点为 M，它的某条同轴抛物线的顶点为 N，且点 N 在点 M 的下方，$MN=10$，那么点 N 的坐标是__________.

思路解析　“同轴抛物线”是一个新名词，根据它的定义，我们可以知道它是指对称轴相同的抛物线.由于抛物线 $y=-x^2+6x$ 的对称轴是 $x=3$，因此与它同轴的抛物线的对称轴也是 $x=3$. 另外抛物线的顶点在其对称轴上，我们可以先求得点 M 的坐标，再根据条件“点 N 在点 M 的下方，$MN=10$”，即可求得点 N 的坐标.

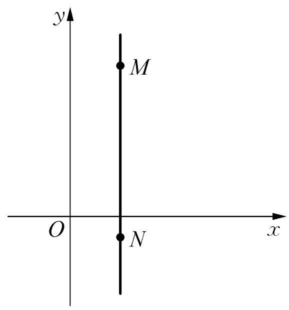


图 1

解题过程　根据题意，得点 M 的坐标为(3, 9)，如图 1.

∵ 点 N 是与抛物线 $y=-x^2+6x$ 同轴的抛物线的顶点，

∴ 点 N 的横坐标为 3.

又∵ 点 N 在点 M 的下方，$MN=10$，

∴ 点 N 的纵坐标为-1.

∴ 点 N 的坐标是$(3, -1)$.

例题 2　(2017·上海·中考)我们规定：一个正 n 边形(n 为整数，$n\geqslant 4$) 的最短对角线与最长对角线长度的比值叫做这个正 n 边形的“特征值”，记为 λ_n，那么 $\lambda_6=$__________.

思路解析　“特征值”是一个新规定的概念，根据它的规定，我们知道它是指一个正 n 边形的最短对角线与最长对角线长度的比值，因此根据题意，只要求出所给正多边形的最短对角线与最长对角线的长度，即可获得结论.而所给正多边形的边数，可以从它的记号中获得，因为正 n 边形的“特征值”记为 λ_n，所以记为 λ_6 的是正六边形的“特征值”.

解题过程　如图 2，设正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 a，那么 AC、AD 分别是这个正六边形的最短和最长的一条对角线，可求得 $AC=\sqrt{3}a$，$AD=2a$.

$$\therefore \lambda_6=\frac{AC}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

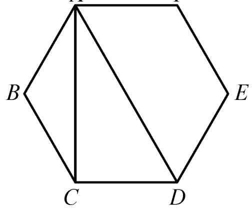


图 2

说明　此题也可通过推理获得，$\triangle ACD$ 是含 30° 角的直角三角形，其中 $\angle CAD=30^\circ$，$\angle ACD=90^\circ$，从而直接获得结论.

例题 3 (2019·宝山·二模)各顶点都在方格纸横竖格子线的交错点上的多边形称为格点多边形,奥地利数学家皮克(G. Pick, 1859～1942)证明了格点多边形的面积公式:$S=a+\frac{1}{2}b-1$,其中 a 表示多边形内部的格点数,b 表示多边形边界上的格点数,S 表示多边形的面积.如图 3 中的格点多边形的面积是________.

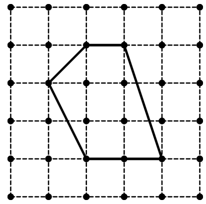


图 3

思路解析 本题已把面积公式给出,因此只要根据公式的要求,数一下多边形内部的格点数和边界上的格点数,代入公式即可获得这个格点多边形的面积.

解题过程 这个格点五边形内的格点数为 4,边界上的格点数为 6,因此根据皮克的面积公式,得这个格点五边形的面积为 6.

例题 4 (2018·静安·二模)在平面直角坐标系中,如果对任意一点(a, b),规定两种变换:$f(a, b)=(-a, -b)$, $g(a, b)=(b, -a)$,那么 $g[f(1, -2)]=$________.

思路解析 本题是一个规定新运算变换的问题,对于平面直角坐标系中的任意一点(a, b),经过"f"的变换,其横坐标和纵坐标都变号,经过"g"的变换,其横坐标变为原来的纵坐标,而纵坐标变为原来横坐标的相反数,因此我们只要按照这个变换的要求,由里向外逐步进行变换运算,即可得到结论.

解题过程 根据规定的变换规则,得 $g[f(1, -2)]=g(-1, 2)=(2, 1)$.

例题 5 (2018·杨浦·二模)当关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实数根,且其中一个根为另一个根的 2 倍时,称之为"倍根方程".如果关于 x 的一元二次方程 $x^2+(m-2)x-2m=0$ 是"倍根方程",那么 m 的值为________.

思路解析 涉及一元二次方程的实数根的问题,可以考虑利用一元二次方程的根与系数的关系,即韦达定理解决有关问题.根据本题的新定义:倍根方程即一个根是另一个根的 2 倍,因此可以设这个方程的一个根为 x,那么另一个根为 $2x$,根据韦达定理,得 $x+2x=-(m-2)$, $x\cdot 2x=-2m$,即可求得 m 的值.

解题过程 设这个方程的一个根为 x,那么另一个根为 $2x$.

根据韦达定理,得 $x+2x=-(m-2)$, $x\cdot 2x=-2m$,

即 $3x=-(m-2)$, $x^2=-m$.

消去 x,得 $\left(\frac{m-2}{3}\right)^2=-m$.

整理,得 $m^2+5m+4=0$.

解得 $m=-1$ 或 $m=-4$.

例题 6 (2019·虹口·一模)定义:如果△ABC 内有一点 P,满足 $\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA$,那么称点 P 为△ABC 的布罗卡尔点.如图 4,在△ABC 中,$AB=AC=5$, $BC=8$,点 P 为△ABC 的布罗卡尔点,如果 $PA=2$,那么 $PC=$________.

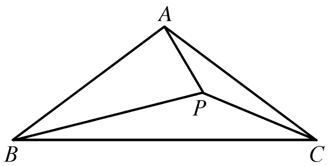


图 4

思路解析 本题介绍了一个新名词:布罗卡尔点,即在△ABC 的内部有一点 P,满足 $\angle PAC$、$\angle PCB$、$\angle PBA$ 都相等,这实质上就是告诉我们本题中这三个角相等的条件,然后

结合其他条件和有关数学知识，想办法求 PC 的长.

对于本题，难度不在于理解新名词，而在于思考如何根据条件，解决问题.如果注意到 $\angle ACP=\angle CBP$，那么就能发现 $\triangle ACP\backsim\triangle CBP$，问题也就迎刃而解了.

解题过程　$\because AB=AC$，$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

$\because \angle PCB=\angle PBA$，$\therefore \angle ACP=\angle CBP$.

$\because \angle PAC=\angle PCB$，$\therefore \triangle ACP\backsim\triangle CBP$.

$\therefore \dfrac{AP}{PC}=\dfrac{AC}{BC}$，即 $\dfrac{2}{PC}=\dfrac{5}{8}$.

$\therefore PC=\dfrac{16}{5}$.

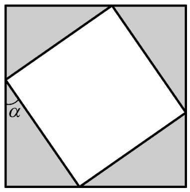
【试题精编】

1. (2019·杨浦·二模)如果当 $a\neq 0$，$b\neq 0$，且 $a\neq b$ 时，将直线 $y=ax+b$ 和直线 $y=bx+a$ 称为一对“对偶直线”，把它们的公共点称为该对“对偶直线”的“对偶点”，那么请写出“对偶点”为(1，4)的一对“对偶直线”：____________.

2. (2018·浦东·二模)如果抛物线 C：$y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 与直线 l：$y=kx+d$ $(k\neq 0)$ 都经过 y 轴上一点 P，且抛物线 C 的顶点 Q 在直线 l 上，那么称此直线 l 与该抛物线 C 具有“点线和谐”关系.如果直线 $y=mx+1$ 与抛物线 $y=x^2-2x+n$ 具有“点线和谐”关系，那么 $m+n=$__________.

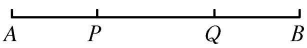
3. (2019·奉贤·一模)我们把边长是两条对角线长度的比例中项的菱形叫做“钻石菱形”.如果一个“钻石菱形”的面积为 6，那么它的边长是__________.

4. (2019·奉贤·二模)在证明“勾股定理”时，可以将 4 个全等的直角三角形和一个小正方形拼成的一个大正方形(如图所示).如果小正方形的面积是 25，大正方形的面积为 49，直角三角形中较小的锐角为 α，那么 $\tan\alpha$ 的值是__________.



(第 4 题图)

5. (2017·虹口·二模)定义：如图，点 P、Q 把线段 AB 分割成线段 AP、PQ 和 BQ，若以 AP、PQ、BQ 为边的三角形是一个直角三角形，则称点 P、Q 是线段 AB 的勾股分割点.已知点 P、Q 是线段 AB 的勾股分割点，如果 $AP=4$，$PQ=6$($PQ>BQ$)，那么 $BQ=$__________.

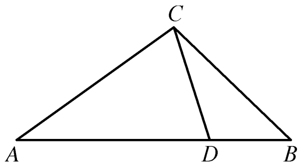


(第 5 题图)

6. (2017·奉贤·二模)在等腰$\triangle ABC$ 中，当顶角 A 的大小确定时，它的对边(即底边 BC)与邻边(即腰 AB 或 AC)的比值也确定了，我们把这个比值记作 $T(A)$，即 $T(A)=\dfrac{\angle A\text{ 的对边(底边)}}{\angle A\text{ 的邻边(腰)}}=\dfrac{BC}{AB}$.例：$T(60^\circ)=1$，那么 $T(120^\circ)=$__________.

7. (2019·长宁·二模)我们规定：一个多边形上任意两点间距离的最大值称为该多边形的“直径”.现有两个全等的三角形，边长分别为 4、4、$2\sqrt{7}$.将这两个三角形相等的边重合拼成对角线互相垂直的凸四边形，那么这个凸四边形的“直径”为__________.

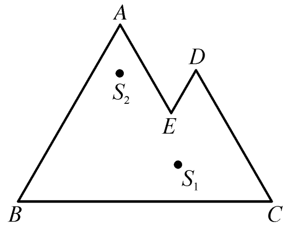
8. (2018·徐汇·二模)从三角形(非等腰三角形)一个顶点引出一条射线与对边相交,该顶点与该交点间的线段把这个三角形分割成两个小三角形.如果其中一个小三角形是等腰三角形,另一个与原三角形相似,那么我们把这条线段叫做这个三角形的完美分割线.如图,在$\triangle ABC$中,$DB=1$,$BC=2$,CD是$\triangle ABC$的完美分割线,且$\triangle ACD$是以CD为底边的等腰三角形,则CD的长为________.



(第8题图)

9. (2019·浦东·二模)定义:如果P是$\odot O$所在平面内的一点,Q是射线OP上一点,且线段OP、OQ的比例中项等于$\odot O$的半径,那么我们称点P与点Q为这个圆的一对反演点.已知点M、N为$\odot O$的一对反演点,且点M、N到圆心O的距离分别为4和9,那么$\odot O$上任意一点A到点M、N的距离之比$\dfrac{AM}{AN}=$________.

10. (2019·青浦·一模)对于封闭的平面图形,如果图形上或图形内的点S到图形上的任意一点P之间的线段都在图形内或图形上,那么这样的点S称为"亮点".如图,对于封闭图形$ABCDE$,S_1是"亮点",S_2不是"亮点",如果$AB\parallel DE$,$AE\parallel DC$,$AB=2$,$AE=1$,$\angle B=\angle C=60^\circ$,那么该图形中所有"亮点"组成的图形的面积为________.



(第10题图)

【跟踪训练】

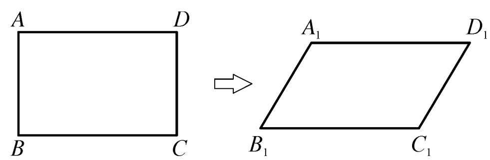
1. (2019·静安·一模)抛物线$y=ax^2(a\neq 0)$沿某条直线平移一段距离,我们把平移后得到的新抛物线叫做原抛物线的"同簇抛物线".如果把抛物线$y=x^2$沿直线$y=x$向上平移,平移距离为$\sqrt{2}$时,那么它的"同簇抛物线"的解析式是________.

2. (2018·闵行·二模)如果二次函数$y=a_1x^2+b_1x+c_1(a_1\neq 0,a_1、b_1、c_1$是常数)与$y=a_2x^2+b_2x+c_2(a_2\neq 0,a_2、b_2、c_2$是常数)满足$a_1$与$a_2$互为相反数,$b_1$与$b_2$相等,$c_1$与$c_2$互为倒数,那么称这两个函数为"亚旋转函数".请直接写出函数$y=-x^2+3x-2$的"亚旋转函数"的解析式:________.

3. (2019·杨浦·一模)如果抛物线C_1的顶点在抛物线C_2上时,抛物线C_2的顶点也在抛物线C_1上,那么我们称抛物线C_1与C_2是"互为关联"的抛物线.与抛物线$y=2x^2$是"互为关联"且顶点不同的抛物线的解析式可以是________.(只需写出一个)

4. (2018·松江·二模)在平面直角坐标系xOy中,若抛物线$y=ax^2$上的两点A、B满足$OA=OB$,且$\tan\angle OAB=\dfrac{1}{2}$,则称线段$AB$为该抛物线的通径.那么抛物线$y=\dfrac{1}{2}x^2$的通径长为________.

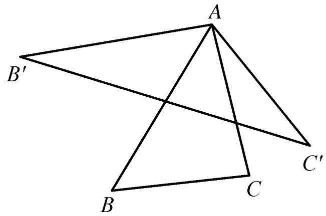
5. (2019·虹口·二模)我们知道,四边形不具有稳定性,容易变形.一个矩形发生变形后成为一个平行四边形,设这个平行四边形相邻内角中较小的一个内角为α,我们把$\dfrac{1}{\cos\alpha}$的值叫做这个平行四边形的变形度.如



(第5题图)

图，矩形 $ABCD$ 的面积为 5，如果变形后的平行四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积为 3，那么这个平行四边形的变形度为__________.

6. (2018・奉贤・二模)如图，将$\triangle ABC$ 的边 AB 绕着点 A 顺时针旋转 $\alpha(0°<\alpha<90°)$ 得到 AB'，边 AC 绕着点 A 逆时针旋转 $\beta(0°<\beta<90°)$ 得到 AC'，联结 $B'C'$.当 $\alpha+\beta=90°$ 时，我们称$\triangle AB'C'$是$\triangle ABC$ 的“双旋三角形”.如果等边$\triangle ABC$ 的边长为 a，那么它的“双旋三角形”的面积是__________.(用含 a 的代数式表示)



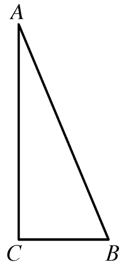
(第 6 题图)

7. (2019・宝山・一模)我们将等腰三角形腰长与底边长的差的绝对值称为该三角形的“边长正度值”.若等腰三角形腰长为 5，“边长正度值”为 3，则这个等腰三角形底角的余弦值等于__________.

8. (2018・长宁・二模)如果一个三角形有一条边上的高等于这条边的一半，那么我们把这个三角形叫做半高三角形.已知直角三角形 ABC 是半高三角形，且斜边 $AB=5$，则它的周长等于__________.

9. (2017・浦东・二模)如果一个三角形一边上的中线的长与另两边中点的连线段的长相等，我们称这个三角形为“等线三角形”，这条边称为“等线边”.在等线三角形 ABC 中，AB 为等线边，且 $AB=3$，$AC=2$，那么 $BC=$__________.

10. (2019・长宁・一模)已知点 P 在$\triangle ABC$ 内，联结 PA、PB、PC，在$\triangle PAB$、$\triangle PBC$ 和$\triangle PAC$ 中，如果存在一个三角形与$\triangle ABC$ 相似，那么就称点 P 为$\triangle ABC$ 的自相似点.如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=12$，$BC=5$，如果点 P 为 Rt$\triangle ABC$ 的自相似点，那么$\angle ACP$ 的余切值等于__________.



(第 10 题图)

专题 12　图形的翻折与旋转问题

图形的运动问题是上海教材的特色，因此也是上海中考数学的热点问题.图形的基本运动主要有平移、翻折与旋转，它们有一个共同的性质，即图形经过平移、翻折、旋转，始终保持形状和大小不变，即全等.在直线型图形中，主要结论是对应线段相等、对应角相等.但平移相对来说较为简单，多出现在函数图像的平移中，作为上海中考数学的热点与难点，主要是在图形的翻折与旋转上进行变化.要突破这个难点，根据题意，画出准确的图形，获得有关的边角相等的条件是关键.

12.1　图形的翻折

【基本方法】

图形的翻折问题就是轴对称问题，因此画图时，可根据轴对称的意义画出准确的图形，也可以根据它的性质，对应边相等，对应角相等画出准确的图形，从而看清条件，进行分析，解决问题.

【典型例题】

例题 1　(2017・杨浦・二模)如图 1，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$CA = CB = 4$，将 $\triangle ABC$ 翻折，使得点 B 与边 AC 的中点 M 重合，如果折痕与边 AB 的交点为 E，那么 BE 的长为__________.

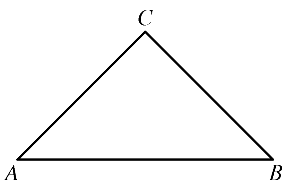


图 1

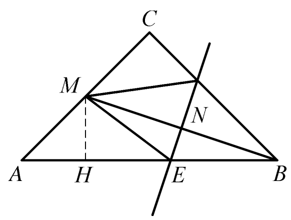


图 2

思路解析　本题知道翻折后的结果，点 B 与边 AC 的中点 M 重合，即点 B 的对称点为点 M，因此折痕就是 BM 的垂直平分线在 $\triangle ABC$ 内的一条线段，如图 2.然后根据要求，求线段 BE 的长.

解题过程　根据题意，画出示意图，如图 2.

作 $MH \perp AB$，垂足为点 H.

由题意，得 $AB = 4\sqrt{2}$，$AM = 2$，$MH = AH = \sqrt{2}$，$BH = 3\sqrt{2}$，$BM = 2\sqrt{5}$，$BN = MN = \sqrt{5}$.

$\because \angle BNE=\angle BHM$，$\angle NBE=\angle HBM$，$\therefore \triangle BNE \backsim \triangle BHM$.

$\therefore \dfrac{BE}{BN}=\dfrac{BM}{BH}$，即 $\dfrac{BE}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$.

解得 $BE=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$.

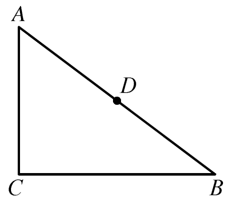


图 3

例题 2　(2018・金山・二模)如图 3,在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=6$，$BC=8$，D 是 AB 的中点,P 是直线 BC 上一点,把$\triangle BDP$ 沿 PD 所在的直线翻折后,点 B 落在点 Q 处,如果 $QD\perp BC$，那么点 P 和点 B 间的距离等于__________.

思路解析　本题的难点是如何画出准确的图形.注意到 $QD\perp BC$ 这个结论,可知点 Q 在线段 BC 的垂直平分线上,由此可得点 P 是$\angle BDQ$ 的平分线与 BC 的交点.最后注意到点 P 在直线 BC 上,因此完整地讲,点 P 是$\angle BDQ$ 的平分线所在的直线与直线 BC 的交点,有两种情况,如图 4.

解题过程　根据题意,画出示意图,如图 4，$QD\perp BC$，垂足为点 H,有两种情况.

(i) 当点 Q 在直线 BC 的下方时(点 Q_1 处),点 P 在线段 BH 上(点 P_1 处).

由翻折知,DP_1 平分$\angle BDH$.

作 $P_1M\perp BD$，垂足为点 M.

由条件,得 $BH=4$，$DH=3$，$BD=5$.

设 $P_1B=x$，则由题意,可证得 $P_1M=P_1H$，$\triangle BP_1M \backsim \triangle BDH$.

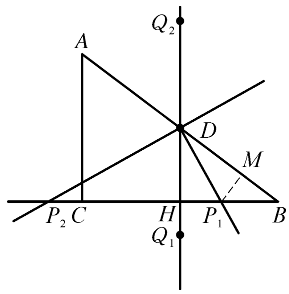


图 4

$\therefore \dfrac{P_1B}{P_1M}=\dfrac{BD}{DH}$，即 $\dfrac{x}{4-x}=\dfrac{5}{3}$.

解得 $x=\dfrac{5}{2}$，即 $P_1B=\dfrac{5}{2}$.

(ii) 当点 Q 在直线 BC 的上方时(点 Q_2 处),点 P 在直线 BH 上(点 P_2 处).

由题意,可证得 DP_2 是$\angle ADH$ 的平分线,因此同理可得 $P_2B=10$.

说明　本题求线段 P_1B 的长时,也可利用面积得到关系式,即$\triangle BDP_1$ 的面积与$\triangle HDP_1$ 的面积之比等于$\dfrac{P_1B}{P_1H}$,也等于$\dfrac{BD}{DH}$,因此 $\dfrac{P_1B}{P_1H}=\dfrac{BD}{DH}$.

例题 3　(2019・虹口・二模)如图 5,在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，点 E 在边 AD 上且 $AE=4$，点 F 是边 BC 上的一个动点,将四边形 $ABFE$ 沿 EF 翻折,A、B 的对应点 A_1、B_1 与点 C 在同一条直线上,A_1B_1 与边 AD 交于点 G,如果 $DG=3$，那么 BF 的长为__________.

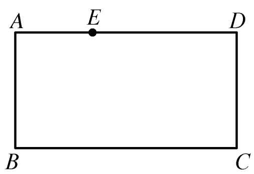


图 5

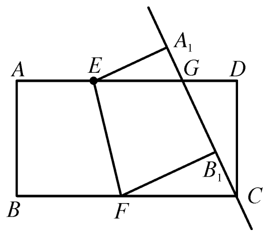


图 6

思路解析　由于点 F、A_1、B_1 的位置未知，只知点 A_1、B_1 与点 C 在同一条直线上，因此可先画个草图，然后进行适当修正，得到示意图(图 6).注意到 $\mathrm{Rt}\triangle A_1EG$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle DCG$ 相似，那么就可以求得 EG 的长度，从而知道 BC 的长度，再利用 $\mathrm{Rt}\triangle B_1FC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle DCG$ 相似，可获得结论.

解题过程　根据题意，得 $A_1E=AE=4$，$CD=AB=6$，$DG=3$.

$\because$ $\angle EA_1G=\angle D=90^\circ$，$\angle A_1GE=\angle DGC$，$\therefore$ $\triangle A_1GE \backsim \triangle DGC$.

$\therefore$ $\dfrac{A_1G}{DG}=\dfrac{A_1E}{CD}$，即 $\dfrac{A_1G}{3}=\dfrac{4}{6}$.

解得 $A_1G=2$.

$\therefore$ $EG=2\sqrt{5}$.

$\therefore$ $BC=AD=7+2\sqrt{5}$.

同理，由 $\triangle B_1CF \backsim \triangle DGC$，得 $B_1C=\dfrac{1}{2}B_1F$.

$\therefore$ $CF=\dfrac{\sqrt{5}}{2}B_1F=\dfrac{\sqrt{5}}{2}BF$.

$\therefore$ $BF+\dfrac{\sqrt{5}}{2}BF=7+2\sqrt{5}$.

解得 $BF=6\sqrt{5}-8$.

例题 4　(2019・徐汇・一模)如图 7，在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel DC$，$\angle B=90^\circ$，$BC=6$，$CD=2$，$\tan A=\dfrac{3}{4}$.点 E 为 BC 上一点，过点 E 作 $EF\parallel AD$ 交边 AB 于点 F.将 $\triangle BEF$ 沿直线 EF 翻折得到 $\triangle GEF$，当 EG 过点 D 时，BE 的长为__________.

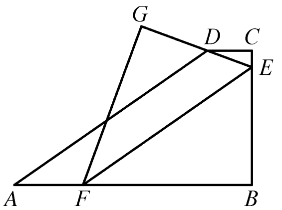


图 7

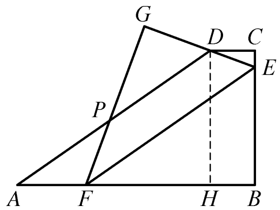


图 8

思路解析　本题的示意图已给出，难度有所下降，但要看清翻折后相应的边角关系，不遗漏解决问题所需要的条件.根据题意，可求得梯形的各边长，又由翻折得到 $FG=FB$，$\angle GFE=\angle BFE$.设 $BE=x$，FG 与 AD 相交于点 P.在 $\triangle EFG$ 中，利用 $PD\parallel EF$ 得比例式，列出方程，求得 x 的值.

解题过程　如图 8，设 $BE=x$，FG 与 AD 相交于点 P.

作 $DH\perp AB$，垂足为点 H，那么 $BH=CD=2$，$DH=BC=6$.

$\because$ $\tan A=\dfrac{3}{4}$，$\therefore$ $AH=8$，$AD=10$.

$\because$ $EF\parallel AD$，$\therefore$ $BF=\dfrac{4}{3}x$，$EF=\dfrac{5}{3}x$，$\angle BFE=\angle A=\angle APF=\angle GFE$.

$\therefore PF = AF = 10 - \frac{4}{3}x$.

$\therefore AP = \frac{8}{5}\left(10 - \frac{4}{3}x\right)$，$GP = \frac{8}{3}x - 10$.

$\therefore PD = 10 - \frac{8}{5}\left(10 - \frac{4}{3}x\right) = \frac{32}{15}x - 6$.

$\because EF \parallel AD$，$\therefore \frac{PD}{EF} = \frac{GP}{GF}$，即 $\frac{\frac{32}{15}x - 6}{\frac{5}{3}x} = \frac{\frac{8}{3}x - 10}{\frac{4}{3}x}$.

解得 $x = \frac{65}{12}$，即 BE 的长为$\frac{65}{12}$.

例题 5　(2019·徐汇·二模)如图 9，把半径为 2 的⊙O 沿弦 AB 折叠，$\overset{\frown}{AB}$经过圆心 O，则阴影部分的面积为__________.(结果保留 π)

思路解析　这是一道曲线型图形的翻折问题，研究圆的问题，我们往往采用“化曲为直”的方法，即把曲线型图形问题转化为直线型图形问题.本题翻折后$\overset{\frown}{AB}$经过圆心 O，由圆的对称性可知，这点是$\overset{\frown}{AB}$的中点.不妨设为点 M，联结 OM，得到直角三角形，求得圆心角$\angle AOB$，即可得扇形的面积，最终可得所求阴影部分的面积.

解题过程　如图 10，设$\overset{\frown}{AB}$的中点为 M，联结 OM，交弦 AB 于点 H，联结 OA、OB.

由垂径定理的推论，得 $OM \perp AB$，$AH = BH$.

$\because OH = MH = \frac{1}{2}OA$，$\therefore \angle OAH = 30°$.

$\therefore \angle AOB = 120°$.

由于所求的阴影部分图形是一个弓形，因此

$S = \frac{120\pi \times 2^2}{360} - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$.

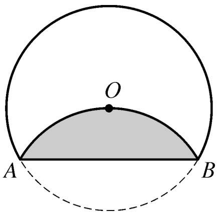


图 9

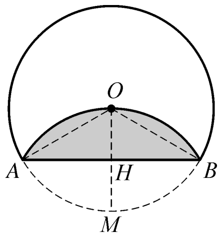
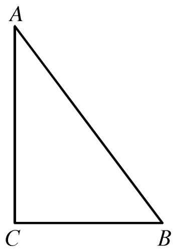


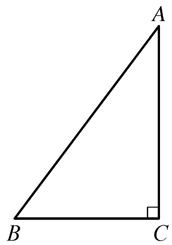
图 10

【试题精编】

1. (2019·闵行·一模)如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB = 90°$，$BC = 3$，$AC = 4$，点 D 为边 AB 上一点.将△BCD 沿直线 CD 翻折，点 B 落在点 E 处，联结 AE.如果 $AE \parallel CD$，那么 $BE =$__________.



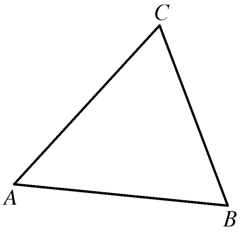
(第 1 题图)



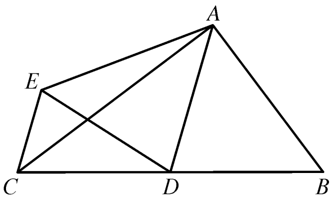
(第 2 题图)

2. (2017·虹口·二模)如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$AB = 10$，$\sin B = \frac{4}{5}$，点 D 在斜边 AB 上，把△ACD 沿直线 CD 翻折，使得点 A 落在同一平面内的点 A'处，当 $A'D$ 平行 Rt△ABC的直角边时，AD 的长为__________.

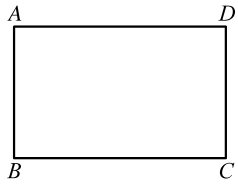
3. (2019・闵行・二模)如图,在$\triangle ABC$中,$AB=AC=5$,$BC=2\sqrt{5}$,D为边AC上一点(点D与点A、C不重合).将$\triangle ABC$沿直线BD翻折,使点A落在点E处,联结CE.如果$CE \parallel AB$,那么$AD:CD=$__________.



(第3题图)



(第4题图)

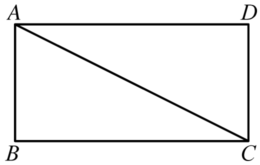


(第5题图)

4. (2018・崇明・二模)如图,在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=90^\circ$,$AB=6$,$AC=8$,点D是BC的中点,将$\triangle ABD$沿AD翻折得到$\triangle AED$,联结CE,那么线段CE的长等于__________.

5. (2019・青浦・二模)如图,在矩形$ABCD$中,$AB=3$,E为AD的中点,F为CD上一点,且$DF=2CF$,沿BE将$\triangle ABE$翻折,如果点A恰好落在BF上,那么$AD=$__________.

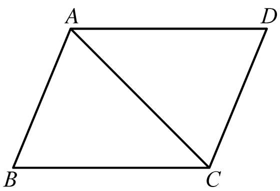
6. (2017・松江・二模)如图,已知在矩形$ABCD$中,$AB=4$,$AD=8$,将$\triangle ABC$沿对角线AC翻折,点B落在点E处,联结DE,则DE的长为__________.



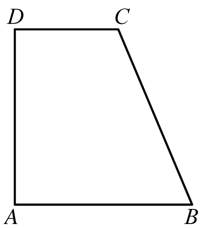
(第6题图)

7. (2019・浦东・一模)将矩形纸片$ABCD$沿直线AP折叠,使点D落在原矩形$ABCD$的边BC上的点E处,如果$\angle AED$的余弦值为$\frac{3}{5}$,那么$\frac{AB}{BC}=$__________.

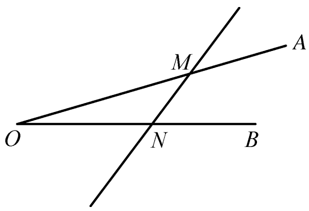
8. (2018・松江・二模)如图,在平行四边形$ABCD$中,$AC=BC$,$\angle ACB=45^\circ$,将三角形ABC沿着AC翻折,点B落在点E处,联结DE,那么$\frac{DE}{AC}$的值为__________.



(第8题图)



(第9题图)



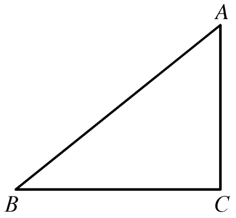
(第10题图)

9. (2018・闵行・二模)在直角梯形$ABCD$中,$AB \parallel CD$,$\angle DAB=90^\circ$,$AB=12$,$DC=7$,$\cos\angle ABC=\frac{5}{13}$,点$E$在线段$AD$上,将$\triangle ABE$沿$BE$翻折,点$A$恰巧落在对角线$BD$上点$P$处,那么$PD=$__________.

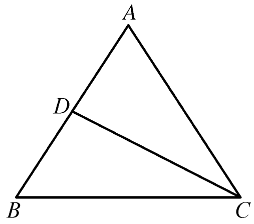
10. (2019・杨浦・二模)如图,点M、N分别在$\angle AOB$的边OA、OB上,将$\angle AOB$沿直线MN翻折,设点O落在点P处,如果当$OM=4$,$ON=3$时,点O、P的距离为4,那么折痕MN的长为__________.

【跟踪训练】

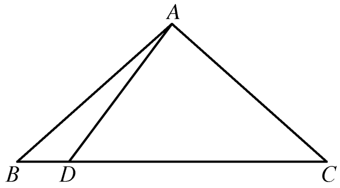
1. (2019·宝山·一模)如图,在 Rt△ABC 中,$\angle ACB=90^\circ$, $AC=4$, $BC=5$,点 P 为 AC 上一点,将△BCP 沿直线 BP 翻折,点 C 落在 C' 处,联结 AC',若 $AC' \parallel BC$,则 CP 的长为________.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

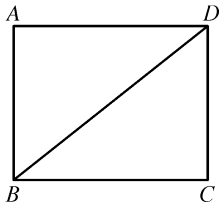


(第 3 题图)

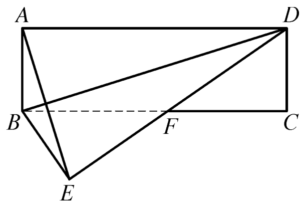
2. (2018·虹口·二模)如图,在△ABC 中,$AB=AC$, $BC=8$, $\tan B=\frac{3}{2}$,点 D 是 AB 的中点,如果把△BCD 沿直线 CD 翻折,使得点 B 落在同一平面内的 B' 处,联结 AB',那么 AB' 的长为________.

3. (2019·普陀·一模)如图,在△ABC 中,$AB=AC=8$, $\cos B=\frac{3}{4}$,点 D 在边 BC 上,将△ABD 沿直线 AD 翻折得到△AED,点 B 的对应点为点 E,AE 与边 BC 相交于点 F,如果 $BD=2$,那么 $EF=$________.

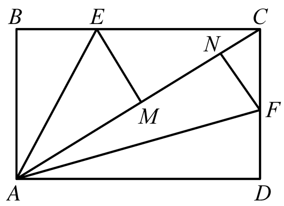
4. (2018·长宁·二模)如图,在矩形 $ABCD$ 中,对角线 BD 的长为 1,点 P 是线段 BD 上的一点,联结 CP,将△BCP 沿着直线 CP 翻折,若点 B 落在边 AD 上的点 E 处,且 $EP \parallel AB$,则 AB 的长等于________.



(第 4 题图)



(第 5 题图)

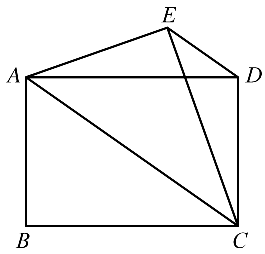


(第 6 题图)

5. (2019·静安·一模)如图,将矩形 $ABCD$ 沿对角线 BD 所在直线翻折后,点 A 与点 E 重合,且 ED 交 BC 于点 F,联结 AE.如果 $\tan\angle DFC=\frac{2}{3}$,那么 $\frac{BD}{AE}$ 的值是________.

6. (2017·黄浦·二模)如图,在矩形 $ABCD$ 中,将它分别沿 AE 和 AF 折叠,恰好使点 B、D 落到对角线 AC 上点 M、N 处,已知 $MN=2$, $NC=1$,则矩形 $ABCD$ 的面积是________.

7. (2018·黄浦·二模)如图,将矩形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠,使点 B 翻折到点 E 处,如果 $DE:AC=1:3$,那么 $AD:AB=$________.



(第 7 题图)