



申请同济大学工学博士学位论文

连续型交通分配模型研究

培养单位：交通运输工程学院

一级学科：交通运输工程

二级学科：道路与铁道工程

研究生：杜豫川

指导教师：孙立军 教授

二〇〇四年八月



A dissertation submitted to
Tongji University in conformity with the requirements for
the degree of Doctor of Philosophy

The Research on Continuous Traffic Assignment Modeling

School: School of Transportation Engineering

Discipline: Transportation Engineering

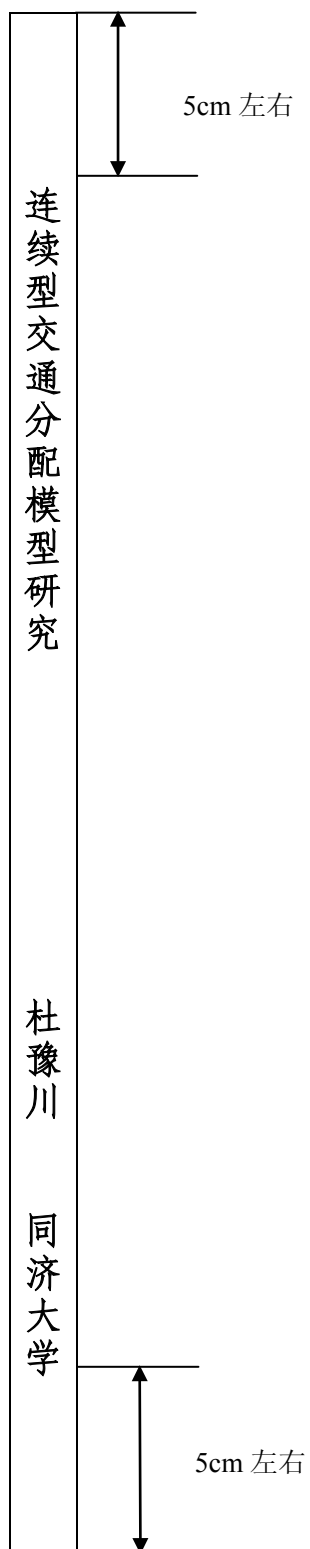
Major: Road & Railway Engineering

Candidate: Yu-Chuan Du

Supervisor: P rof. Li-Jun Sun

August, 2003

书脊



学位论文版权使用授权书

本人完全了解同济大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，同意如下各项内容：按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并采用影印、缩印、扫描、数字化或其它手段保存论文；学校有权提供目录检索以及提供本学位论文全文或者部分的阅览服务；学校有权按有关规定向国家有关部门或者机构送交论文的复印件和电子版；在不以赢利为目的的前提下，学校可以适当复制论文的部分或全部内容用于学术活动。

学位论文作者签名：

年 月 日

经指导教师同意，本学位论文属于保密，在 年解密后适用本授权书。

指导教师签名：

学位论文作者签名：

年 月 日

年 月 日

同济大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。

签名：

年 月 日

摘 要

城市交通系统中交通分配的建模问题一直是世界各国研究者们关注的重点。自从 Wardrop 提出了“用户平衡条件”(user equilibrium condition) 的概念后,网络平衡分析方法就成为了交通分配模型研究中最广泛的方法。交通分配问题的研究经过半个世纪的发展,在分配模型和计算方法上都产生了丰富的成果。交通分配技术已经从最初仅能解算十几个路段的算例网络,到今天已能处理大规模的真实城市交通网络。

在交通分配问题的研究中,由于对交通系统假设的不同,通常将处理交通平衡分配问题的数学规划模型分为两大类:离散型模型和连续型模型。离散型模型将交通系统抽象为由节点集合和有向弧集合组成的网络。连续型模型则是将整个交通网络视为一个连续体,假设交通网络属性地变化是微小的、逐步过渡的;其数学模型可以用光滑的数学函数来表示。对于较大范围的路网,离散型模型的解算需要收集大量的路段属性数据和 OD 数据,同时耗费大量的计算时间,其结果常常不能令人满意;而连续型模型通常只需要少量的路网特征参数,其计算的效率高,计算的结果直观。

本文在回顾交通分配模型的研究成果的基础上,对连续型模型进行了深入的研究,探讨了建模方法、用户平衡证明、数值求解方法等内容,并将理论研究的成果应用于实际,检验了模型的有效性。

本文的组织如下:

第一章:交通平衡分配问题的综述;

第二章:离散型交通分配模型及数值解法;

第三章:弹性需求情况下的连续型交通分配模型及数值解法;

第四章:竞争性交通枢纽设施空间分析模型、敏感性分析方法及数值解法;

第五章:连续/离散混合体系中的平衡分配模型及其数值解法;

第六章:对全文进行总结,提出需要进一步研究的问题。

关键词: 交通分配, 用户平衡, 连续模型, 区域分析, 复合交通系统, 有限元方法, 弹性需求, 敏感性分析

ABSTRACT

The traffic assignment problem in congested city has been a mainstream topic for the researchers throughout the world. After the hypothesis of user equilibrium condition was proposed by Wardrop, network equilibrium analysis method has been recognized a strong tool to solve traffic assignment problem. The rapid development of the transportation network equilibrium problem during the past decades has led to a large body of literature that was devoted to the theory of equilibrium prediction and to computer algorithm. Though traffic assignment technology can only solve a few links network sample at first, it has developed to solve the large real urban transportation network.

Two general approaches can be classified in the literature to deal with the network equilibrium problems for the different hypothesis of transportation system. The first is the discrete model of transportation network in which the zones are identified as nodes in space and the roads are treated as links between these nodes, and another approach is the continuous model of the network problems. The major assumption of the latter form of modeling is that differences between adjacent areas within a network are relatively small, compared with the variation over the entire network, and hence the characteristics of the network can be represented by smooth mathematical functions. For a very large network, the former modeling needs many link parameters and OD data. It consumes enormous computer time and the result is not satisfying. The latter modeling usually involves a small number of parameters. The computational effort of this modeling is much reduced and the analytical solution is intuitionistic.

Based on the literature review of traffic assignment problem, this paper extends study on continuous modeling, including modeling method, theory deduction, computer algorithm and so on. Both the numerical samples and application sample demonstrate the effectiveness of the proposed methodology.

This paper is organized as follows. Section 1 reviews literature about the problem of traffic assignment. Section 2 describes the discrete modeling of transportation equilibrium network and solution algorithm. Section 3 presents a continuous modeling with elastic demand and solution algorithm for the modeling. Section 4 discusses a continuous equilibrium modeling to analyze competitive problem of public transportation pivotal facilities, the sensitivity analysis method for

this modeling and solution algorithm. In section 5, a traffic equilibrium model for the discrete/continuous transportation system is developed and solution algorithm for this modeling is provided to solve the optimization program. In section 6, conclusion and further study problems are proposed.

Keywords: Traffic Assignment, User Equilibrium, Continuous Modeling, Regional Analysis, Combinative Transportation System, Finite Elements Method, Elastic Demand, Sensitivity Analysis

目录

第一章 序言

- 第一节 研究背景
- 第二节 交通中的供需平衡关系
- 第三节 平衡分配模型的发展
- 第四节 平衡分配模型的数学体系
- 第五节 本文研究的技术路线及主要内容

第二章 经典离散模型及其解算方法

- 第一节 离散网络描述及符号定义
 - 2.1.1 城市交通网络描述
 - 2.1.2 起讫点及OD矩阵
 - 2.1.3 路阻函数
 - 2.1.4 符号定义
- 第二节 用户平衡数学规划模型
 - 2.2.1 Beckmann平衡配流模型
 - 2.2.2 用户平衡条件等价性证明
 - 2.2.3 唯一性条件证明
 - 2.2.4 系统最优与用户平衡
 - 2.2.5 Braess诡异
- 第三节 求解离散平衡分配模型
 - 2.3.1 Frank-Wolfe算法
 - 2.3.2 应用Frank-Wolfe算法求解平衡配流模型
- 第四节 小结

第四章 连续模型在公共交通设施

- 第一节 研究回顾
- 第二节 基本假设及符号说明
 - 4.2.1 城市模型
 - 4.2.2 出行选择行为

第三节 平衡分配数学规划模型

4.3.1 数学规划模型

4.3.2 用户平衡与出行选择行为条件

第四节 模型的数值解法

4.4.1 有限元方法

4.4.2 算法的一般过程

第五节 敏感性分析

4.5.1 隐函数定理的应用

4.5.2 不同参数的敏感性分析公式

4.5.3 应用分析

第五节 珠江三角洲机场竞争性分析

第六节 小结

第五章 连续/离散混合型交通分配模型

第一节 城市交通网络

5.1.1 混合体系

5.1.2 弹性交通需求函数

5.1.3 交通流函数

5.1.4 路阻函数

5.1.5 流量守恒原理

第二节 数学规划模型

5.2.1 混合体系模型

5.2.2 连续体系部分

5.2.3 离散体系部分

5.2.3 固定点问题 (Fixed Point Problem)

第三节 模型的解算方法

5.3.1 连续体系部分

5.3.2 离散系统部分

5.3.3 牛顿迭代算法 (Newtonian Algorithm)

5.3.4 解算方法的一般步骤

第四节 算例

第五节 小结

第六章 结论与展望

第一节 主要结论

第二节 研究展望

第一章 序言

第一节 研究背景

当人类的祖先从高耸的树端来到地面时，他们面临的第一个问题就是：路该如何走？可以说交通出行的问题伴随着人类文明开始就已经出现了。在人类文明发展的初期，交通问题主要是交通工具的更新。在人类文明的发展历史中，交通工具的更新常常会给社会的发展提供极大的动力。到了19世纪，城市的交通运输有了很大的发展，虽然绝大部分交通工具还是由私人拥有，但出现了一些公共交通运输工具；同时，出于为战争服务的目的，政府在城市之间修筑了一些公路，提供了城市间交流的途径。在这个时期，城市交通运输系统初步形成。但是，受各方面条件的制约，这一初级的交通系统存在着很多的缺陷。当人类社会进入汽车时代后，交通运输方面的许多问题，特别是交通拥挤问题就渐渐成为了困扰城市发展的难题。今天，交通已经成为了人类生活中不可或缺的一部分，在人际交往和物资交流的各方面都需要通过交通来实现。交通运输的发达程度已成为一个国家（或地区）经济发达程度的标志。但伴随着交通运输系统的高速发展，道路阻塞、交通事故频繁发生，带来的负面效应也越来越严重。交通问题已成为了困扰全世界的一个难题，没有一个国家能够例外。

在这样的背景下，交通运输规划模型的研究工作从上世纪40年代开始兴起。由于各国政府的重视，相关的方法和技术发展迅速。今天，交通运输规划已经发展成为了以城市为主要研究对象，综合考虑土地利用和运输规划的系统工作。在过去的半个多世纪中，各国的研究人员尝试了很多方法，建立各种规划模型。Richardson在总结交通运输规划模型的发展历程时将其划分成五个发展阶段^[1]：

- 1) 第一阶段是在1969年以前，它被称为集合模型阶段（the era of aggregate modeling）。在这一阶段里面，传统的四阶段模型得以建立并用于处理预测交通需求。
- 2) 第二阶段是从70年代初期至末期，它被称为离散型出行需求模型阶段（the era of disaggregate travel demand modeling）。在此阶段，交通需求并非通过“汇总”、“平均”得到，而是通过离散的出行行为或是概率模型来处理交通需求。
- 3) 第三阶段是从70年代末期到80年代初期，可以称为出行选择行为模型阶段（the era of behavioral travel choice modeling）。在交通规划中最重要的参数是出行次数，这类模型考虑了人的心理因素对出行次数的影响。
- 4) 第四阶段从80年代初到80年代末，称为活动模型与观测技术阶段（the era of activity modeling and survey methodology）。
- 5) 第五个阶段是从80年代末开始，所谓的微电脑革命阶段（the era of microcomputer revolution）。利用信息技术发展的成果，传统的四阶段模型又得到了重新使用和发展。

在交通规划模型60多年的发展过程中，产生了以四阶段模型法为代表的经典方法，并得以不断改进和发展。四阶段模型法的四个核心部分是：出行发生、出行分布、方式选择和交通

量分配。这四部分工作实际上解答了四个问题：有多少出行会产生？出行者将去哪里？出行者将选择什么交通方式？出行者将选择什么路线？以四阶段模型法为基础，依据不同的假设条件，可以对四个核心部分进行不同的组合，从而产生不同的模型体系。

本文研究的工作是四阶段模型法中交通量分配模型研究的深入和扩展。事实上,不同类型的交通分配模型都有其特定的假设条件,因而其适用的范围是有限的。针对交通规划的不同要求,应该采用不同的交通分配模型。本文研究的主要内容是建立解决大区域内的交通分配问题的交通分配模型。在这一层次上,传统的离散型交通分配模型不能给出很好的结果,而已有的连续型模型也有所欠缺。在综合考察了传统的离散型交通分配模型和连续型交通分配模型后,本文采用了一些新的思想和手法,提出了改进的连续型交通分配模型,最后建立了适于大区域交通分配的离散/连续混合交通体系的交通量分配模型,并给出了相应的数值解算方法。此类模型在区域经济分析、交通规划等方面的都有相当的应用价值。

第二节 交通中的供需平衡关系

交通拥阻问题的产生从根本上来说都是交通运输系统提供的服务无法满足交通出行需求。交通分配模型研究的核心内容就是寻找不同环境下交通系统提供的服务和交通需求之间的平衡关系。随着交通量的增加,出行者所选择最短路径的出行时间也会随之增加。当最短路径的出行时间增加到一定程度之后,最短路径的出行时间会由于交通拥挤而变得大于次短路径的出行时间。这时,一部分的出行者会转向新的最短路径。同样,新的最短路径也会由于交通量的增加而降为次短路径。如果所有的道路利用者都能准确知道各条道路的所要时间并选择出行时间最短的路径的话,最终出行起点和终点这两点之间被所有被利用的路径的出行时间都会相等,而那些没有被使用的各条路径的出行时间都是大于被利用路径的出行时间的。此时,出行者不能通过单独改变自己的路径而缩短其出行时间,交通网络上的交通流达到一个稳定的状态,我们称这种状态为交通网络的平衡状态。这一平衡状态的形成与经济学中的供需平衡状态的形成是类似的,因而在交通规划模型的研究中,我们借用了供需平衡的分析方法。

在古典经济学中,市场被划分为相互影响的两个方面:买方和卖方。供给和需求函数则是分析买方和卖方关系最基础、最重要的工具。供给函数描述了商品卖方的行为,当价格上升时,商品的供应量就会增加;需求函数则描述了买方的行为,当价格上升时,买方的需求量就会下降。图 1.1a 中,供给函数和需求函数的交叉点 (P^*, Q^*) 被称为平衡点,当价格定在 P^* 时,商品的供应量全部被需求方买走。这一供需平衡关系会应为价格的变动而改变。如果价格抵于 P^* 时(如图 1.1b 所示),商品的生产量低于消费量,出现供不应求的情况,生产商为了利益就会抬高价格,而需求量因此而下降,供、需两会逐渐走向平衡点。如果价格定的过高(如图 1.1c 所示),商品的供应量就高于消费量,这时就会产生库存,卖方不得不降低价格,买方的需求也会相应增加,这样的市场行为会让价格组建走向平衡点。

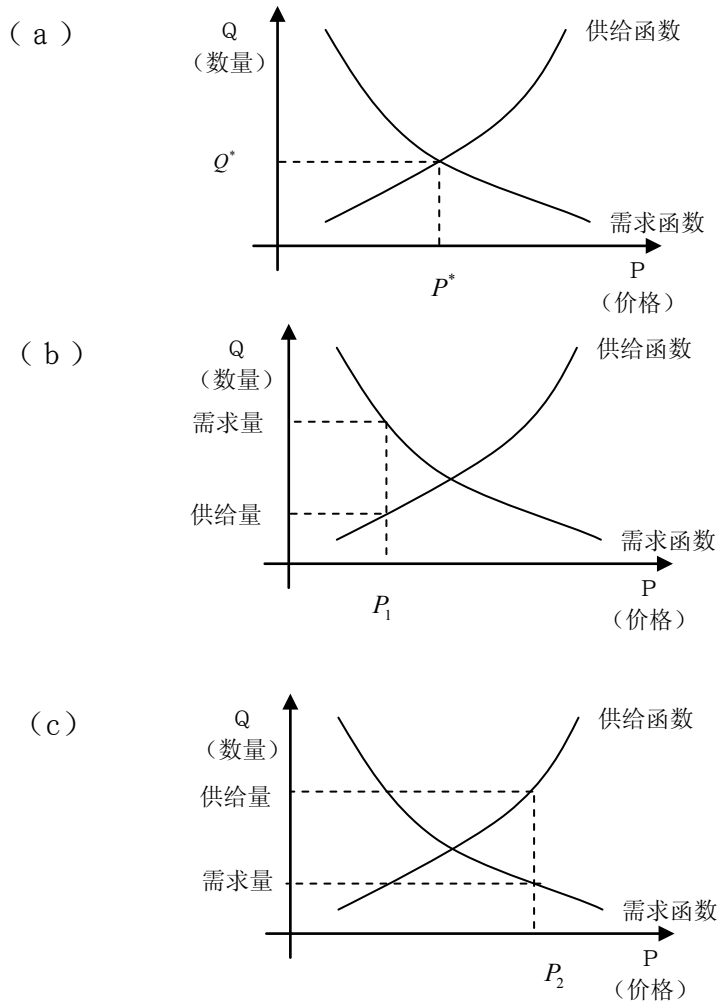


图 1 供需平衡图

在实际的生活中，许多商品的价格并不是供给和需求的唯一决定因素。商品的很多特性都会影响到供给和需求，这时，我们可以用特性函数来代替供应函数。特性函数并不具备供给函数的经济意义，它只是表征一种物理现象，但特性函数与需求函数的平衡关系与供给函数和需求函数的平衡关系是类似的。

对于交通运输系统而言，流量与服务质量相关是其基本的特征。在对交通运输系统进行系统分析时，特性函数的自变量就是拥挤程度，拥挤导致出行时间和费用的增加，从而影响了交通出行产生的数量。交通出行量和交通特性函数（交通拥挤）之间的平衡关系是交通运输系统分析，特别是交通量分配研究中的核心问题，因而交通量分配的相关模型又被称为平衡分配模型。

Knight (1924 年) [2] 最早在交通分配问题的研究中提出了平衡的概念。但交通分配研究中最著名、影响最大的平衡概念是Wardrop提出的。1952 年，他在论文“Some theoretical aspects of road traffic research” [3] 中给出了“用户平衡条件” (user equilibrium condition) 的准确定义：每个OD对之间所有被选用的路线具有相同的出行费用，并且没有任

何一条未被选用的路线会具有更低的费用。用户平衡条件又被称为Wardrop平衡准则，这一平衡准则可以理解为，如果这种平衡情况没有达到，那么至少有一些司机可以通过改变路线来减少出行费用。在交通平衡分配模型的半个世纪的发展中，Wardrop提出的用户平衡条件一直被视为交通平衡分配模型需要满足的基本条件。

“用户平衡条件”是本文研究的所有模型都要求满足的基础条件，平衡关系是贯穿了本文各部分的核心关系。

第三节 平衡分配模型的发展

在Wardrop提出了“用户平衡条件”的定义后，1956年，Bechmann等人^[4]提出的满足用户平衡条件的数学规划模型就是最经典的离散型模型。Bechmann等人采用K-K-T定理证明了模型优化解存在的必然性和唯一性。Bechmann等人提出离散型数学规划模型时虽然证明其有稳定的解存在，但当时并没有给出有效的求取模型解的方法。有趣的是，求解固定需求的离散型平衡分配模型的标准方法——Frank-Wolfe法^[5]也是在1956年正式发表的。这一方法最初是用来解决线性规划问题中的一个子问题的，其后被引入求解交通分配模型，并被证明是很有效的收敛性算法。

在Bechmann等人提出的数学规划模型的基础上，研究者们又对离散型平衡分配模型深入进行了多方面的探讨。Dafermos (Dafermos, 1968; 1972; Dafermos and Sparrow, 1969; 1971)^[6-9]研究了多种固定需求的交通分配问题，并根据不同的属性假设建立了多个数学规划模型。但是她提出的模型，以及Leventhal等人(1973)^[10]对她提出模型的扩展都不能满足大规模道路网络应用的需求。Gibert (1968)^[11]和Bruynooghe等人(1969)^[12]分别提出了两种收敛的解算方法。但是这两种算法都需要存储可行的路径，这对解算大型的路网仍不适用。Murchland (1970)^[13]采用求解凸规划问题的方法研究了Bechmann的模型，证明了模型解的存在性和唯一性；同时也证明了上述一般性求解算法的收敛性。LeBlanc (1975)^[14]应用Frank-Wolfe方法来求解固定需求的平衡分配模型，并给出了一个测试的算例。Nguyen (1974; 1976)^[15,16]对求解固定需求的平衡分配模型的多种可行方法，包括需要存储可行路径的方法，进行了比较和评价。LeBlanc等人(1984)^[17]和Florian等人(1983)^[18]利用数学规划方法中的一些新的研究成果改进了Frank-Wolfe方法，提高了它的收敛速度。

Aashtiani (1981)^[19]，Fefnandez和Friesz (1983)^[20]在他们的论文中分别作了交通出行中的出行数量与出行费用相关的描述，这一类问题又被称为弹性需求问题。在数量——费用的描述中，目标函数的费用部分根据数量变量表示，目标函数的需求部分利用价格变量表示，价格和数量的相互关系由约束的需求函数当作价格反函数显含的表示。类似地，在价格——数量描述中，目标函数的费用部分利用价格变量表示，需求部分由出行数量变量表示，价格和出行数量的相互关系由约束中的出行时间或费用等式显含地描述。

在模型研究和解算方法不断进展的同时，离散型平衡分配模型在城市交通规划中也取得了很多实际的应用。1976年，Florian和Nguyen^[21]采用温尼伯湖地区的实际数据，做出了令人信服的交通分配实例。Eash等人(1979)^[22]将第一版的Frank-Wolfe方法用于了芝加哥地区的交通规划研究(Chicago Area Transportation Study, CATS)。Dial采取了Murchland的建议，将平衡配流模型的解算方法——Frank-Wolfe方法写入了城市交通规划系统手册(US

Department of Transport, 1979)^[23]中。Dow (1979)^[24]在应用中发现,如果在求解时使用较好的解作为初始解,比如在进行芝加哥地区新的交通分配(1979)时采用上一次的交通分配结果(1960),算法的收敛速度会明显提高。今天,离散型平衡分配模型Bechmann模型及其标准收敛算法Frank-wolfe方法已经成为了城市交通分配中应用最广泛的模型和算法。

经过近一个世纪的发展,离散型交通分配模型的理论架构已较为完善,但在实际应用中,特别是解算大型网络仍存在一些问题。首先是基础资料的获取困难,大量的路段属性数据和OD数据都是较难取得的。其次是在节点多、可选路线多的情况下,算法所需的时间长、占用的资源多,而常常不能得到收敛的结果,有时还会发生分配的结果与定性分析的结果不符的情况。另外,OD点选取与实际交通情况的产生也有较大的差异,不同OD点选取的方案对最终的分配结果有很大的影响。

近年来,交通平衡模型的研究中又出现了许多新的理论,其研究的热点主要集中在三个方面:(1)动态交通分配模型;(2)多模式混合交通体系;(3)连续型平衡分配模型。

- (1) 动态交通分配模型是将时间参数引入静态平衡交通分配模型的一种建模方法。传统的静态交通分配模型是以城市交通规划和设计为目标,而动态交通分配模型是以描述城市交通拥堵特性和城市的交通管理和控制为目标。考虑了时间因素后,简单的一维静态模型变成了复杂的二维动态模型,这为交通控制系统和路径诱导系统提供了技术基础。Carey(1987)^[25]提出了一个改进的Merchant—Nemhauser模型,得到一个良好的非线性凸规划模型,但它带来了令人不快的FIFO(First In First Out)控制特性。Ran 和 Boyce等(1993)^[26]建立了动态分配的连续的最优控制问题模型,并把它转化为离散的非线性规划问题求解。加拿大Montreal大学的Florian, M.和INRO咨询公司的Mahut, M.、Tremblay, N. (2002)^[27]提出了基于仿真的动态迭代交通平衡分配模型。
- (2) 多模式混合交通体系是指在交通系统中可供选择的出行方式有两种或以上。多种交通方式混合是城市交通系统的一个主要特征,而传统的平衡分配模型多是基于单一的交通出行方式,不能很好的解决城市交通体系中换乘的问题。加拿大Montreal大学的Florian, M.等人(2000年)^[28]建立了基于弹性需求的多模式交通平衡分配的变分不等式模型。美国Illinois大学的Bar-Gera, H.和Boyce, D. (2002)^[29]将一般混合模式的交通体系发展为固定点问题的模型。香港理工大学的Wu, Z. X.和Lam, W. H. K. (2002)^[30]提出了拥挤状态下机非混合的固定需求交通平衡分配模型。荷兰Delft大学的Bovy, P. H. L.^[31]运用超级网络的手段处理了多模式网络条件的交通分配问题。
- (3) 连续型平衡分配模型是将交通系统抽象为平面二维的区域,并假设区域属性的变化是微小的,属性函数可以用光滑的连续函数来表示^[32]。与传统的离散型模型比较,连续型模型涉及的参数要少的多,解算模型所需的时间也少很多;另一方面,模型的交通需求在分析区域内连续分布产生,简化了OD矩阵的获得过程,也更符合实际情况。连续型平衡分配模型的结果直观,交通密度、出行费用等势图等更是传统离散型分配模型所不能完成的。已有的研究成果表明,在大范围、全局性的交通规划和客、物流管理中,使用连续型平衡分配模型有很好的效果。本文的工作就是连续型交通分配模型研究的深入和扩展。

连续型模型方法的起源可以追溯到 19 世纪初的区域经济学研究中，地理经济学家 Thunen (1826)^[32] 在区域位置分析中提出了连续模型的思想。其后，这一方法在区域经济学中得到了发展。Cauchon (1925)^[32] 较早地在交通分配中尝试使用连续模型的方法，他采用六边形系统来模拟道路网络，并用半定性的连续方法进行分析。随着交通分配模型成为交通规划研究的热点，出现了大量的有关连续型交通分配模型的研究文献。我们可以将这类研究文献分为两类：特定城市形态模型和一般城市形态模型。

所谓特定城市形态模型就是指模型研究的城市区域是理想化的区域形式（如圆环形等）。Lam和Newell (1967)^[35] 建立了由环形和放射形道路构成的连续体城市模型，并得到了与流量相关的交通分配微分方程式。Zitron (1974)^[36] 构建了环形城市连续体交通网络模型，可以寻找最优费用的路线，从对称的辐射状交通网推导出的欧拉—拉格朗日方程（Euler-Lagrange equation）可以采用积分的方法来解算。D' Este (1987)^[37] 研究了有少量放射性道路的城市交通分配模型。他在出行点连续分布、城市道路网由环状道路和辐射道路组成的城市模型基础上建立了交通出行空间分配的微分方程。Wong (1994)^[38] 将这一模型重写为在一定约束条件下目标函数最小的最优化问题，并采用指数展开的方式来求解这一模型。Wong和Tong (1996)^[39]、Wong等人 (1996)^[40] 讨论了主要道路为环形道路的圆形连续城市区域中，出行阻抗与流量相关得多D交通分配问题。

一般城市形态模型是指模型研究的城市区域没有特别的形状限定。Beckmann (1952)^[41] 最早在这方面进行尝试。他研究了一般形态连续区域中出行费用最小的城区内部交通分配问题。他将连续区域的边界定义为有限数量的光滑弧段，并类比在其他方面有较多应用的势能梯度公式，建立了连续交通系统中的微分方程。Wardrop (1971)^[42] 认为单位出行费用与位置和方向有关，他以寻找最小出行费用的路径为基础建立了相关模型。Williams和Ortuzar (1976)^[43] 将连续模型的方法和传统的离散模型的方法加以比较。Puu (1977)^[44] 定义了连续模型中交通流的相关概念。Buckley (1979)^[45] 用二维连续区域来代替离散交通网络体系来处理交通分配问题。他对一个OD对的情况进行了处理，并将这一做法扩展到 3 个和 4 个OD对。Dafermos (1980)^[46] 在交通出行连续分布于整个交通网络的假设基础上构造了交通分配模型。Dafermos的模型考虑了交通流量守恒问题，并分别推导了用户平衡条件下和系统最优条件下的不同模型。

上述的研究大部分都集中于对一般城市形态连续交通分配模型理论的研究，而解算这类模型的有效数值算法——有限元算法，最早是在Taguchi和Iri (1982)^[47] 的论文中出现。Taguchi和Iri应用有限元算法处理了连续区域中的三类问题：最大交通流问题，最短路径问题和最小费用问题。Sasaki等人 (1990)^[48] 将连续区域中的用户平衡问题转化为了求解一系列约束条件下的目标函数最小值的最优化问题。在Sasaki等人的研究中，运用有限元方法求解模型可以得到城市区域中每个位置的费用势能，以及使用势能函数求得交通流密度。Wong等人 (1998)^[49] 研究了一般城市形态的交通分配模型，对有限元算法进行了修正和扩展，提出了计算结果较为稳定的修正有限元算法。Wong, S. C. (1999, 20002, 20003)^[50-52] 和Yang, H. (2000)^[53] 等人相继提出了弹性需求和多D点的连续模型，并给出了改进的解算方法。

交通平衡分配模型的研究工作在国际上一直是研究的热点之一，包括交通工程、城市规划、区域经济乃至系统工程、经济学等方面的专家和学者都很关注这方面的研究。而这一国内在这一领域的研究水平与之相比尚有不小的差距。黄海军所著的《城市交通网络平衡分析理论