中等职业教育课程改革规划教材

中等职业教育教材编审委员会审定

数　　学

（基础模块）

下　册

主　编　任少英　曾宪华　卢荣闯

副主编　王　明　董加成　王春秋

UESTCP 电子科技大学出版社

前言 Preface

本套教材是中等职业教育课程改革国家规划教材，根据教育部 2009 年颁布的《中等职业学校数学教学大纲》(简称"教学大纲")编写。教材内容的选取严格按照"教学大纲"规定的"教学内容与要求"，遵循"教学大纲"对认知要求和技能与能力要求的规定。

本书是《数学(基础模块)上册》，主要体现了以下编写特色：

1. 突出基础性。在保证科学性的基础上，不刻意追求学科体系的完整性，降低教材难度，减轻学生负担。

2. 突出职业性。选择与生产岗位相关的素材，与职业岗位的数学实际应用相结合，体现数学知识在职业中的应用。

3. 体现普及性教育的特征。从学生实际状况出发，做好与九年制义务教育阶段的衔接，从学生学过的知识中，提出问题，通过引申、拓展来讲解新知识。

4. 体现分层教学的思想。考虑到学生基础的差异性，教材在部分章节中，安排了例题，并在章复习题和节习题中安排了 **A**、**B** 两组题目，以适应不同层次学生的需求。

5. 体现时代特征。一方面，落实"教学大纲"对计算器使用的要求，相关知识点与计算器的使用相整合；另一方面，落实"教学大纲"对计算机软件的使用要求，在教材中把教学内容与常用计算机教学软件有机地结合起来，利用软件的强大功能，方便教师的教学，提升学生对数学的理解。

6. 紧密结合学生生活中的实际问题。一方面，从生活中的实际问题引入数学概念；另一方面，利用数学知识解决生活中的实际问题，体验数学知识的应用。

7. 语言文字简洁、准确、流畅，通俗易懂。数学符号的使用严格执行国家有关的技术标准和规定。

8. 全套教材的编写注重基础模块与职业模块、拓展模块之间的衔接，并体现不同模块之间的差异性。

本书是基础模块上册，内容包括：数列、平面向量、直线和圆的方程、立体几何、概率与统计初步。完成本书内容需要 68 学时，学时分配见下表：

学时分配表

章内容	学时数	章内容	学时数
第六章　数列	10	第九章　立体几何	14
第七章　平面向量	10	第十章　概率与统计初步	16
第八章　直线和圆的方程	18		

由于编者的学术水平有限，时间仓促，书中难免存在不足之处，敬请读者提出宝贵的意见和建议。

目 录 Contents

第6章　数　列

在生活和工作中，我们经常会遇到按照一定次序排列的一列数，如某礼堂第1排至第25排的座位数依次为

$$22,24,26,28,\cdots,70,$$

要计算某一排的座位数或前几排的座位数之和，就需要应用数列的知识.

本章将学习数列、等差数列、等比数列的概念及相关的计算，并通过实际例子，了解它们在实际生活中的应用.

6.1　数列的概念

6.1.1　数列的定义

将正整数从小到大排成一列数为

$$1,2,3,4,5,\cdots. \qquad (6\text{-}1)$$

将 2 的正整数指数幂从小到大排成一列数为

$$2,2^2,2^3,2^4,2^5,\cdots. \qquad (6\text{-}2)$$

当 n 从小到大依次取正整数时，$\cos n\pi$ 的值排成一列数为

$$-1,1,-1,1,\cdots. \qquad (6\text{-}3)$$

某报告厅共 25 排座位，各排座位数按照从前到后的顺序排成一列数为

$$22,24,26,28,\cdots,68,70. \qquad (6\text{-}4)$$

提示

数列的"项"与这一项的"项数"是两个不同的概念. 如数列 (6-2) 中，第 3 项为 2^3，这一项的项数为 3.

像上面的实例那样，按照一定的次序排成的一列数叫作**数列**. 数列中的每一个数叫作数列的**项**. 从开始的项起，自左至右排序，各项按照其位置依次叫作这个数列的第 1 项（或**首项**），第 2 项，第 3 项，…，第 n 项，…，其中反映各项在数列中位置的数字 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 分别叫作对应的项的**项数**.

只有有限项的数列叫作**有穷数列**，有无限多项的数列叫作**无穷数列**.

由于从数列的第一项开始，各项的项数依次与正整数相对应，所以无穷数列的一般形式可以写作

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots(n\in\mathbf{N}^*)$$

简记作 $\{a_n\}$. 其中，下角码中的数为项数，a_1 表示第 1 项，a_2 表示第 2 项…当 n 由小至大依次取正整数值时，a_n 依次可以表示数列中的各项，因此，通常把第 n 项 a_n 叫作数列 $\{a_n\}$ 的**通项**或**一般项**.

想一想

上面的 4 个数列中，哪些是有穷数列，哪些是无穷数列？

6.1.2　数列的通项公式

一个数列的第 n 项 a_n，如果能够用关于项数 n 的一个式

子来表示，那么这个式子叫作这个数列的**通项公式**. 可以用花括号将这个式子括起来，表示对应的无穷数列.

例如，数列(6-1)的通项公式为 $a_n=n$，可以将数列(6-1)记为数列$\{n\}$；数列(6-2)的通项公式为 $a_n=2^n$，可以将数列(6-2)记为数列$\{2^n\}$.

例 1 根据下列各无穷数列的前 4 项，写出数列的一个通项公式.

(1)5，10，15，20，…；

(2)$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{8}$，…；

(3)-1，1，-1，1，….

分析 分别观察分析各项与其项数之间的关系，探求用式子表示这种关系.

解 (1)观察发现，每一项都恰好是其项数的 5 倍，故数列的一个通项公式为

$$a_n=5n.$$

(2)观察发现，各项都是分数，分子都是 1，分母恰好是其项数的 2 倍，故数列的一个通项公式为

$$a_n=\frac{1}{2n}.$$

(3)观察发现，各项的绝对值都是 1，符号为负、正相间，各项恰好为底为-1指数为其项数的幂，故数列的一个通项公式为

$$a_n=(-1)^n.$$

注意

由数列的有限项探求通项公式时，答案不一定是唯一的. 例如，$a_n=(-1)^n$ 与 $a_n=\cos n\pi$ 都是例 1(3)中数列的通项公式.

例 2 设数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=\frac{1}{2^n},$$

写出数列的前 5 项.

分析 知道数列的通项公式，求数列中的某一项时，只需将通项公式中的 n 换成该项的项数，并计算出结果.

解 $a_1=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2}$；$a_2=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$；$a_3=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$；$a_4=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$；

$a_5=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$.

例 3　判断 16 和 45 是否为数列$\{3n+1\}$中的项，如果是，请指出是第几项.

分析　如果数 a 是数列中的第 k 项，那么 k 必须是正整数，并且 $a=3k+1$.

解　数列的通项公式为 $a_n=3n+1$. 将 16 代入数列的通项公式有

$$16=3n+1,$$

解得

$$n=5\in\mathbf{N}^*.$$

所以，16 是数列$\{3n+1\}$中的第 5 项.

将 45 代入数列的通项公式有

$$45=3n+1,$$

解得

$$n=\frac{44}{3}\notin\mathbf{N}^*,$$

所以，45 不是数列$\{3n+1\}$中的项.

练习题6.1

1. 已知下列各数列的通项公式，分别写出各数列的前 5 项：

   (1) $a_n=5n+3$；

   (2) $a_n=n^3\cdot(-1)^{n-1}$；

   (3) $a_n=\frac{2n+1}{2^n}$；

   (4) $a_n=\cos\frac{n\pi}{2}$.

2. 根据下列各数列的前 5 项，写出数列的一个通项公式：

   (1) $\frac{1}{1\times2},\frac{1}{2\times3},\frac{1}{3\times4},\frac{1}{4\times5},\frac{1}{5\times6}$；

   (2) $\sqrt{2},-\sqrt{3},\sqrt{4},-\sqrt{5},\sqrt{6}$；

   (3) $\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5},\frac{6^2-1}{6}$.

3. 判断 22 是否为数列$\{n^2-n-20\}$中的项，如果是，请指出是第几项.

6.2 等差数列

6.2.1 等差数列的定义

在生活中,我们会遇到这样的特殊数列:

(1)我们经常这样数数,从 0 开始,每隔 3 数一次,可以得到数列:0,3,6,9,12,….

(2)小明一开始只会 5 个英文单词,他决定从今天起每天记 10 个单词,那么从今天开始,他的单词量逐日增加,依次为:5,15,25,35,….

(3)2000 年,在悉尼奥运会上,女子举重首次作为比赛项目,且共设置了 7 个级别,其中较轻的 4 个级别体重组成数列(单位:kg):48,53,58,63.

(4)为了保证水库中的优质鱼类有良好的生存环境,用定期放水清库的方法清理水库中的杂鱼,如果一个水库的水位为 20m,自然放水每天水位降低 2m,最低降至 4m.那么从开始放水算起,到可以进行清理工作的那天,水库每天的水位组成数列(单位:m):20,18,16,14,12,10,8,6,4.

> **提示**
> 从特殊入手,研究数学对象的性质,再逐步扩展到一般,这是数学常用的研究方法.

观察上面的 4 个数列有什么共同的特点?

对于数列(1),从第 2 项起,每一项与前一项的差都等于 3;

对于数列(2),从第 2 项起,每一项与前一项的差都等于 10;

对于数列(3),从第 2 项起,每一项与前一项的差都等于 5;

对于数列(4),从第 2 项起,每一项与前一项的差都等于 −2.

也就是说,这些数列有一个共同的特点:从第 2 项起,每一项与前一项的差都等于一个常数.

一般的,如果一个数列从第 2 项起,每一项与它前一项的差等于同一个常数,这个数列就叫作**等差数列**,这个常数就叫

作**等差数列的公差**(常用字母“d”表示).

上面的四个数列都是等差数列,公差依次是3、10、5、-2.

例1　判断下列数列是否是等差数列?如果是,公差是多少?

(1)$3,2,1,-1,\ -2,-3$;

(2)$\frac{9}{8},1,\frac{7}{8},\frac{6}{8},\frac{5}{8},\frac{4}{8}$;

(3)$7,7,7,7,7,\cdots$.

解　(1)因为

$a_2-a_1=-1$,

$a_3-a_2=-1$,

$a_4-a_3=-2$.

即从第2项起,每一项与前一项的差不等于同一个常数,所以不是等差数列.

(2)因为

$a_2-a_1=-\frac{1}{8},a_3-a_2=-\frac{1}{8},a_4-a_3=-\frac{1}{8}$,

$a_5-a_4=-\frac{1}{8},a_6-a_5=-\frac{1}{8}$.

即从第2项起,每一项与前一项的差都等于$-\frac{1}{8}$,所以该数列为等差数列,公差$d=-\frac{1}{8}$.

(3)该数列为一个常数列,从第2项起,每一项与前一项的差都等于0,因此该数列是公差$d=0$的等差数列.

因此,常数列一定是等差数列.

由三个数a,A,b组成的等差数列可以看成最简单的等差数列,这时,A叫作a与b的**等差中项**.

设公差为d,则$A=a+d,b=A+d=a+d+d=a+2d$,

所以$\frac{a+b}{2}=\frac{a+a+2d}{2}=A$,

即等差中项$A=\frac{a+b}{2}$.

例 2 已知 3 和 m 的等差中项为 -2，求 m 的值.

解 根据等差中项的公式得

$$-2=\frac{3+m}{2},$$

所以，$m=-7$.

6.2.2 等差数列的通项公式

已知等差数列 1，3，5，7，…，如何求该数列的第10 000项？

若等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1，公差是 d，则根据其定义可得：

$a_2-a_1=d$ 即：$a_2=a_1+d$，

$a_3-a_2=d$ 即：$a_3=a_2+d=a_1+2d$，

$a_4-a_3=d$ 即：$a_4=a_3+d=a_1+3d$.

由此归纳等差数列的**通项公式**为：

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

例 3 求等差数列 9，6，3，0，…的通项公式和第 1000 项.

解 该等差数列的公差 $d=-3$

所以该等差数列的通项公式为：

$$a_n=9+(n-1)\times(-3)=-3n+12$$

所以 $a_{1000}=-3\times1000+12=-2988$.

> **想一想**
>
> 对于所有的 n ($n\in\mathbf{N}^*$)，这个式子都成立吗？

例 4 -401 是不是等差数列 -5，-9，-13，…的项？如果是，是第几项？

解 由 $a_1=-5$，$d=-9-(-5)=-4$

得数列通项公式为：$a_n=-5-4(n-1)=-4n-1$

由题意可知，本题要回答是否存在正整数 n，使得 $-401=-4n-1$ 成立，解得 $n=100$，即 -401 是这个数列的第 100 项.

6.2.3 等差数列的前 n 项和公式

数学家高斯在上小学的时候就表现出极高的天赋. 据说，

老师在数学课上出了一道题目:“把 1 到 100 的整数写下来,然后把它们加起来!”

对于这些十岁左右的孩子,这个题目是比较难的.但是高斯很快就得到了正确的答案.此时其他的学生正在忙碌地将数字一个个加起来,额头都流出了汗水.

小高斯是怎样计算出来的呢?

他观察这 100 个数

$$1,2,3,4,5,\cdots,96,97,98,99,100.$$

发现 $1+100=101, 2+99=101, 3+98=101, \cdots$,依照这个规律,高斯将这 100 个数分成 50 对,并依次计算各对的和,得

$$1+100=101,$$
$$2+99=101,$$
$$3+98=101,$$
$$4+97=101,$$
$$5+96=101,$$
$$\cdots$$
$$50+51=101.$$

由此得到,前 100 个正整数的和为

$$101\times 50=5\ 050.$$

从小到大排列的前 100 个正整数,组成了首项为 1,第 100 项为 100,公差为 1 的等差数列.小高斯的计算表明,这个数列的前 100 项和为

$$\frac{(1+100)\times 100}{2}.$$

现在我们按照高斯的想法来研究等差数列的前 n 项和.

将等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和记作 S_n,即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n. \tag{6-5}$$

也可以写作

$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_3+a_2+a_1. \tag{6-6}$$

由于

$$a_1+a_n=a_1+a_n,$$
$$a_2+a_{n-1}=(a_1+d)+(a_n-d)=a_1+a_n,$$
$$a_3+a_{n-2}=(a_1+2d)+(a_n-2d)=a_1+a_n,$$

$\cdots$

将式(6-5)与式(6-6)两边分别相加,得

$$2S_n=n(a_1+a_n),$$

由此得出等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式为

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}. \tag{6-7}$$

即等差数列的前 n 项和等于首末两项之和与项数乘积的一半.

知道了等差数列$\{a_n\}$中的 a_1、n 和 a_n,利用公式(6-7)可以直接计算 S_n.

将等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入公式(6-7),得

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d. \tag{6-8}$$

知道了等差数列$\{a_n\}$中的 a_1、n 和 d,利用公式(6-8)可以直接计算 S_n.

> **想一想**
> 应用时,如何对公式(6-7)和公式(6-8)进行选择?

例 5 已知等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=-8$,$a_{20}=106$,求 S_{20}.

解 由已知条件得

$$S_{20}=\frac{20\times(-8+106)}{2}=980.$$

例 6 等差数列

$$-13,-9,-5,-1,3,\cdots$$

的前多少项的和等于 50?

> **想一想**
> 例题中为什么将负数舍去?

解 设数列的前 n 项和是 50,由于 $a_1=-13$,$d=3-(-1)=4$,故

$$50=-13n+\frac{n(n-1)}{2}\times 4,$$

即

$$2n^2-15n-50=0,$$

解得

$$n_1=10,n_2=-\frac{5}{2}(\text{舍去}).$$

所以,该数列的前 10 项的和等于 50.

练习题6.2

1. 写出等差数列

$$\frac{1}{5},\frac{3}{5},1,\frac{7}{5},\cdots$$

的通项公式,并求出数列的第 10 项.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中,

(1)$a_5=-1,a_8=2$,求 a_1 和 d;

(2)$a_1=12,a_6=27$,求 d;

(3)$d=-\frac{1}{3},a_7=8$,求 a_1.

3. 根据下列各题的条件,求相应等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n.

(1)$a_1=5,a_n=85,n=15$;

(2)$a_1=10,d=2,n=25$;

(3)$a_3=15,a_9=-9,n=-10$.

6.3　等比数列

6.3.1　等比数列的概念

(1)我国古代一些学者提出:“一尺之棰,日取其半,万世不竭.”用现代语言叙述为:一尺长的木棒,每日取其一半,永远也取不完,这样,每日剩下的部分都是前一日的一半,如果把“一尺之棰”看成单位“1”,可以得到下面的数列:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots$$

(2)培育水稻新品种,如果第一代得到 10 粒种子,并且从第一代起,以后各代的每一粒种子都可以得到下一代的 10 粒种子,那么每代的种子数可以得到下面的数列:

$$10,100,1000,10000,100000,\cdots$$

(3)某市今年的国内生产总值为 2 000 亿元,每年以 10%

的速度增长，那么该市从今年起的国内生产总值(单位:亿元)可以得到下面的数列：

2 000，2 000×1.1，2 000×1.1×1.1，2 000×1.1×1.1×1.1，2 000×1.1×1.1×1.1×1.1，…

上面的3个数列有什么共同的特点？

可以看到：

对于数列(1)，从第2项起，每一项与前一项的比都等于$\frac{1}{2}$；

对于数列(2)，从第2项起，每一项与前一项的比都等于10；

对于数列(3)，从第2项起，每一项与前一项的比都等于1.1.

也就是说，这些数列有一个共同的特点：从第2项起，每一项与前一项的比都等于一个常数.

一般的，如果一个数列从第2项起，每一项与它前一项的比等于同一个常数，这个数列就叫作**等比数列**，这个常数就叫作等比数列的**公比**(常用字母“q”表示).

上面的三个数列都是等比数列，公比依次是$\frac{1}{2}$、10、1.1.

想一想

既是等差数列又是等比数列的数列存在吗？如果存在，你能举出例子吗？

例1 判断下列数列是否是等比数列？如果是，公比是多少？

(1)2，2，2，2，2，2；

(2)0，0，0，0，0；

(3)$1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\frac{1}{243}$；

(4)2，8，32，64，128，…

解 (1)该数列为常数列，从第2项起，每一项与前一项的比都等于1，所以是等比数列，公比$q=1$.

(2)虽然该数列也为常数列，但由于0不能作分母，因此该数列不是等比数列.

(3)因为$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_5}{a_4}=\frac{a_6}{a_5}=\frac{1}{3}$，所以，该数列是等比

数列，公比 $q=\frac{1}{3}$.

(4) $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=4$，$\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_5}{a_4}=2$，因此，从第 2 项起，每一项与前一项的比不等于同一个常数，所以该数列不是等比数列.

由三个数 a,G,b 组成的等比数列可以看成最简单的等比数列. 这时，G 叫作 a 与 b 的等比中项.

设公比为 q，则 $G=aq$，$b=Gq=aq^2$，

所以 $ab=a\cdot aq^2=(aq)^2=G^2$.

即等比中项 $G=\pm\sqrt{ab}$.

例 2　已知 3 和 m 的等比中项为 9，求 m 的值.

解　根据等比中项的公式得

$9=\sqrt{3m}$

所以，$m=27$.

6.3.2　等比数列的通项公式

已知等比数列 3，9，27，81，…，如何求该数列的第 10 000项？

若等比数列$\{a_n\}$的首项是 a_1，公比是 q，则根据其定义可得：

想一想

等比数列的公比可以为 0 吗？

$\frac{a_2}{a_1}=q$ 即：$a_2=a_1q$

$\frac{a_3}{a_2}=q$ 即：$a_3=a_2q=a_1q^2$

$\frac{a_4}{a_3}=q$ 即：$a_4=a_3q=a_1q^3$

……由此归纳出等比数列的通项公式为：

$$a_n=a_1q^{n-1}$$

例 3　等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=-8$，$a_2=-4$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解　公比 $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$，则 $a_n=a_1q^{n-1}=-8\times(\frac{1}{2})^{n-1}$