

义务教育学科核心素养·关键能力

测评与教学

义务教育学科核心素养与关键能力研究项目组 著



图书在版编目(CIP)数据

义务教育学科核心素养·关键能力 测评与教学 小学
数学 / 义务教育学科核心素养与关键能力研究项目组著.

—南京: 江苏凤凰科学技术出版社, 2018.6

ISBN 978-7-5537-8715-2

I. ①义… II. ①义… III. ①小学数学课—教学研究
IV. ①G623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 287764 号

义务教育学科核心素养·关键能力 测评与教学
小学数学

著 者 义务教育学科核心素养与关键能力研究项目组
责任编辑 沈燕燕
责任校对 郝慧华
责任监制 曹叶平

出版发行 江苏凤凰科学技术出版社
出版社地址 南京市湖南路1号A楼, 邮编: 210009
照 排 南京紫藤制版印务中心
印 刷 江苏凤凰通达印刷有限公司

开 本 787 mm×1 092 mm 1/16
印 张 17.5
字 数 420 000
版 次 2018 年 6 月第 1 版
印 次 2018 年 6 月第 1 次印刷

标准书号 ISBN 978-7-5537-8715-2
定 价 55.00 元

图书如有印装质量问题,可随时向我社出版科调换。

丛书编委名单

董洪亮 董林伟 何 锋 叶 兵 李 亮
黄明旻 郭庆松 段承校 魏 惠 李 娜
于 蓉 吴举宏 戴苾芬 周世科

本书编著人员名单

主 编 郭庆松 王 林
编著人员 郭庆松 王 林 李 新
蔡宏圣 聂艳军 周晓军

迈出质量评价与教学改革的关键一步

江苏省教育厅副厅长
江苏省基础教育质量监测中心主任 朱卫国

从2006年开始,在教育部基础教育司设立的国家项目组的框架内,江苏省全面实施义务教育阶段学生学业质量监测,测试的年级是三年级和八年级,测试的科目包括小学语文、数学,初中语文、数学、英语和科学(物理、地理、生物学)等,共八个学科。实施质量监测的目的是向地方、学校和学科教师提供详细的、连续的质量信息,为课程教学的改进提供依据。2013年,国家项目组的项目实施结束以后,江苏决定继续独立地实施质量监测。

以监测的方式对学生学业质量进行测评,首先要解决一个“尺子”或者测评框架的问题。为此,江苏省基础教育质量监测中心办公室(江苏省中小学教学研究室)的同志,从2015年开始,专门设立了一个“义务教育学科核心素养与关键能力研究”项目,组织省内外八个学科一百多位专家,以项目研究的方式,从三个层面展开学科测评框架的研制。

第一个层面是建立义务教育阶段的学科核心素养结构。用“核心素养”贯穿课程的全过程,从关注“知识”转向关注“学生”,从“教书”转向“育人”,这是课程教学改革的根本价值追求。关于核心素养,还有三个方面值得关注。其一是核心素养的时代性。研究核心素养,本质上是研究人才培养。教育确立的人才培养观与时代发展的特点直接相关。与改革开放之初相比,中国的经济文化发展进入了新的阶段,教育培养的人才的规格,当然也需要重新设定。其二是核心素养的本土性。所有国家或者地区,都会对教育提出人才培养的规格要求。同时,本土性所指的“本土”,也会决定人才培养的具体内容。假定联合国教科文组织要在全球范围设定新的人才培养目标,推

进教育改革,其具体内容一定不会完全等同于某一个具体的国家。同样,在同一个国家,因为区域性差异的问题,在执行国家统一的、基本的人才培养规划的基础上,不同地区也可能会提出一些细化的、适应地方经济发展和文化发展的内容。比如,《江苏省中长期教育改革和发展规划纲要》中,就提出要建立符合省情的基础教育质量标准。这个质量标准一定要符合国家对年轻一代的基本要求,同时能够体现地方特点。其三是核心素养的层次性。我们可能会在不同层次上使用“核心素养”这个概念。比如,学生一般发展的核心素养和学科性的核心素养就处于两个不同层次。

我们在研制和建立义务教育阶段学科核心素养结构的时候,国家层面学生一般发展层次的核心素养结构已经建立,普通高中各学科的核心素养结构也已确定。这是我们研制工作最重要的依据和参照。但是,在国家层面,尚未正式开始研究和确立义务教育阶段各学科核心素养结构。如何根据时代发展的特点,适应江苏地方需要,建立义务教育学科层次的核心素养结构,是项目研究首先要解决的问题。我们的项目研究可以算作国家层面今后相关研究的前期探索。

第二个层面是建立各学科关键能力结构。在学科层次培养学生的核心素养不能流于空谈,需要得到课程意义上的落实,也就是要对学科核心素养具体化。具体化的依据是国家义务教育各学科的课程标准。正因为如此,可以说,我们开展的义务教育阶段学生学业质量监测,是严格依据课程标准的测试。“关键能力”的英文表达是“key competence”。“key competence”也可以翻译为“核心素养”,但是考虑到“核心素养”和“关键能力”这两个概念的区别,我们用“key competence”专门指称“关键能力”,而用“core competence”或者“core literacy”指称“核心素养”。词的翻译有可能不重要,重要的是我们希望体现“核心素养”和“关键能力”之间的层次差别。

第三个层面是建立学生在学科各关键能力方面的表现类型和表现水平的结构。江苏的测试从2006年开始,到目前,我们已经获得了大量的本省学生实际表现方面的数据。这些数据来自学生历年来的表现,规模庞大,为我们分析学生每一种关键能力的表现类型和表现水平提供了十分重要的支撑,也为我们今后建立各学科质量标准提供了重要的依据。

到2016年年底,上述三个层面的研究已基本完成。在这个基础上,项目

组又用了近一年的时间,加强了教学层面的研究。开展学科质量测评,最终的目的是改进学科教学的过程。从现实情况看,中小学教师在教学方面普遍存在两方面的困难。第一是很难从课程层面,整体地把握具体内容的教学目标。本项目三个层面的梳理和研究,应当能从这方面为广大教师提供帮助。第二是具体的教学目标确立以后,在如何实现这些目标方面存在一定的困难。为了帮助教师解决这两个方面的问题,项目组的同志们采用了举例的方式,为教师提供支持。各学科结合测评的结果,列举的例子非常多,主要的用意就是希望所举的例子尽量覆盖学科关键能力的各个方面。

经过项目组同志们近三年辛苦的努力,项目研究成果终于结集出版了。基于上面的这些考虑,我们把本套丛书的名称确定为“义务教育学科核心素养·关键能力 测评与教学”,并且,每一册的内容,大体也按这样的结构展开。作为项目研究的成果,我们真诚地希望这套丛书能为国家层面义务教育阶段学科核心素养的研制提供一些启发,能为教师在课程层面理解学科结构提供一些帮助,能为教师展开具体教学提供一些支持。当然,本项目研究的直接目的是为江苏省义务教育质量监测奠定基础,因此,这套丛书只包含义务教育阶段的八个学科,并且在每个学科中重点关注了相应的测试年级。覆盖更多学科与更多年级是我们今后需要继续完善的地方。

为这套丛书的出版,江苏凤凰科学技术出版社的编辑同志付出了大量的也是专业化的劳动,在此,谨向他们表示衷心感谢。

为了更好地研究义务教育各学科的结构问题和教学问题,也为了完善本套丛书的内容,我们真诚期待大家批评和指教。

2018年1月于南京

目 录

第一章 数学核心素养的内涵与构成	1
第一节 数学核心素养的内涵	1
第二节 小学数学核心素养的构成及其具体表现	12
参考文献	16
第二章 小学数学核心素养的测评	17
第一节 小学数学核心素养的关键能力分解与水平划分	17
第二节 小学数学核心素养与关键能力的测评	33
第三节 2016年江苏省三年级学生数学核心素养测评总体情况与分析	42
第三章 数学抽象素养的测评分析与教学策略	49
第一节 数学抽象素养的能力表现与标准	50
第二节 学生数学抽象素养发展水平测评与分析	64
第三节 发展学生数学抽象素养的教学策略	80
参考文献	92
第四章 逻辑推理素养的测评分析与教学策略	93
第一节 逻辑推理素养的能力表现与标准	93
第二节 学生逻辑推理素养发展水平测评与分析	99
第三节 发展学生逻辑推理素养的教学策略	118
参考文献	126
第五章 数学建模素养的测评分析与教学策略	127
第一节 数学建模素养的能力表现与标准	128
第二节 学生数学建模素养发展水平测评与分析	136
第三节 发展学生数学建模素养的教学策略	149
参考文献	157

第六章 直观想象素养的测评分析与教学策略	158
第一节 直观想象素养的能力表现与标准	159
第二节 学生直观想象素养发展水平测评与分析	167
第三节 发展学生直观想象素养的教学策略	190
参考文献	198
第七章 数学运算素养的测评分析与教学策略	199
第一节 数学运算素养的能力表现与标准	200
第二节 数学运算素养发展水平测评与分析	214
第三节 发展学生数学运算素养的教学策略	230
参考文献	246
第八章 数据分析素养的测评分析与教学策略	247
第一节 数据分析素养的能力表现与标准	247
第二节 数据分析素养发展水平测评与分析	254
第三节 发展学生数据分析素养的教学策略	262
参考文献	270
后 记	271

第一章 数学核心素养的内涵与构成

第一节 数学核心素养的内涵

任何教育活动都建立在对“培养什么样的人”这一基本问题的回答基础之上,我国义务教育法*指出,义务教育是“使适龄儿童、少年在品德、智力、体质等方面全面发展,为培养有理想、有道德、有文化、有纪律的社会主义建设者和接班人奠定基础”。随着信息时代所带来的知识爆炸效应,人们对教育目标的认识也不断深入,为将来的生活和进一步的学习准备足够的知识已逐渐成为一种狭隘的观念,面对瞬息万变的时代,不仅要使学生掌握必需的知识,形成基本的技能,更重要的是还应在此基础上形成灵活而又严密的思维、坚韧而又有条理的品格,以及积极向上的情感、态度与价值观。基于此,核心素养的提法应运而生,对核心素养的研究与探讨方兴未艾。作为一门基础学科,数学在教育活动中占有重要的地位,探讨数学核心素养的内涵及其基本构成,对于进一步深化课程改革有着重要的意义。

一、核心素养的提出与数学核心素养的发展历程

(一) 核心素养的提出:从国际共识到中国特色

教育部于2014年3月30日印发《关于全面深化课程改革 落实立德树人根本任务的意见》,这是教育部第一次在文件中明确提出核心素养。文件指出:“研究制订学生发展核心素养体系和学业质量标准……教育部将组织研究提出各学段学生发展核心素养体系,明确学生应具备的适应终身发展和社会发展需要的必备品格和关键能力,突出强调个人修养、社会关爱、家国情怀,更加注重自主发展、合作参与、创新实践。研究制订中小学各学科学业质量标准 and 高等学校相关学科专业类教学质量国家标准,根据核心素养体系,明确学生完成不同学段、不同年级、不同学科学习内容后应该达到的程度要求,指导教师准确把握教学的深度和广度,使考试评价更加准确反映人才培养要求。各

* 《中华人民共和国义务教育法》,于1986年4月12日第六届全国人民代表大会第四次会议通过,2006年6月29日第十届全国人民代表大会常务委员会第二十二次会议修订。

各级各类学校要从实际情况和学生特点出发,把核心素养和学业质量要求落实到各学科教学中。”由此,教育部着手组建专家团队研制学生发展核心素养体系。事实上,这也是对《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》所提出的“树立科学的质量观,把促进人的全面发展、适应社会需要作为衡量教育质量的根本标准”等相关要求的具体落实。根据学生的成长规律和社会对人才的需求,把对学生德智体美全面发展总体要求和社会主义核心价值观的有关内容细化,从而研究制订出各学段学生发展核心素养体系,正成为当下教育研究所关注的焦点。

关于核心素养的提出,可以追溯到1979年的英国。基于职业教育的需要,英国继续教育学院第一次对英国职业教育的关键技术要求作出了规定,认为随着科学技术、文化等领域的快速发展,人们有必要掌握一些可以受用终身的素养^[1]。较早对核心素养体系作出较为系统解释的是1997年国际经济合作与发展组织(Organization for Economic Co-operation and Development, OECD)启动的“素养的界定与遴选:理论和概念基础”(Definition and Selection of Competencies: Theoretical and Conceptual Foundations, DeSeCo)项目。在持续多年的讨论和研究之后,OECD于2003年出版了最终研究报告《核心素养促进成功的生活和健全的社会》(Key Competencies for a Successful Life and a Well-Functioning Society),将有关学生能力素养的讨论直接指向“核心素养”,并构建了一个分别涉及“人与工具”“人与自己”和“人与社会”等三个方面的核心素养框架,具体包括“使用工具互动”“在异质群体中工作”和“自主行动”共三类九种核心素养指标条目。为推动这一框架的实践与应用,2005年OECD专门发布《核心素养的界定与遴选:行动纲要》(The Definition and Selection of Key Competencies: Executive Summary)^[2]。受其影响,随后英国、美国、德国、法国、芬兰、新加坡等国家先后投入到有关核心素养框架的研究与建设之中。

2002年美国制订了《“21世纪素养”框架》,2007年发布了该框架的更新版本,全面、清晰地各种素养以及它们之间的相互关系呈现出来(图1-1-1)。美国“21世纪素养”框架以核心学科为载体,确立了三项技能领域,每项技能领域下包含若干素养要求:①学习与创新技能,包括批判性思维和问题解决能力、创造性和创新能力、交流与合作能力。②信息、

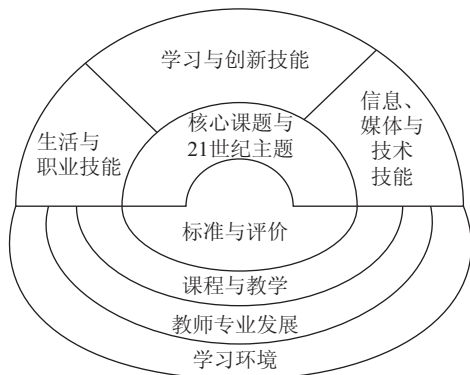
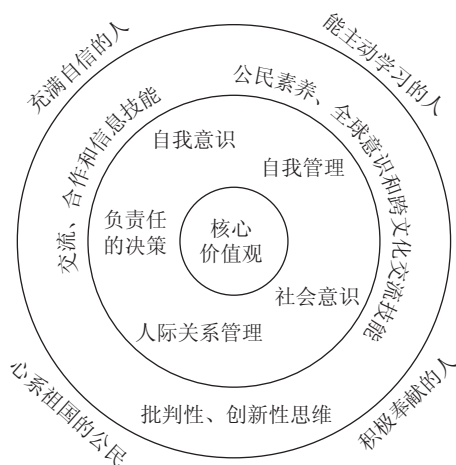


图 1-1-1 美国“21世纪素养”框架

媒体与技术技能,包括信息素养、媒体素养、信息交流和科技素养。③ 生活与职业技能,包括灵活性和适应性、主动性和自我指导、社会和跨文化技能、工作效率和胜任工作的能力、领导能力和责任能力^[3]。

21 世纪初,欧盟为应对全球化等一系列挑战,提出用“核心素养”取代传统以读写算为核心的基本能力战略。2006 年,欧洲议会和欧盟理事会通过了关于核心素养的建议案,并向其成员国推荐母语、外语、数学与科学技术素养、信息素养、学习能力、公民与社会素养、创业精神以及艺术素养等八大核心素养体系,每个核心素养均从知识、技能和态度三个维度进行描述。与此同时,欧盟还启动了教育与培训领域的未来十年发展规划——“ET 2010”计划。2010 年,欧盟理事会和欧盟委员会发布了该项计划的进展报告,题为“面向变化中的世界的核心素养”(Key Competences for a Changing World),在 262 页的报告中,“Key Competences”一词竟然出现了 381 次^[4]。2012 年,欧盟启动了“重新思考教育”计划。在这项计划中,核心素养课程实施与评价问题被纳入了专题研究范畴。在欧盟的建议案中,核心素养被定义为:在知识社会中每个人发展自我、融入社会及胜任工作所必需的一系列知识、技能和态度的集合。这一核心素养体系的描述,既有较强地站在学习科学、教育科学成就的基础上指向人的内在品质的意图,又具有明显的面向问题解决的功能导向色彩,它在尊重关于核心素养具有整合性、跨学科性及可迁移性的理念上颇为新颖,在一般意义的基础知识、基本技能与核心素养关系的厘清上,也有意无意地下了一番功夫^[5]。

2010 年 3 月,新加坡教育部颁布了新加坡学生的“21 世纪素养”框架(图 1-1-2)。其中,核心价值观包括尊重、负责、正直、关爱、坚毅不屈、和谐。社交与情绪管理技能包括自我意识、自我管理、社会意识、人际关系管理、负责任的决策。公民素养、全球意识和跨文化交流技能,包括活跃的社区生活、国家与文化认同、全球意识、跨文化的敏感性和意识。批判性、创新性思维,包括合理的推理与决策、反思性思维、好奇心与创造力、处理复杂性和模糊



性。交流、合作和信息技能,包括开放、信息管理、负责任地使用信息、有效地交流。学校所有学科的教学,就是为了通过培育学生的这些素养,最后培养出充满自信的人、能主动学习的人、积极奉献的人、心系祖国的公民。

2013年2月,联合国教科文组织(UNESCO)发布报告《走向终身学习——每位儿童应该学什么》。该报告基于人本主义的思想提出核心素养,即从“工具性目标”(把学生培养成提高生产率的工具)转变为“人本性目标”,使人的情感、智力、身体、心理诸方面的潜能和素质都能通过学习得以发展。在基础教育阶段尤其重视身体健康、社会情绪、文化艺术、文字沟通、学习方法与认知、数字与数学、科学与技术等七个维度的核心素养^[6]。

综上所述,从20世纪末到21世纪初,核心素养及其框架的构建已成为国际社会关注的热点。纵观相关国际组织以及部分发达国家的研究,呈现出如下一些趋势:①对教育目标的构建,由培养社会需要的人、适应社会的人或合格的劳动者,逐渐转向对人自身及其个性发展的关注。②超越基础知识与基本技能的层面,逐渐触及思想方法层面,乃至情感、态度、价值观层面。③不仅是着眼于当下的教育,更关注公民的终身学习能力,因而表现出更强的整合性、跨学科性及可迁移性。④尽管表述略有差别,但都对“信息素养”“全球意识”“批判精神”“创新思维”等给予充分关注,从而也就凸显了时代性。

中国学生发展的核心素养遴选和界定工作作为教育部重大委托课题,由北京师范大学资深教授林崇德领衔,会聚国内多所高校近百名研究人员,开展了历时三年的研究。课题组认为中国学生发展核心素养,也就是21世纪中国学生应具备的、能够适应终身发展和社会发展需要的必备品格和关键能力。课题组专家按照《关于全面深化课程改革 落实立德树人根本任务的意见》的要求,在总体设计、统筹谋划的基础上,综合开展基础理论研究、国际比较研究、教育政策研究、传统文化分析、现行课标分析、实证调查研究,全方位、多层次征求各方面意见和建议,反复修改完善,并经教育部基础教育课程教材专家工作委员会审议,最终形成研究成果。2016年9月13日,《中国学生发展核心素养》总体框架正式发布。中国学生发展核心素养,以科学性、时代性和民族性为基本原则,以培养“全面发展的人”为核心,分为文化基础、自主发展、社会参与三个方面。综合表现为人文底蕴、科学精神、学会学习、健康生活、责任担当、实践创新六大素养(图1-1-3),具体细化为18个基本要点(表1-1-1)^[7]。根据这一总体框架,可针对学生年龄特点进一步提出各学段学生的具体表现要求。可以认为这六大素养是我国新世纪、新阶段为了适应经济结构转型升级和实现两个百年奋斗目标对人才全面发展的更高要求。研究学生发展核心素养是落实立德树人根本任务的一项重要举措,也是适应世界教育改革发展趋势、提升我国教育国际竞争力的迫切需要。

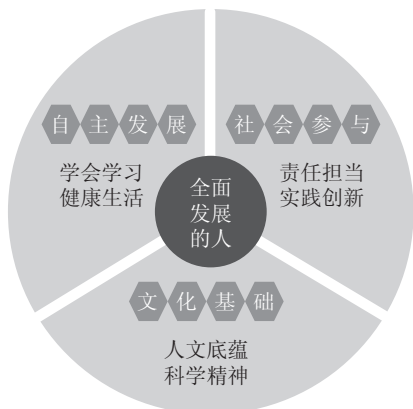


图 1-1-3 中国学生发展核心素养框架

表 1-1-1 中国学生发展核心素养基本要点

类别	核心素养	基本要点	主要表现描述
文化基础	人文底蕴	人文积淀	具有古今中外人文领域基本知识和成果的积累;能理解和掌握人文思想中所蕴涵的认识方法和实践方法等
		人文情怀	具有以人为本的意识,尊重、维护人的尊严和价值;能关切人的生存、发展和幸福等
		审美情趣	具有艺术知识、技能与方法的积累;能理解和尊重文化艺术的多样性,具有发现、感知、欣赏、评价美的意识和基本能力;具有健康的审美价值取向;具有艺术表达和创意表现的兴趣和意识,能在生活中拓展和升华美等
	科学精神	理性思维	崇尚真知,能理解和掌握基本的科学原理和方法;尊重事实和证据,有实证意识和严谨的求知态度;逻辑清晰,能运用科学的思维方式认识事物、解决问题、指导行为等
		批判质疑	具有问题意识;能独立思考、独立判断;思维缜密,能多角度、辩证地分析问题,作出选择和决定等
		勇于探究	具有好奇心和想象力;能不畏困难,有坚持不懈的探索精神;能大胆尝试,积极寻求有效的问题解决方法等
自主发展	学会学习	乐学善学	能正确认识和理解学习的价值,具有积极的学习态度和浓厚的学习兴趣;能养成良好的学习习惯,掌握适合自身的学习方法;能自主学习,具有终身学习的意识和能力等
		勤于反思	具有对自己的学习状态进行审视的意识和习惯,善于总结经验;能够根据不同情境和自身实际,选择或调整学习策略和方法等
		信息意识	能自觉、有效地获取、评估、鉴别、使用信息;具有数字化生存能力,主动适应“互联网+”等社会信息化发展趋势;具有网络伦理道德与信息安全意识等
	健康生活	珍爱生命	理解生命意义和人生价值;具有安全意识与自我保护能力;掌握适合自身的运动方法和技能,养成健康文明的行为习惯和生活方式等
		健全人格	具有积极的心理品质,自信自爱,坚韧乐观;有自制力,能调节和管理自己的情绪,具有抗挫折能力等
		自我管理	能正确认识与评估自我;依据自身个性和潜质选择适合的发展方向;合理分配和使用时间与精力;具有达成目标的持续行动力等
社会参与	责任担当	社会责任	自尊自律,文明礼貌,诚信友善,宽和待人;孝亲敬长,有感恩之心;热心公益和志愿服务,敬业奉献,具有团队意识和互助精神;能主动作为,履职尽责,对自我和他人负责;能明辨是非,具有规则与法治意识,积极履行公民义务,理性行使公民权利;崇尚自由平等,能维护社会公平正义;热爱并尊重自然,具有绿色生活方式和可持续发展理念及行动等
		国家认同	具有国家意识,了解国情历史,认同国民身份,能自觉捍卫国家主权、尊严和利益;具有文化自信,尊重中华民族的优秀文明成果,能传播弘扬中华优秀传统文化和社会主义先进文化;了解中国共产党的历史和光荣传统,具有热爱党、拥护党的意识和行动;理解、接受并自觉践行社会主义核心价值观,具有中国特色社会主义共同理想,有为实现中华民族伟大复兴的中国梦而不懈奋斗的信念和行动
		国际理解	具有全球意识和开放的心态,了解人类文明进程和世界发展动态;能尊重世界多元文化的多样性和差异性,积极参与跨文化交流;关注人类面临的全球性挑战,理解人类命运共同体的内涵与价值等

续表

类别	核心素养	基本要点	主要表现描述
社会参与	实践创新	劳动意识	尊重劳动,具有积极的劳动态度和良好的劳动习惯;具有动手操作能力,掌握一定的劳动技能;在主动参加的家务劳动、生产劳动、公益活动和社会实践中,具有改进和创新劳动方式、提高劳动效率的意识;具有通过诚实合法劳动创造成功生活的意识和行动等
		问题解决	善于发现和提出问题,有解决问题的兴趣和热情;能依据特定情境和具体条件,选择制订合理的解决方案;具有在复杂环境中行动的能力等
		技术运用	理解技术与人类文明的有机联系,具有学习掌握技术的兴趣和意愿;具有工程思维,能将创意和方案转化为有形物品或对已有物品进行改进与优化等

(二) 数学核心素养在我国的发展历程:从知识为本走向以人为本

虽然对核心素养的聚焦研究是近年来的事,但我国数学教育工作者对数学素养、数学能力的关注在中华人民共和国成立以来并未缺席,由我国历年来颁布的数学教学大纲或数学课程标准,可以大致看出数学核心素养在我国的发展历程。

1950年,在吸取苏联和旧教育的教学经验基础之上,中华人民共和国教育部颁发了中华人民共和国成立以后的第一份小学数学课程标准《小学算术课程暂行标准(草案)》,整个课程标准分为“目标”“教材大纲”和“教学要点”三大部分。其中课程目标表述为四个方面:一是增进儿童关于新社会日常生活中数量的正确观念和常识;二是指导儿童具有正确和敏捷的计算技术和能力;三是训练儿童善于运用思考、推理、分析、综合和钻研问题的方法和习惯;四是培养儿童爱国主义思想,并加强爱科学、爱护公共财物等的国民美德^[8]。从中可以看出,在对数量及计算能力给予充分关注的同时,仍然强调了训练儿童钻研问题的方法和习惯,注重培养爱国主义等美德,这些均可以视作基本的数学素养。

1952年教育部以苏联《初等学校算术教学大纲》为蓝本,制订并以中央人民政府的名义颁发了《小学算术教学大纲(草案)》。大纲分为“说明”和“大纲”两部分,“说明”部分阐述了小学算术教学的任务、要求和教学内容的总体规划。大纲将小学算术的教学任务概括为两个方面:一是保证儿童自觉地和巩固地掌握算术知识和直观几何知识,并使他们获得实际运用这些知识的技能;二是培养和发展儿童的逻辑思维,使他们理解数量和数量间的相依关系,并能作出正确的判断。该大纲草案还进一步具体规定了在小学算术课程中儿童应该获得五个方面的知识 with 技能:① 整数四则运算(包括不名数和名数)的巩固知识、口算和笔算的熟练技巧。② 市用制和公用制度、量、衡计算方法以及时间计算方法的巩固知识和实际应用的技能。③ 分数、小数、百分率的初步知识和简单小数四则运算的计算技能。④ 直观几何的基本知识和实际应用这些知识的技能。⑤ 解各种整数应用题的技能^[8]。1953年,国家决定停止推行五年一贯制,仍然沿用四二学制,于是在1952年《小学算术教学大纲(草案)》的基础上制订了《小学算术教学大纲(修订草案)》,并于1956年5月颁布实施。该大纲将小学算术教学目的规定为“主要是使儿童能够自觉地、正确地和迅速地进行整数运算,能

够运用已经获得的知识、技能和技巧去解答算术应用题和解决日常生活中简单的计算问题。算术教学必须有助于儿童智慧的发展和道德品质的培养,以促进全面发展的教育任务的实现。算术的学习应该做到使数和量成为儿童认识周围现实的工具”^[8]。1956年的大纲可以看作自1952年以来学习苏联的一个总结,较1950年《小学算术课程暂行标准(草案)》,对教学内容以数和量为中心作了进一步的细化,强调了运用数学与生活的联系以及培养学生以数学知识为工具解决实际问题的能力。

在中共中央提出的“调整、巩固、充实、提高”方针指导下,基于对国内外小学数学教学正反两方面经验教训的总结,教育部于1963年5月颁布《全日制小学算术教学大纲(草案)》。大纲明确规定小学算术的教学目标是“使学生牢固地掌握算术和珠算的基础知识,培养学生正确地、迅速地进行四则计算的能力,正确地解答应用题的能力,以及具有初步的逻辑推理能力和空间观念,以适应他们毕业后参加生产劳动和进一步学习的需要”^[8]。大纲首次提出培养初步的逻辑推理能力和空间观念,再次强调数与计算等基础知识与基本能力,为日后“双基”和三大基本能力的提出奠定了基础。大纲还在教材内容、体系安排等一系列问题上都有较大的改进和提高,随后“文化大革命”爆发,此大纲最终没有得到很好地实施。但这是第一份具有中国特点的教学大纲,使小学数学课程内容与教学改革在中国化的道路上迈出了重要的一步。

“文化大革命”后教学秩序逐步恢复。在1963年《全日制小学算术教学大纲(草案)》基础上,根据我国实现四个现代化的要求,1978年2月教育部颁布《全日制十年制学校小学数学教学大纲(试行草案)》,该大纲将“小学算术”改为“小学数学”。大纲把小学数学教学目标概括为“使学生理解和掌握数量关系和空间形式的最基础的知识,能够正确地、迅速地进行整数、小数和分数的四则计算,初步了解现代数学中的某些简单的思想,具有初步的逻辑思维能力和空间观念,并能够运用所学的知识解决日常生活和生产中的简单的实际问题。同时,结合教学内容对学生进行思想政治教育”。大纲所提出的教学目的较1963年的大纲更为明确、具体、全面:一是明确提出要使学生理解和掌握数量关系和空间形式的最基础知识;二是将基本能力进一步明确为计算能力、初步的逻辑思维能力和空间观念,以及解决简单实际问题的能力;三是明确对学生进行的思想教育要结合教学内容进行。

1986年,经过对1978年教育部颁布《全日制十年制学校小学数学教学大纲(试行草案)》的修订,国家教育委员会颁布了《全日制小学数学教学大纲》,这是中华人民共和国成立以来第一份正式的小学数学教学大纲。大纲与1978年大纲的结构相同,在精简和调整部分内容的基础上,进一步明确规定小学数学教学中要切实培养学生四方面的能力,即计算能力、初步的逻辑思维能力、初步的空间观念,以及运用所学的知识解决日常生活和生产中简单的实际问题的能力。大纲将原来的“思想政治教育”改为“思想品德教育”,一词之差,更加切合小学生的实际情况。大纲还就此提出了一些具体措施:要通过数学的实际应用,不断对学生进行学习目的的教育;要通过数学的训练,使学生养成书写整洁、严格认真的学习习惯和独立思考、克服困难的精神;要用富有教育意义的、有说服力的数据和统计材料,使学生受到爱祖

国、爱社会主义的思想教育；要通过数学的教学内容，使学生受到辩证唯物主义观点的启蒙教育。大纲在突出“小学数学是基础教育的一门重要学科”的同时还指出：在小学使学生学好数学要培养学习兴趣、养成良好的学习习惯，这对于提高全民族的素质，培养有理想、有道德、有文化、有纪律的社会主义公民，具有十分重要的意义。

随着《中华人民共和国义务教育法》在 1986 年正式实施，国家教育委员会相继组织起草拟订各科新的教学大纲，在 1988 年《九年义务教育全日制小学数学教学大纲（初审稿）》实验的基础上，《九年义务教育全日制小学数学教学大纲（试用）》于 1992 年 5 月审定通过并正式颁布。该大纲集中反映了我国义务教育的特点和要求，大纲把小学数学教学任务概括为四个方面：从小给学生打好数学的初步基础；发展学生的思维能力；培养学生学习数学的兴趣；让学生养成良好的学习习惯。该大纲不仅强调基础知识和基本技能，还进一步提到，在加强基础知识教学的同时，要把发展智力和培养能力贯穿在各年级数学教学的始终。此后，为了进一步适应深化素质教育的要求，教育部组织力量对大纲又进行了修订，2000 年 3 月颁布了修订后的《九年义务教育全日制小学数学教学大纲（试用修订版）》，在教学任务方面增加了“培养创新意识、实践能力”的要求，在教学目标方面作了三方面的调整：一是将原大纲“培养初步的逻辑思维能力”改为“培养初步的思维能力”，并相应提出了“结合有关内容的教学，引导学生进行观察、操作、猜测，培养学生会进行初步的分析、综合、比较、抽象、概括，对简单的问题进行判断、推理，逐步学会有条理、有根据地思考问题”；二是将原大纲中“能够运用所学数学知识解决简单的实际问题”改为“能够探索和解决简单的实际问题”，在教学要求中相应增加“通过观察、操作、猜测等方式，培养学生的探索意识”；三是增加了“使学生具有学习数学的兴趣，树立学好数学的信心”的教学目标和相应的要求。

伴随着素质教育的不断深入，在 21 世纪初国家启动了一轮较大规模的课程改革，在相继出台的多个课程改革文件中都明确提出了要在数学教育中发展学生的数学素养。2001 年教育部颁布了《义务教育数学课程标准（实验稿）》（以下简称《标准（实验稿）》），该课程标准在课程目标方面明确提出，通过义务教育阶段的数学学习，学生能够达到以下要求：① 获得适应未来社会和进一步发展所必需的重要数学知识（包括数学事实、数学活动经验）以及基本的数学思想方法和必要的应用技能。② 初步学会运用数学的思维方式去观察、分析现实社会，去解决日常生活和其他学科学习中的问题，增强应用数学的意识。③ 体会数学与自然及人类社会的密切联系，了解数学的价值，增进对数学的理解和学好数学的信心。④ 具有初步的创新精神和实践能力，在情感态度和一般能力方面都能得到充分发展。该课程标准进而还从知识与技能、数学思考、解决问题、情感与态度四个方面具体阐述了小学数学课程的总目标和各学段的具体目标。除了进一步明晰基础知识和基本技能的具体内容以外，课程标准在关于学习内容的设计思路以及对“数学思考”“解决问题”方面目标的表述中引入了“数感”“符号感”“空间观念”“统计观念”“应用意识”和“推理能力”等核心概念（也有称核心词）。在经过几年的实验后，2006 年国家启动了课程标准的修订工作，2011 年正式颁布了《义务教育数学课程标准（2011 年版）》（以下简称《标准（2011 年版）》）。《标准（2011 年

版)》在前言部分提出“数学是人类文化的重要组成部分,数学素养是现代社会每一个公民应该具备的基本素养”,将课程目标表述为:“通过义务教育阶段的数学学习,学生能达到以下要求:① 获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验。② 体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系,运用数学的思维方式进行思考,增强发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力。③ 了解数学的价值,提高学习数学的兴趣,增强学好数学的信心,养成良好的学习习惯,具有初步的创新意识和科学态度。”这一表述较原标准更为简洁,其中新增“基本思想”“基本活动经验”和“发现和提出问题的能力”,使得原来常说的“双基”变为“四基”,“两能”变为“四能”,获得了广泛的认可,这使得教学目标进一步聚焦的同时也不失全面性。《标准(2011年版)》还将原来所提的6个核心概念经过修正调整为10个:数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力、模型思想、应用意识、创新意识,为进一步提炼数学核心素养作了认识上的准备。

在义务教育各科课程标准修订工作完成之后,新一轮高中各学科课程标准的修订工作全面展开,与义务教育课程标准修订时所不同的是,高中课标的修订明确了以核心素养的培养为基础。近几年来,数学教育界围绕数学核心素养展开热烈的讨论,对数学核心素养的内涵和构成进行了积极而又富有成效的探索。马云鹏认为,数学核心素养可以理解为学生学习数学应当达成的有特定意义的综合能力。核心素养基于数学知识技能,又高于具体的数学知识技能,它反映了数学本质与数学思想,是在数学活动过程中形成的,具有综合性、阶段性和持久性^[9]。他还指出,在《标准(2011年版)》中提出了10个核心概念:数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力、模型思想、应用意识和创新意识,这些实际上就是数学核心素养。高中数学课标修订组专家认为,数学核心素养包含具有数学基本特征的思维品格和关键能力,是数学知识、技能、思想、经验及情感、态度和价值观的综合体现,它是数学课程目标的集中表现,反映课程内容的主线,聚焦课程目标要求,也是学业质量标准的集中反映^[10]。也有学者用这样的一个式子来表述数学核心素养,即:

$$\text{数学核心素养} = \text{数学思考} \times (\text{数学能力} + \text{数学知识})^{\text{数学态度}}$$

正确的数学思考和积极的数学态度会产生正面效果,会促进数学核心素养的提升,否则会产生负面效果,抑制数学核心素养的提升^[11]。《普通高中数学课程标准(2017年版)》明确高中阶段数学学科的核心素养包括:数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。

由中华人民共和国成立以来所颁布的数学教学大纲(数学课程标准)可以看出,在时代的变迁历程中,数学教学内容不断调整,数学教育教学理念不断改进。从“双基”的提出,到对数学思想渗透与学习习惯养成的重视,乃至明确提出数学核心素养,数学素养在不同时期被给予了不同的表述方式,也体现了我们对数学素养在不同侧面和不同程度上的重视。从对数学素养关注的逐步变化,可以看出我国的中小学数学教育经历了不断充实、从繁就简、由外而内、不断提升的过程,这一过程从本质上也体现了由知识为本、学科为本到以人为本