高等职业教育系列规划教材 · 数学平台课

GONGCHENG SHUXUE

工程数学

主编 韩慧蓉 周 千 杨陈东

西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

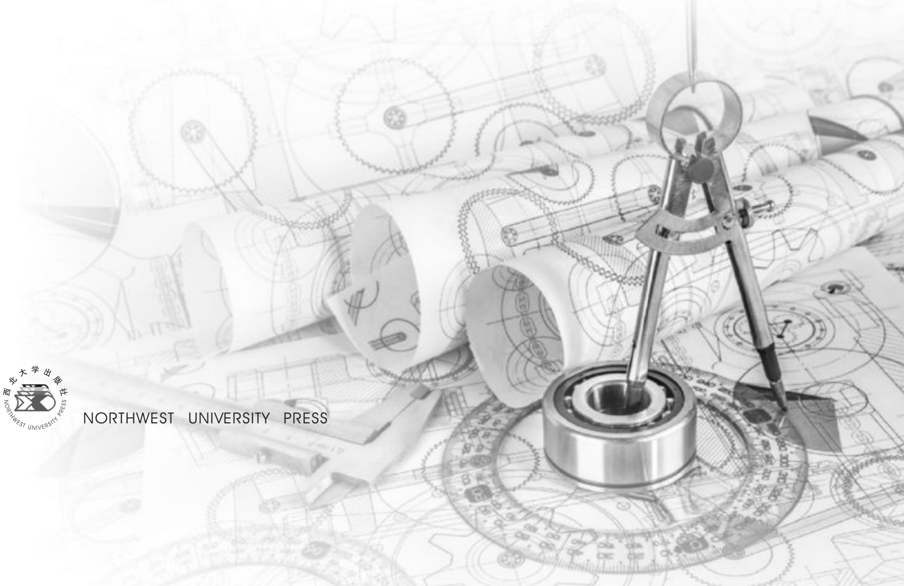
高等职业教育系列规划教材 · 数学平台课

GONGCHENG SHUXUE

工程数学

主审　岳忠玉

主编　韩慧蓉　周　千　杨陈东



NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

工程数学/韩慧蓉，周千，杨陈东主编.—西安：
西北大学出版社，2018.1
ISBN 978-7-5604-4126-9

Ⅰ.①工… Ⅱ.①韩… ②周… ③杨… Ⅲ.①工程数
学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第014767号

工程数学

主　　编：韩慧蓉　周　千　杨陈东
出版发行：西北大学出版社
地　　址：西安市太白北路229号
邮　　编：710069
电　　话：029-88303313
经　　销：全国新华书店
印　　装：陕西奇彩印务有限责任公司
开　　本：787毫米×1092毫米　1/16
印　　张：11.25
字　　数：239千字
版　　次：2018年1月第1版
印　　次：2018年1月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5604-4126-9
定　　价：25.00元

前　言

本书是为了适应高等职业教育培养高技能人才的需要，更好地为专业教学和学习服务，在多年教学实践的基础上所写的。

数学教研室在长期的教学过程中不断地摸索和总结，围绕数学课程在高等职业教育中的地位和作用、数学课程的体系等问题充分调研，并多次与专业教师讨论，在教学实践的基础上逐步建立起适应高等职业教育需要的数学课程教学体系，本教材就是在此基础上形成的，是多年教学成果的结晶。参加本书编写的教师均来自数学教学第一线，有着丰富的教学实践经验。

教材汲取部分高职高专院校同类教材的优点，严格按照高职高专基础课"以应用为目的，以必须和够用为度"的原则，充分体现了"强化概念，注重应用"的特色，编写过程中尽量做到深入浅出，并遵循以下要求：

1. 不拘泥于数学学科自身的系统性和逻辑性；
2. 对基础理论不追求严格的论证和推导，只做简要地说明；
3. 不追求过分复杂的计算和变换。

本书由西安航空学院理学院数学教研室负责编写。全书共分六章，主要内容包括：线性代数初步(周千)、概率论初步(韩慧蓉)、数理统计初步(韩慧蓉)、复变函数(周千)、傅里叶变换(杨陈东)、拉普拉斯变换(杨陈东)。

本书由理学院院长岳忠玉承担审稿工作，他提出了许多有价值的意见。另外，在编写过程中同时也得到了数学教研室全体同仁的大力支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者的教学经验和水平有限，加之时间仓促，错误和疏漏之处在所难免，恳请使用者批评指正。

作　者

2018 年 1 月 12 日

目 录

第一章 线性代数初步

线性代数是数学的一个重要分支,行列式、矩阵、n 维向量来源于对线性方程组解的研究,它们既是线性代数的研究对象,又是解决线性代数问题的有力工具. 本章将只介绍有关行列式、矩阵以及一些基础知识,同时利用它们讨论一般线性方程组的解法.

第一节 n 阶行列式的概念

一、二阶与三阶行列式

设二元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}. \tag{1-1}$$

利用消元法可得,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组 1-1 的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了便于记忆和讨论上述方程组的解,我们引入二阶行列式的概念.

定义 1 规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1-2}$$

我们称左端为二阶行列式,称右端为二阶行列式的展开式. a_{ij}($i = 1,2;j = 1,2$) 称为行列式的元素,横排称为行,纵排称为列,行列式从左上到右下的两个元素的连线叫做主对角线,从右上到左下的两个元素的连线叫做次对角线(或副对角线).

可以看出,二阶行列式的值等于主对角线上两元素之积减去次对角线上两元素之积.

这样二元线性方程组(1-1) 的解可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

其中分母是方程组(1-1) 中的系数按它们在方程组(1-1) 中的次序排列构

记

录

区

成的行列式，称为方程组(1－1)的系数行列式，记做 D，并令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

其中 D_1 和 D_2 是以 b_1, b_2 分别替换行列式 D 中的第一列、第二列的元素所得到的行列式.

于是，当 $D\neq 0$ 时，二元线性方程组(1－1)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}.$$

类似地，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1－3}$$

也引入三阶行列式的概念以便于表示它的解.

定义 2 规定

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{1－4}$$

我们称左端为三阶行列式，称右端为三阶行列式按第一行的展开式. $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 称为三阶行列式的元素，横排为行，纵排为列，展开式中的三个二阶行列式依次称为元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的余子式，分别记为 M_{11}, M_{12}, M_{13}，即

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

可以看出，在三阶行列式 D 中划去 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 所在的行和列上的所有元素而得到的二阶行列式就是余子式 M_{1j}，余子式 M_{1j} 乘以 $(-1)^{1+j}$ 称为元素 a_{1j} 的代数余子式，记做 A_{1j}，于是(1－4)式可表示为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

将(1－4)式右端的三个二阶行列式展开，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1－5}$$

其右端称为三阶行列式的展开式，它是由不同行不同列的三个元素相乘而得的六项的代数和，并且主对角线和与主对角线平行的三个元素之积取正号，次对角线和与次对角线平行的三个元素之积取负号. 如图 1－1 所示，用实线连接的三个元素之积取正号，虚线连接的三个元素之积取负号，这种展开行列式的方法称为对角线展开法.

记 录 区

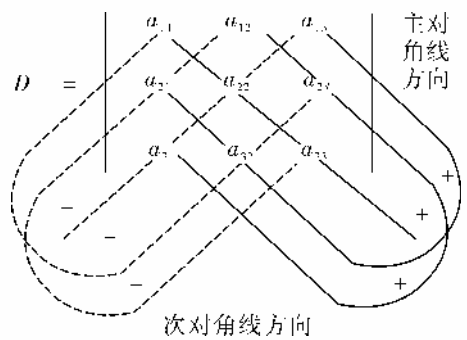


图 1－1

例 1　计算下列行列式：

$$(1)D=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 4 & 6\\ 7 & 0 & 5\end{vmatrix}\qquad\qquad (2)D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

解　按对角线展开法

$(1)D=3\times4\times5+7\times(-1)\times6+2\times0\times1-7\times4\times1-2\times(-1)\times5-0\times6\times3=0.$

$(2)D=a_{11}a_{22}a_{33}+0\cdot a_{21}a_{32}+0\cdot0\cdot a_{31}-0\cdot a_{22}a_{31}-a_{21}\cdot0\cdot a_{33}-a_{11}a_{32}\cdot0=a_{11}a_{22}a_{33}.$

主对角线一侧的元素全为零的行列式称为三角形行列式，又分为上三角形行列式和下三角形行列式. 例 1(2) 是下三角形行列式，由对角线展开法可知，三角形行列式的值等于主对角线上元素之积.

二、n 阶行列式

前面我们用二阶行列式给出了三阶行列式的定义，对一般 n 阶行列式有如下定义(递推式)：

定义 3　设 $n-1$ 阶行列式已经定义，则 n 阶行列式是由 n^2 个数构成，记作

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

并规定

$$D=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

记录区

$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}. \qquad (1-6)$$

我们称左端为n阶行列式，称右端为n阶行列式按第一行的展开式. $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$称为n阶行列式的元素. 在n阶行列式中划去元素a_{ij}所在的第i行和j列上的所有元素后得到的$(n-1)$阶行列式，称为元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}，把$(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素a_{ij}的代数余子式，记作A_{ij}. 即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

这样，(1－6)式也可表示为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}.$$

注意：对角线展开法只适应于二、三阶行列式的计算.

例 2 利用定义求下列行列式的值：

$$(1)D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (2)D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解
$$(1)D=2\times\begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}-(-1)\times\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=2\times(-4)\times\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}+2\times2\times\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$
$$=-8-18=-26.$$

(2) 根据行列式的递推定义得

$$D=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn}.$$

习题 1－1

用递推法求下列行列式的值：

1. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$　2. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$　3. $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$　5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$　6. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}$　8. $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$　10. $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

记录区

第二节　n 阶行列式的性质

对于四阶或四阶以上的高阶行列式，若按定义计算则显得十分麻烦，因此有必要讨论 n 阶行列式的性质，以简化行列式的计算.

将一个行列式 D 的行与列依次互换所得到的行列式称为行列式 D 的转置行列式，记作 D^{T}，即行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1　行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.（证明从略）

由此性质可知，行列式对行成立的性质，对列也一定成立.

性质 2　互换行列式的任意两行（或两列），行列式变号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 3　行列式某一行（列）元素的公因子可以提到行列式的外面.

证明　由性质 2，不妨设该行为第一行，则

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n} ka_{1j}A_{1j}=k\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 3 亦可叙述为：如果行列式 D 的某一行（列）的每一个元素同乘以常数 k，则行列式的值等于 kD.

性质 4　如果行列式的两行（列）对应元素相同，则行列式的值为零.

证明　把相同的两行（列）对调，行列式不变，但由性质 2 可知它应改变符号，即

$$D=-D.$$

也就是 $2D=0$，因此 $D=0$.

记 录 区

由性质 3、性质 4 容易得到以下推论.

推论 如果行列式的两行(列)对应成比例,则行列式的值为零.

性质 5 如果行列式的某一行(列)的每个元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式某一行(列)的元素同乘以常数 k 后,加到另一行的(列)的对应元素上,行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}+ka_{s1} & a_{r2}+ka_{s2} & \cdots & a_{rn}+ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 可由性质 5 和性质 4 的推论得到,请读者自己证明.

由行列式的定义我们知道 n 阶行列式可按第一行展开计算,根据性质 2,行列式可以两行(列)对调,因此 n 阶行列式可按任意一行(列)展开计算,这就是下面的性质 7.

性质 7 行列式 D 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n). \tag{1-7}$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(j=1,2,\cdots,n). \tag{1-8}$$

通常把性质 7 叫做行列式 D 按第 i 行(或 j 列)的展开式.

推论 行列式某一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和恒为零. 即

$$a_{j1}A_{i1}+a_{j2}A_{i2}+\cdots+a_{jn}A_{in}=0. \tag{1-9}$$

证明留给读者思考.

记

录

区

由上节例 2(2) 可知，三角形行列式的值等于主对角线元素之积. 应用行列式的性质，若能把行列式化为三角形行列式，可使计算简便.

符号说明：在以后的计算中，为简明起见，用圆内数字表示行(列) 的位置；用符号↔表示行(列) 对调. 例如①↔③表示第1行(列) 与第三行(列) 对调；①·10表示对第一行(列) 乘以10. 并把行性质变换写在等号的上方，列性质变换写在等号下方，便于检查且条理清楚.

例 3　计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix}-1&3&1&2\\1&1&2&0\\-1&2&0&3\\1&1&3&5\end{vmatrix}.$$

解　化为上三角形行列式

$$D\xlongequal[]{\substack{②+①\\③+①\cdot(-1)\\④+①}}\begin{vmatrix}-1&3&1&2\\0&4&3&2\\0&-1&-1&1\\0&4&4&7\end{vmatrix}\xlongequal{②\leftrightarrow③}-\begin{vmatrix}-1&3&1&2\\0&-1&-1&1\\0&4&3&2\\0&4&4&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[]{\substack{③+②\cdot4\\④+②\cdot4}}-\begin{vmatrix}-1&3&1&2\\0&-1&-1&1\\0&0&-1&6\\0&0&0&11\end{vmatrix}=11.$$

例 4　计算 n 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}.$$

解　这个行列式的特点是各列元素之和都为 $n-1$，为了简化先将第 2，3，…，n 行都加到第一行，再提公因子，即

$$D=\begin{vmatrix}n-1&n-1&n-1&\cdots&n-1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}.$$

第一行乘以 -1 分别加到其余各行，变为上三角形行列式，即

$$D=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&-1&0&\cdots&0\\0&0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1).$$

记录区

在利用行列式的性质计算或证明时，也可以使某行（列）尽量含零多些，再利用性质 7 展开以降低行列式的阶数，使运算简化，这是计算行列式的另一个重要方法. 下面举例说明.

例 5 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\1&3&5&0\\0&1&5&6\\1&3&3&4\end{vmatrix}.$$

解
$$D\xlongequal[④+①\cdot(-1)]{②+①\cdot(-1)}\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&1&5&6\\0&1&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&-1\\1&5&6\\1&3&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{②+①\cdot(-1)}\begin{vmatrix}1&5&-1\\0&0&7\\1&3&3\end{vmatrix}=(-1)^{2+3}\times 7\begin{vmatrix}1&5\\1&3\end{vmatrix}$$

$$=-7\times(3-5)=14.$$

例 6 计算 n 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix}a&b&0&\cdots&0&0\\0&a&b&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&b\\b&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}.$$

解 按第一列展开，得

$$D=a\begin{vmatrix}a&b&\cdots&0&0\\0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a&b\\0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix}b&0&\cdots&0&0\\a&b&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&b&0\\0&0&\cdots&a&b\end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

习题 1－2

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}0&0&0&a_{14}\\0&0&a_{23}&a_{24}\\0&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix}0&0&0&5&5\\0&0&4&1&0\\0&3&2&0&0\\2&3&0&0&0\\4&0&0&0&1\end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix}4&3&2&1\\3&2&1&4\\2&1&4&3\\1&4&3&2\end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}$

记录区

(5) $\begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & b \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$ (8) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

(9) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$ (10) $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ $(a_1a_2\cdots a_n \neq 0)$

2. 证明：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(3) $\begin{vmatrix} \lambda+2 & 14 & 2 \\ -2 & \lambda-8 & -2 \\ -2 & -8 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-6)$

(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} = a^4$

(6) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = 4(b-a)(c-a)(b-c)$

(7) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = 1$

第三节　克莱姆法则

利用行列式的性质，我们给出 n 元线性方程组的解的行列式表示法.

定理　如果 n 元线性方程组

记

录

区

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1-10}$$

的系数行列式 $D\neq 0$. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

那么方程组(1－10)有且只有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D}\qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

其中 D_j 是把 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后得到的 n 阶行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个定理也称为解线性方程组的**克莱姆法则**.

例 7 解方程组:

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_4=-5 \\ 3x_1+2x_2-x_3-2x_4=6 \\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1-x_3=0 \end{cases}.$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[①+③\cdot 2]{} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[③+①\cdot(-2)]{②+①\cdot(-1)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -5 \end{vmatrix}=5\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -5 & -1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

记录区

$$\underset{\text{②}+\text{③}\cdot 3}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix} -5 & 5 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 10$$

经过计算还可得到

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -15 \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 20$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -25$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 2, x_2 = \frac{D_2}{D} = -3, x_3 = \frac{D_3}{D} = 4, x_4 = \frac{D_4}{D} = -5.$$

这里应当注意到，克莱姆法则只适用于 n 元线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$ 的情形，当 $D = 0$ 时（以后我们会讨论到），方程组有两种可能，或者各方面间存在矛盾，无解；或者有方程重合，即至少有一个方程不是独立的，有无数组解. 例如

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases} \qquad \text{（两方程矛盾）}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases} \qquad \text{（重合）}$$

使用克莱姆法则解线性方程组有其局限性，今后我们将介绍矩阵作为工具来求解一般线性方程组.

习题 1－3

解下列线性方程组：

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 - 2 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 1 = 0 \\ x_2 + 7x_3 - 5 = 0 \\ -2x_3 + 2x_4 + 4 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

记录区