



同济数学系列丛书
TONGJISHUXUEXILIECONGSHU

配套同济大学《高等数学》第七版
配合同济大学高等数学教学需求



GAODENGSHUXUEXITICE

高等数学习题册（下）

（第2版）

同济大学数学科学学院 编



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS



同济数学系列丛书
TONGJI SHUXUE XILIE CONGSHU

高等数学学习题册(下)

(第2版)

同济大学数学科学学院 编

 同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本习题册是根据国家教育部有关高等工科院校本科非数学专业的教学要求,并按照同济大学数学系编写的《高等数学》第七版的章节顺序,以方便学生课后巩固基本概念和掌握基本解题方法为主要目的而编写的配套习题册。读者可以将此习题册与各自的《高等数学》教材(尤其是同济大学数学系主编的第七版)配合使用。

本习题册下册共五章,内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。每节的作业内容覆盖了需要掌握的知识点,难易均衡,题量适中,每节最后配备了思考题,目的是开拓读者思路,提高学习兴趣,供学有余力的读者思考提高。所有习题的答案均可登录同济大学数学科学学院国家级精品课程高等数学同步课堂网站(math.tongji.edu.cn/gaoshu/)查询。

本习题册适用于各类高等院校及相关专业(非数学专业)的在校学生,建议读者先熟悉相应高等数学教材的对应章节,再通过本习题册进行练习,相信会对数学基础和解题能力的提高有所帮助。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题册. 下 / 同济大学数学科学学院编

2版. 上海: 同济大学出版社, 2019. 9

ISBN 978-7-5608-8720-3

I. ①高… II. ①同… III. ①高等数学—高等学校—习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 182795 号

高等数学习题册(下)(第2版)

同济大学数学科学学院 编

责任编辑 张 莉 助理编辑 任学敏 责任校对 徐春莲 封面设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 常熟市大宏印刷有限公司

开 本 890 mm×1240 mm 1/16

印 张 8

印 数 1—5100

字 数 256 000

版 次 2019 年 9 月第 2 版 2019 年 9 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-8720-3

定 价 22.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

前 言

高等数学是高等院校学生一门重要的基础课程,通过这门课程的学习,不仅使学生掌握微积分这一重要的数学工具,而且使学生的逻辑思维能力得到提高.课后练习是这门课程学习的重要一环,在同济大学高等数学的教学中,为了使學生能够对所学的知识在课后得到巩固与提高,更好地配合课程的教学,多年来,在汲取各位任课教师宝贵的教学经验的基础上,针对教学中的情况,我们不断地对习题册进行调整与完善,使它能够更好地适应高等数学的教学需求,因此,同济大学高等数学习题册更多地体现了任课教师的集体劳动成果.

2015年,经协商考虑,由同济大学高等数学教研室负责人刘庆生和骨干教师张弢对正在使用的习题册进行重新修订编写并正式出版.第1版不仅对内容做了很大的更改,同时增加了一些新的栏目,例如,增加了单元测验这一新的练习环节等.

本次修订由现任高等数学课程负责人周朝晖及原来的两名编者共同完成.修订过程更正了上一版中的一些错误,同时对部分题目进行了更改调整,使本习题册更加适应当前教学的需求.

在习题册各版次编写过程中,同济大学高等数学的许多任课教师都对本习题册的编写提出了宝贵意见并提供了相关资料,编者在此向他们表示由衷的感谢!

编 者

2019年7月

目 录

前言

向量代数与空间解析几何 —— 向量及其线性运算	1
向量代数与空间解析几何 —— 数量积、向量积、混合积	3
向量代数与空间解析几何 —— 平面及其方程	5
向量代数与空间解析几何 —— 空间直线及其方程	7
向量代数与空间解析几何 —— 曲面及其方程	9
向量代数与空间解析几何 —— 空间曲线及其方程	11
向量代数与空间解析几何 —— 测验卷	13
多元函数微分法及其应用 —— 多元函数的基本概念	15
多元函数微分法及其应用 —— 偏导数	17
多元函数微分法及其应用 —— 全微分	19
多元函数微分法及其应用 —— 多元复合函数的求导法则	21
多元函数微分法及其应用 —— 隐函数的求导公式	23
多元函数微分法及其应用 —— 多元函数微分学的几何应用	25
多元函数微分法及其应用 —— 方向导数与梯度	27
多元函数微分法及其应用 —— 多元函数的极值及其求法	29
* 多元函数微分法及其应用 —— 二元函数的泰勒公式	31
多元函数微分法及其应用 —— 测验卷	33
重积分 —— 二重积分的概念与性质	37
重积分 —— 二重积分的计算法(1) —— 利用直角坐标计算	39
重积分 —— 二重积分的计算法(2) —— 利用极坐标计算	41
* 重积分 —— 二重积分的计算法(3) —— 二重积分的一般换元法	43
重积分 —— 三重积分	45
重积分 —— 重积分的应用	47
* 重积分 —— 含参变量的积分	49
重积分 —— 测验卷	51
曲线积分与曲面积分 —— 对弧长的曲线积分	55

曲线积分与曲面积分 —— 对坐标的曲线积分	57
曲线积分与曲面积分 —— 格林公式及其应用	59
曲线积分与曲面积分 —— 对面积的曲面积分	61
曲线积分与曲面积分 —— 对坐标的曲面积分	63
曲线积分与曲面积分 —— 高斯公式 *通量与散度	65
曲线积分与曲面积分 —— 斯托克斯公式 *环流量与旋度	67
曲线积分与曲面积分 —— 测验卷	69
无穷级数 —— 常数项级数的概念与性质	73
无穷级数 —— 常数项级数的审敛法(1) —— 正项级数及其审敛法	75
无穷级数 —— 常数项级数的审敛法(2) —— 交错级数及其审敛法 绝对收敛与条件收敛	77
无穷级数 —— 幂级数	79
无穷级数 —— 函数展开成幂级数	81
无穷级数 —— 函数的幂级数展开式的应用	83
*无穷级数 —— 函数项级数的一致收敛性及性质	85
无穷级数 —— 傅里叶级数	87
无穷级数 —— 一般周期函数的傅里叶级数	89
无穷级数 —— 测验卷	91
向量代数与空间解析几何 总习题	95
多元函数微分法及其应用 总习题	99
重积分 总习题	103
曲线积分与曲面积分 总习题	107
无穷级数 总习题	111
习题参考答案与提示	115

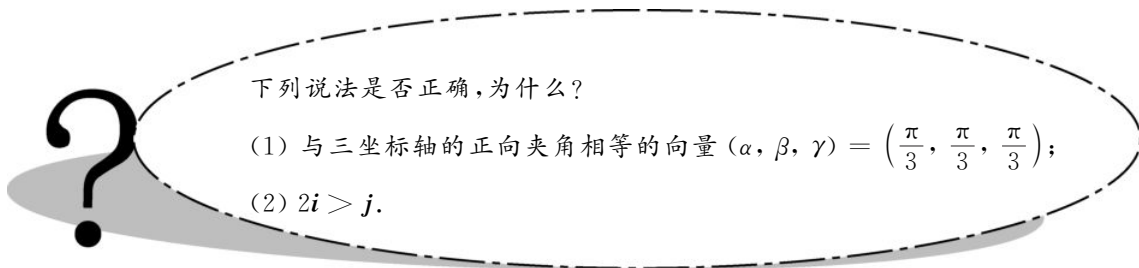
向量代数与空间解析几何 —— 向量及其线性运算

1. 点 (a, b, c) 关于 xOy 平面、 yOz 平面、 zOx 平面、 x 轴、 y 轴、 z 轴和原点的对称点坐标依次为 _____、_____、_____、_____、_____、_____、_____。
2. 点 (a, b, c) 到 xOy 平面、 yOz 平面、 zOx 平面、 x 轴、 y 轴、 z 轴和原点的距离依次为 _____、_____、_____、_____、_____、_____。
3. 设两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$, $M_2(3, 0, 2)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、方向角。
4. 设向量的方向余弦分别满足:(1) $\cos \alpha = 0$; (2) $\cos \beta = 1$; (3) $\cos \alpha = \cos \beta = 0$, 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?
5. 设向量 $m=(2, 5, 10)$, $n=(5, -4, -7)$ 和 $p=(4, -2, 3)$, 求向量 $a=2m+n-3p$ 的模及在 x 轴上的投影.

6. 设 a, b, c 均为非零向量, 其中任意两向量不共线, 但 $a + b$ 与 c 共线, $b + c$ 与 a 共线, 试证: $a + b + c = 0$.

7. 已知 $a = (7, -4, -4)$, $b = (-2, -1, 2)$, 向量 c 在向量 a 与 b 的角平分线上, 且 $|c| = 3\sqrt{42}$, 求 c 的坐标.

8. 设向量 x 与 j 成 60° 角, 与 k 成 120° 角, 且 $|x| = 5\sqrt{2}$, 求 x .



向量代数与空间解析几何 —— 数量积、向量积、混合积

1. 已知 $\alpha_1 = (1, 2, -3)$, $\alpha_2 = (2, -3, a)$, $\alpha_3 = (-2, a, 6)$, 若 $\alpha_1 \perp \alpha_2$, 则 $a =$ _____; 若 $\alpha_1 // \alpha_3$, 则 $a =$ _____; 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 共面, 则 $a =$ _____.
2. 已知 $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(3, 3, 1)$, $M_3(3, 1, 3)$, 求:
 (1) 与 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量; (2) $\triangle M_1M_2M_3$ 的面积.

3. 设 $a = 2i - 3j + k$, $b = i + j - 3k$, 求:
 (1) $\text{Prj}_a b$; (2) $\cos(\widehat{a, b})$; (3) $|a \times b|$; (4) $(a \times b) \times a$.

4. 设 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$.
 (1) 证明: $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)$;
 (2) 若还有 $|a| = 3, |b| = 4, |c| = 5$, 求 $|a \times b + b \times c + c \times a|$.

5. 设 $\mathbf{A} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}$, 其中 $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, 且 $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\pi}{3}$, 问 λ 为何值时:

(1) $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$; (2) 以 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为邻边的平行四边形面积为 $3\sqrt{3}$.

6. 设 $\mathbf{a} = (4, -3, 2)$, 轴 u 与三坐标轴构成相等锐角, 求:

(1) \mathbf{a} 在轴 u 上的投影; (2) \mathbf{a} 与轴 u 的夹角.

7. 利用向量理论证明: 圆中直径所对的圆周角是直角.



试总结一下向量的数量积、向量积和混合积在几何中的主要用途.

向量代数与空间解析几何 —— 平面及其方程

1. 指出下列平面的特征, 并画出各平面:

(1) $3x - 1 = 0$;

(2) $y + 2z - 1 = 0$;

(3) $2x + z = 0$;

(4) $3x + 3y - z = 1$.

2. 分别按下列条件求平面方程:

(1) 平行于 x 轴且经过两点 $(5, 1, -2)$ 和 $(6, -2, 3)$;

(2) 垂直于两平面 $x - y + z - 1 = 0$, $2x + y + z + 1 = 0$, 且通过点 $(1, -1, 1)$;

(3) 通过 z 轴, 且与平面 $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$;

(4) 平行于向量 $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$, 且在 x 轴、 y 轴上的截距依次为 3 和 -2.

3. 推导两平行平面 $Ax + By + Cz + D_i = 0, i = 1, 2$ 之间的距离公式; 并求将两平行平面 $x - 2y + z - 2 = 0$ 与 $x - 2y + z - 6 = 0$ 之间距离分成 $1 : 3$ 的平面方程.

4. 证明: 过不在一直线上三点 $(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3$ 的平面方程为
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$
 并写出过 $(1, 1, -1), (-2, -2, 2), (1, -1, 2)$ 三点的平面方程.



求两平面 $x - 2y + 2z + 21 = 0, 7x + 24z - 5 = 0$ 的二面角的平分面方程.

向量代数与空间解析几何 —— 空间直线及其方程

1. 写出直线 $\begin{cases} 2x + y + 5z - 3 = 0, \\ x - 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$ 的对称式方程及参数方程.

2. 求满足下列条件的直线方程:

(1) 过点 $(0, 2, 4)$ 且与两平面 $x + 2z = 1$ 和 $y - 3z = 2$ 平行;

(2) 过点 $(0, 1, 2)$ 且与直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ 垂直相交.

3. 求直线 $\begin{cases} 4x - y + 3z - 1 = 0, \\ x + 5y - z + 2 = 0 \end{cases}$ 在平面 $2x - y + 5z - 3 = 0$ 上投影直线的方程.

4. 设 M_0 是直线 L 外一点, M 是直线 L 上任意一点, 且直线的方向向量是 \mathbf{s} , 试证: 点 M_0 到直线 L 的距

$$\text{离 } d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|}.$$

5. 求直线 $\begin{cases} x+4y+z=0, \\ 2x-2y-3z-5=0 \end{cases}$ 与平面 $x-y+2z=3$ 之间的夹角.

6. 求过点 $A(-1, 0, 4)$ 平行于平面 $\Pi: 3x-4y+z=10$ 且与直线 $L: x+1=y-3=\frac{z}{2}$ 相交的直线.

7. 求过点 $A(-3, 5, -9)$ 且和两直线 $L_1: \begin{cases} y=3x+5, \\ z=2x-3, \end{cases} L_2: \begin{cases} y=4x-7, \\ z=5x+10 \end{cases}$ 相交的直线 L 的方程.

8. 判定两直线 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$ 和 $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}$ 是否为异面直线;若是, 试求其距离及公垂线.



过平面 $2x+y-3z+2=0$ 和 $5x+5y-4z+3=0$ 所确定的直线的所有平面中, 求两个相互垂直的平面, 其中一个平面经过点 $(4, -3, 1)$.

向量代数与空间解析几何 —— 曲面及其方程

1. 将 xOy 坐标面上的双曲线 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周, 求相应的旋转曲面的曲面方程.

2. 试求在平面上的曲线 $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ 绕极轴旋转而成的曲面方程.

3. 指出下列各方程在二维平面与三维空间中分别表示什么几何图形? 并分别画出它们在三维空间所表示的几何图形:

(1) $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1;$

(2) $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1;$

(3) $z = 2 - x^2.$

4. 下列方程表示什么曲面？指出这些曲面中哪些是旋转曲面，这些旋转曲面是怎样形成的？并分别画出下列方程所表示的曲面：

(1) $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$;

(2) $x^2 - y^2 - 4z^2 = 4$;

(3) $\frac{z}{3} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$.



(1) 如果直线 l 与直线 l' 的夹角为 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), 相距为 a , 且 $a > 0$. 判别直线 l' 绕直线 l 旋转所得曲面 Σ 的类型并给出判别的理由; (2) 若直线 l 的方程为: $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{2}$, 直线 l' 的方程为: $\frac{x-2}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}$, 试求由直线 l' 绕直线 l 旋转所得曲面 Σ 以及相距为 2 且垂直于直线 l 的两平面所围立体体积的最小值.

向量代数与空间解析几何 —— 空间曲线及其方程

1. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 的柱面方程.

2. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被 $z = 1$ 和 $z = 4$ 截得的部分在三个坐标面上的投影.

3. 将曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \\ (x - 1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ 化成参数方程.

4. 求曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线的方程.

5. 求螺旋线 $\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.