

# 中学生数学课堂 核心能力的培养

夏敏 田静 王欣 主编



## 主编简介

夏敏，中学高级教师、市级骨干教师、市兼职教研员、国家教育行政学院基础教育改革动态校长班学员、北京大学一线优秀教研员培训学员、深圳市挂职校长。现任毕节市第一中学机关党委副书记兼党建办主任。先后获得国家级优秀辅导教师奖、县级优秀校长等光荣称号。参与编写学生辅导资料《中考精英总复习》，在《中国西部》《贵州教育》《毕节教育》等刊物发表教育教学论文6篇。

田静，中共党员，丰都县滨江小学党支部书记、校长、中学数学高级教师、市级骨干校长，被评为县优秀共产党员、优秀教师、优秀教育工作者、优秀专业技术人才、优秀政协委员、市绿色园丁、教育部优秀工作坊坊主。

王欣，辽宁省名师工作室主持人，辽宁省数学学科带头人，盘锦市模范教师，盘锦市数学学科带头人。研究专长为数学课堂教学。著有《师生关系对教学质量的影响》《开放式教学在初中数学课堂教学中的实践与研究》，在《赤子》《速读》等杂志发表多篇文章，主持承担过国家、省、市级课题十余项，参加中国教育学会举办的第六届和第九届青年数学教师优质课展示活动。

# 中学生数学课堂核心能力的培养

夏 敏 田 静 王 欣 主编

吉林人民出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

中学生数学课堂核心能力的培养 / 夏敏, 田静, 王  
欣主编. — 长春: 吉林人民出版社, 2019.12

ISBN 978-7-206-16664-8

I. ①中… II. ①夏… ②田… ③王… III. ①中学数  
学课—课堂教学—教学研究—初中 IV. ① G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 289633 号

## 中学生数学课堂核心能力的培养

ZHONGXUESHENG SHUXUE KETANG HEXIN NENGLI DE PEIYANG

---

责任编辑: 江 雪

出版发行: 吉林人民出版社 (长春市人民大街7548号 邮政编码: 130022)

印 刷: 长春市大航图文制作有限公司

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 16

字 数: 331千字

版 次: 2019年12月第1版

印 次: 2019年12月第1次印刷

书 号: ISBN 978-7-206-16664-8

定 价: 45.00元

## 编 委 会

主 编：夏 敏 田 静 王 欣

副主编：侯明慧 李明哲 晁春梅

编 委：姜乐萍 刘艳平 张金江

## 前 言

随着提倡素质教育理念的逐渐深入，核心素养得到教育界的关注，当下培养学生的核心素养已成为我国基础教育的一个重要提议和基本任务，而数学核心能力作为核心素养的本质体现，具有充分体现数学特征的关键能力与人格品质的作用。

到目前为止，因为学界对于数学核心能力的研究还没有统一的定论。所以，笔者认同徐斌艳在借鉴国外教学核心能力研究的基础上，从数学活动视角提出的六大数学核心能力。其中包括数学问题的提出、数学表征与变换、数学推理与论证、数学问题解决、数学交流、数学建模。因此，这本书的内容就从这六大方面展开，希望能有效促使初中数学的课堂得到高效构建，进而有效培养并提高学生的核心能力，促进学生良好的成长和发展。

总而言之，在初中阶段注重培养学生的数学核心能力是十分必要的。笔者注重将素质教育思想与核心能力的培养观念融入教学课堂，目的是在有效提高学生的数学核心能力的同时对广大教师也提供一些借鉴。

## 目 录

<b>第一章 初中数学核心能力培养的理论分析</b> ·····	001
第一节 数学核心能力的内涵 ·····	001
第二节 初中数学核心能力培养的理论依据 ·····	014
第三节 提高学生数学核心能力的教学策略与教学设计 ·····	023
<b>第二章 数学问题提出能力的培养</b> ·····	037
第一节 数学问题提出能力的内涵 ·····	037
第二节 培养学生问题提出能力在数学教育中的探究 ·····	042
第三节 培养学生数学问题提出能力的有效途径 ·····	047
第四节 培养学生提出数学问题的教学策略 ·····	057
<b>第三章 数学表征与变换能力的培养</b> ·····	066
第一节 数学表征与变换的内涵 ·····	066
第二节 初中生数学思维能力的理论培养 ·····	072
第三节 培养初中学生数学思维能力的实践策略 ·····	086
第四节 教学中学生数学思维的实践与策略 ·····	097
<b>第四章 数学推理与论证能力的培养</b> ·····	107
第一节 逻辑指引中学数学教学 ·····	107
第二节 对推理论证的初步认识 ·····	113
第三节 培养推理论证能力的有效策略 ·····	125
第四节 初中阶段几何推理与代数推理的应用 ·····	131

<b>第五章 数学问题解决能力的培养</b> .....	141
第一节 初中数学“问题解决”教学的内涵与作用 .....	141
第二节 初中数学“问题解决”能力的影响因素 .....	153
第三节 培养初中数学“问题解决”能力的教学策略 .....	160
第四节 初中数学“问题解决”教学的实践分析 .....	165
<b>第六章 数学交流能力的培养</b> .....	176
第一节 数学交流的概述 .....	176
第二节 初中数学阅读表达能力的内涵 .....	181
第三节 培养初中学生数学阅读能力的策略 .....	185
第四节 数学阅读表达能力的教学实践探索 .....	193
<b>第七章 数学建模能力的培养</b> .....	207
第一节 初中数学建模教学的理论依据 .....	207
第二节 初中数学课堂渗透模型思想的原则与策略 .....	216
第三节 提高初中生数学建模能力的对策 .....	221
第四节 初中数学建模教学设计与实践 .....	230
<b>结 束 语</b> .....	246
<b>参 考 文 献</b> .....	247

# 第一章 初中数学核心能力培养的理论分析

## 第一节 数学核心能力的内涵

### 一、核心能力的含义

#### (一) 核心能力

教育应该教授人们一生所需的知识和技能，而人们接受教育的时间是有限的，如何在短暂的教育过程中实现这一目标，同时又能培养出高素质的人才，成为教育者们孜孜以求的目标。

近年来，国际教育的改革中出现了培养学生核心素养的研究。最初的关于核心素养的研究认为，“核心素养是指覆盖多个生活领域的，促进成功的生活和健全的社会的重要素养。”之后其他国家相继开始研究核心素养，美国提出了“21世纪技能计划”，将学生的技能分为三类：学习与创新领域，信息、媒体与技术技能领域，生活与职业技能领域。日本的核心素养研究体现在以能力为目标的教育改革中，形成了以“思考力”为核心的包括语言力、数理力、信息力和实践力的日本独具特色的核心素养理论。教育部将核心素养界定为“学生应具备的适应终身发展和社会发展需要的必备品格和关键能力”。

纵观各国对核心素养的研究可以发现，对核心素养的界定倾向于能力的培养，并且是适应未来的关键能力、核心能力。“Key Competencies”的中文翻译为“核心素养”，同时，基于研究者们将核心素养的培养归结为培养、发展学生的核心能力，核心素养的本质即为核心能力。所以，研究认为发展学生的核心素养的关键就是培养学生的核心能力。核心能力是指最重要的、最核心的能力，在所有的能力发展中处于核心地位、主导地位，是教育中重点培养的关键性能力。

#### (二) 数学核心能力

核心素养的实现要借助学科教学，数学核心能力是数学核心素养的本质体现。数学能力的界定主要有两类。一是，心理学家认为，数学能力是个体顺利而有效地完成数学活动的个性心理特征。二是，数学教育家强调形成数学能力的数学活动特征，这一界定表明实行有效的数学活动有助于形成数学能力。尼斯（Mogens Niss）等人通过对数学能力的研究，“提出8种具有严格数学意义的数学能力成分，即数学思维、提出并解决数学问题、数学建模、数学推理、数学表征、数学符号化与形式化、数学交流、工具的使用。”他们认为，掌握数学就意味着拥有数学能力，并能不同的数学情景下理解、判断和使用数学。数学核心能力是数学能力之中的关键性、起决定性作用的能力，它在众多数学能力中处于中心位置，是数学

教育培养目标中的核心组成部分。

图尔纳 (Ross Turner) 认为, 数学核心能力是有助于数学知识应用于实践领域的个人能力, “他提出这种个人能力包括数学交流, 数学化, 数学表征, 数学推理与论证, 数学策略性思维, 使用符号、公式、技术语言等6大能力。”徐斌艳在借鉴国外数学核心能力研究的基础上, 从数学活动的视角, 提出了六大数学核心能力, 包括数学问题提出、数学表征与变换、数学推理与论证、数学问题解决、数学交流、数学建模。

综合国内外学者对数学核心能力的界定可以发现, 学者提出的数学核心能力是针对整个数学教育阶段的学生而言。因为本文主要研究的是初中阶段的数学教育, 所以, 从初中数学教育的特点出发, 本研究认为初中阶段的数学核心能力培养是十分必要的, 只有将数学核心能力得到有效的培养, 才能促使学生数学素养进一步提升, 更好地成长与发展。

## 二、数学活动本质及其数学能力

已有研究表明, 数学活动基本上分为三个阶段: 对经验材料的数学组织; 对数学材料的逻辑组织; 对数学理论的应用。这三个阶段也反映了数学学科的形成和发展途径。从教育角度看, 在作为数学活动的数学教学中, 教给学生的不是死记现成的材料, 而是让学生自己独立地发现科学上已经发现了的东西, 同时学会逻辑地去组织通过经验而得到的数学材料, 最后在各种具体问题上应用数学理论知识。

### (一) 经验地组织数学材料

在数学教学中, 学生会碰到大量的经验性材料, 包括来自日常生活经验的各种情景或问题; 来自其他学科领域 (如物理、化学、生物、地理等) 的各种对象和关系; 或者是为了教学而特别准备的对象 (教材、教具等), 或者是需要进一步一般化和抽象化的数学材料 (数学对象)。在这一阶段, 学生需要借助于观察、试验、归纳、类比、概括等手段, 处理加工这些经验材料, 寻找易于从数学角度理解的事实依据或信息。

例如在教学“三角形内角和是 $180^\circ$ ”时, 可以让学生用量角器量或者裁剪等观察和试验的方法, 认识数学教学内容, 虽然它还不是证明, 但为寻找证明方法积累了经验。在数学活动中, 可以选择学生熟悉的日常经验进行讨论, 例如在硕大的校园里, 从教室到食堂有多条线路, 我们选择哪条线路? 为什么这样选择? 让学生从数学角度加以交流讨论。因此在这一数学活动阶段学习数学, 有助于学生形成或发展从数学角度提出问题、数学交流、数学表征、数学建模等能力。

### (二) 逻辑地组织数学材料

当学生在经历从数学角度组织或积累经验材料后, 还需要抽象出原始概念和公理体系并在这些概念和体系的基础上演绎建立理论。理论的演绎结构是数学概念体系的一个重要特点, 在教学过程中能够而且应当建立有助于向学生揭示这个特点的教学情境。

例如：正方形是含有直角的菱形，菱形是含有相等邻边的平行四边形，平行四边形是对边两两平行的四边形，四边形是含有四边形的多边形，多边形是封闭折线所围成的图形，图形是点的集合。这样从一个概念引导到另一个概念，最后引导到用来作为原始概念的“集合”和“点”这两个概念。逻辑组织还包括用演绎法来“证明”由归纳而形成的、以假设的形式叙述出来的命题。在这一活动阶段，还应该重视数学活动中归纳法的作用和一般的推理作用，包括寻求证明什么、从何证明、怎么证明等。因此，通过这样的数学教学过程，可以培养学生数学地解决问题、数学交流、数学表征、数学符号变换、数学推理论证等能力。

### （三）数学理论的应用

无论现代数学有多么抽象，它的根仍然深深地扎在实践之中，从过去的土地测量和商业贸易，到现代的物理、生物、经济学等。当在科学、技术或实践活动甚至历史的某个领域中产生问题时，数学方法往往有助于这些问题的解决。而要解决这些非数学领域的问题，首先必须把它翻译成数学语言，经过翻译后问题就转化为数学问题，然后就能在严格的数学世界中解决抽象出的数学问题。这一活动阶段强调，学生通过积极的思维活动由具体内容中抽象出数学问题。而观察问题并由问题的具体内容抽象出它的数学方面的能力是通过长期练习培养并巩固起来的。这一阶段重在培养学生学会把具体情况数学化，有助于培养学生数学地解决问题、数学交流、数学逻辑推理论证、数学建模等能力。

基于上述分析，数学活动与若干数学能力密切相关，它们包括从数学角度提出问题，数学表征与变换，数学推理与论证，数学地解决问题，数学交流，数学建模等，因此这类数学教学，将有助于学生形成和发展这6大核心能力。如图1-1所示三个数学活动阶段与数学核心能力的关系。

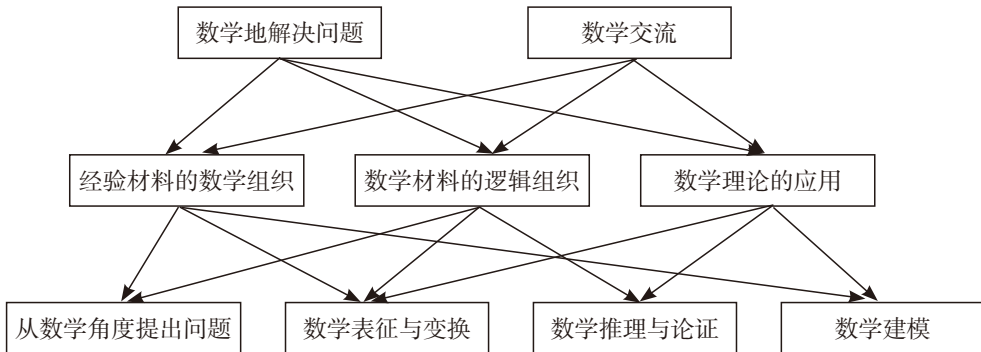


图1-1 数学学科核心能力与数学活动关系图

### 三、数学学科核心能力的内涵

数学活动的本质决定着学生数学核心能力的构成，在作为数学活动的数学教学中，学生将形成并发展这些能力，下面详细分析这些能力的内涵。

### （一）从数学角度提出问题

研究者们从不同视角探讨问题提出能力的内涵，并提出各自的认识或界定。如斯尔佛（Silver）从两个层面来定义问题提出：1.分析、探究一个给定的情境，来产生一个新的数学问题。2.在问题解决的过程中对问题进行阐述（formulation）和再阐述（reformulation）而形成一个新的数学问题。而且，问题提出可以发生在问题解决前、问题解决时或者问题解决后。我国台湾学者梁淑坤则将问题提出定义为：问题提出是用自己的看法想出一个数学问题。在问题提出的过程中，问题提出者会用自己的数学知识和生活经验把情境、人物、事件、数字、图形等建立关系并组织起来，提出一个数学问题。

基于上述分析，本研究将“从数学角度提出问题的能力”界定为：基于某情境或问题产生自己新的数学问题，或者在问题解决过程中或解决后产生新的子问题，并用数学语言表述出这些生成的、创造的、独立的新数学问题。

### （二）数学表征与变换

数学表征与变换是各国数学教育改革中最受关注的核心能力之一。从相关研究上看，数学表征是指用某种形式表达数学概念或关系的过程。数学表征有助于学生理解概念、关系或关联以及解决问题过程所使用的数学知识。学习者若要理解某个数学问题，就必须在这个数学问题与一个更易理解的数学问题之间建立一个映射，而表征就是这个映射过程。对照已有的研究成果，我们将数学表征能力界定为：用某种形式，例如书面符号、图形（表）、情景、操作性模型、文字（包括口头文字）等，表达要学习的或处理的数学概念或关系，以便最终解决问题。

数学变换是指在数学问题解决过程中，保持数学问题的某些不变性质，改变信息形态，将要解决的问题进行数学化，使之达到由繁到简，由未知到已知，由陌生到熟悉的目的。因此数学变换能力是指：为了使得问题能够简化或成功解决会使用改变信息形态的某种数学转化策略。

### （三）数学推理与论证

推理是数学的基本思维方式，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式。数学推理则是指人们在数学观念系统作用下，由若干数学条件，结合一定的数学知识、方法，对数学对象形成某种判断的思维操作过程。作为一类推理，它有其自身的特点：首先，数学推理的对象既不是生活中的常识，也不是社会现象，而是表示数量关系和空间形式的数学符号；其次，在某一个思考过程中，数学推理较之一般推理更是环环相扣连贯进行，并且，推理的依据主要来自问题所在数学系统。数学高度的抽象性和逻辑的严谨性使得数学推理相对具有一定的难度。

论证离不开推理，在论证过程中，之所以能够根据已知判断的真确认另一判断的真或假，正是在已知判断和所要论证其真或假的判断之间建立必然的逻辑联系，而后者则是从前者通过推理形式推出来的，所以说论证过程必须应用一个或一系列的推理。基于上述分析，“数学推理论证能力”的具体内涵为：通过对数学

对象（数学概念、关系、性质、规则、命题等）进行逻辑性思考（观察、实验、归纳、类比、演绎），从而做出推论，再进一步寻求证据、给出证明或举出反例说明所给出推论的合理性的综合能力。

#### （四）数学建模

数学建模经常与数学应用归在一起，但两者着重点不同，建模着重建立真实世界与数学世界之间的可逆联系，关注抽象出数学问题与解决现实问题的过程。由于数学建模不是线性过程，需要不断地从数学世界返回真实世界中检验结果，完善模型。研究者布鲁姆（Blum）提出数学建模是一个非线性的循环过程，它由7个步骤组成：1.理解现实问题情境；2.简化或结构化现实情景，形成现实模型；3.将被结构化的现实模型翻译为数学问题，形成数学模型；4.用数学方法解决所提出的数学问题，获得数学解答；5.根据具体的现实情景解读并检验数学解答，获得现实结果；6.检验现实结果的有效性；7.反馈给现实情景。因此，数学建模能力表现为：面对某个综合性情景，能够理解并建构现实情境模型，会将该模型翻译为数学问题，建立数学模型，然后会用数学方法解决所提数学问题，再根据具体的情境，解读与检验数学解答，并验证模型的合理性。

#### （五）数学地解决问题

作为数学活动过程中重要的能力——数学地解决问题的能力，目前没有统一的界定。例如美国NCTM在2000年颁布的标准中将数学地解决问题描述为：通过解决问题掌握新的数学知识，解决在数学及其他情境中出现的问题，采用各种恰当的策略解决问题，能检验和反思数学问题解决的过程。德国在2003年颁布的数学课程标准中对数学地解决问题界定为：拥有适当的数学策略去发现解决问题的思路或方法并加以反思。我国数学教育一直非常重视数学地解决问题的能力，2011颁布的《义务教育数学课程标准》（以下简称《课标》）对数学地解决问题做了较为详细的说明，强调通过数学课程学习初中学生应获得数学问题解决能力。通过上述分析，本研究将数学地解决问题界定为：采用各种恰当的数学知识、方法与策略，解决在数学或其他情境中出现的问题，并能检验与反思数学问题解决的过程。

#### （六）数学交流

重视数学交流能力的培养是现代社会发展对数学教育的要求。目前世界许多国家在其数学课程标准中明确提出了培养学生的数学交流能力的要求。如英国国家课程在“关键概念”板块中指出“有效地数学交流能力”是三大能力之一，要求学生能理解和解释以多种形式呈现的数学，并以最合适的方式有信心地交流数学。国际经济合作与发展组织（OECD）主持的国际学生评价项目（PISA）也将数学交流能力作为数学能力评估框架中的一种，且将其描述为“伴随交流过程的数学读写能力”。我国2011版义务教育阶段数学课程标准也明确要求学生能与他人交流各自解决问题的算法和过程，并能表达自己的想法等。不仅各国数学课程标准等文本对数学交流能力做出说明，而且亦有丰硕的研究成果为我们认识数学交流能力提供参

考。综上所述，本研究将数学交流能力界定为：能不同程度地以阅读、倾听等方式识别、理解、领会数学思想和数学事实，并能以写作、讲解等方式解释自己的问题解决方法、过程和结果，针对他人的数学思想和数学事实做出分析和评价。

综上所述，我们获得由6大能力成分构成的数学核心能力模型及其内涵，现汇总在表1-1中。

表1-1 数学学科核心能力内涵

数学学科核心能力内涵	
核心能力成分	核心能力内涵
从数学角度提出问题	基于某情境或问题会产生自己新的数学问题，或者在问题解决过程中或解决后产生新的子问题，并用数学语言表述出这些生成的、创造的、独立的新数学问题。
数学表征与变换	用某种形式，例如书面符号、图形（表）、情景、操作性模型、文字（包括口头文字）等，表达要学习的或处理的数学概念或关系，以便最终解决问题。为了使得问题能够简化或成功解决会使用改变信息形态的某种数学转化策略。
数学推理与论证	通过对数学对象（数学概念、关系、性质、规则、命题等）进行逻辑性思考（观察、实验、归纳、类比、演绎），从而做出推论，再进一步寻求证据、给出证明或举出反例说明所给出推论的合理性的综合能力。
数学建模	面对某个综合性情景，能够理解并建构现实情境模型，会将该模型翻译为数学问题，建立数学模型，然后会用数学方法解决所提数学问题，再根据具体的情境，解读与检验数学解答，并验证模型的合理性。
数学地解决问题	采用各种恰当的数学知识、方法与策略，解决在数学或其他情境中出现的问题，能检验与反思数学问题解决的过程。
数学交流	能不同程度地以阅读、倾听等方式识别、理解、领会数学思想和数学事实；并能以写作、讲解等方式解释自己的问题解决方法、过程和结果，针对他人的数学思想和数学事实做出分析和评价。

#### 四、数学核心能力的主要维度

##### （一）数学表征与变换能力

数学是一门高度抽象的学科，而初中生的思维具有形象性，因而初中数学的教学需要选择合适的数学表征形式帮助学生理解数学。学生的学习需要借助教师对知识的不同表征进行理解，在这个过程中，学生不仅能深刻理解数学知识，也学会了不同的表征方法。在解决数学问题的过程中，要想达到对数学问题的不同表征，需要转换视野，从不同的角度对问题进行表征，进而达到多样化表征的目标。

##### 1. 数学表征的内涵和分类

20世纪70年代以来，表征问题受到数学教育者们广泛的关注。“表征”一词最初源于认知心理学，“指信息在心理活动中的表现和记载的方式”，也称为心理

表征。后来逐渐引入到教育领域中，教育学上的表征是指知识在学习者头脑中的呈现和表达方式，是基于已有知识经验的自主建构过程。从这里可以看出，表征是一种认知活动，即学习者在大脑中如何建构、组合、表示当前所学知识的过程。同时，表征也是认知活动的结果，即知识或信息储存在大脑中的形式。所以，从这个意义上来说，表征是过程与结果的统一。

从已有数学表征方面的研究看，“数学表征是指用某种形式表达数学概念或关系的过程。”若要达到对数学问题的深刻理解，就需要学习者能在这个数学问题中出现的结构与另一个更易理解的数学问题结构之间建立映射，数学表征就是两个问题之间的映射过程。数学表征对数学学习具有重要作用，学生通过表征数学对象，可以获得对数学知识的深刻理解，提高学习的效率。数学表征也影响数学问题的解决，对问题的正确表征是解决数学问题的关键。关于数学表征的分类主要有以下三种：

第一，数学表征最常见的一种分类是认知心理学角度的分类，分为外部表征和内部表征。外部表征将问题的信息以文字表征、符号表征、图形表征和操作表征等形式呈现，可以实现问题解决者对问题信息的充分理解。内部表征反映了问题的思考过程在个体头脑中的呈现，外在表现为学习者能够通过自己的语言将问题的条件与目标描述出来。在问题解决的过程中，外部表征和内部表征通常是相互关联的，外部表征反映了学习者对数学对象的内部建构和思维过程，内部表征则指导学习者的知识呈现方式。

第二，根据表征方式的抽象性，数学表征可分为形象表征和抽象表征。形象表征包括以操作材料、图画模式以及出声言语和书面符号等形式出现的表征方式；抽象表征以一种比较抽象的方式进行表征，包括用概念、定理、命题等方式表征数学问题，它主要是用符号或代号表征数学问题，因而也被称为命题表征。形象表征有助于减少记忆负荷、提高贮存能力，抽象表征有助于了解问题解决的实质和关键，并通过与形象表征各种方式的结合达到解决问题的目的。初中生的思维具有具体形象性的特点，但数学是一门抽象的学科，对数学的理解需要借助形象化的表征；同时，借助抽象表征可以促进学生对数学问题本质的理解，两者共同构成了完整的表征系统。

第三，视觉—空间表征是一种视觉化的表征，本质是图像符号，主要是运用图像对被表征的对象进行形象化的描绘。视觉—空间表征又分为图片表征和图示表征。图片表征则是对问题的外在表达进行表征，在表征问题时通常从视觉的角度出发，构建生动的、细微的视觉图像。这在初中低年级使用的较多，是一种主要的也是最佳的表征方式。图示表征是对问题中的平面或空间关系的表征，包括对问题的空间关系和空间转化进行表征。图示表征的使用与学生的空间能力、抽象思维能力发展密切相关，由于高年级的学生抽象逻辑思维开始萌芽，因而这种表征方式往往在高年级开始起作用。

## 2. 数学表征能力

数学表征既与数学学习密切相关，又影响数学问题的解决，因而培养学生的数学表征能力是数学教育的重要目标。徐斌艳将数学表征能力界定为：“用某种形式，例如书面符号、图形（表）、情景、操作性模型、文字（包括口头文字）等，表达要学习的或处理的数学概念或关系，以便最终解决问题。”数学表征能力具体表现为：在特定的情境下能识别、解释出现的知识，并能根据实际情况和目的选择、转换不同的表征形式解决数学问题。数学表征能力的高低一定程度上反映了学生对数学的认知层次，它的发展是数学能力评价的重要参考。著名的学生能力国际评价项目PISA，在2000年到2012年的测评中，数学表征能力一直是其中的一项重要指标。2000年4月，全美数学教师理事会NCTM出版了《学校数学教育的原则和标准》，标准将表征能力与问题解决能力、交流能力、联系能力、推理与证明能力并列为五大核心数学能力。由此看出数学表征能力已经成为数学教育重点培养的能力之一。

## 3. 数学变换的内涵和分类

数学变换是数学思考的一种方法，包括两种类型：不同数学结构之间的变换和同一结构内的变换。不同数学结构之间的变换是指“将一个数学对象从一个数学结构中变换到另一个数学结构中，这种变换的本质是映射。”同一结构内的变换是指为了得到问题结论，对问题进行变形和转化。综合来看，数学变换是在研究和解决问题时，依据数学法则和逻辑规则将问题变换使之转化，而数学问题解决的过程就是在保持一定不变关系下的“变换”过程。研究解题的著名学者波利亚在他的著作《怎样解题》中，特别强调了数学解题过程中问题变换的重要性。他在阐述“怎样解题表”时，反复论述找一个与要求问题相关的、类似的问题，即将未解决的问题转化为已经解决的问题，从而解决当前的问题。他在启发人们不断变换问题的同时，还给出了一些建议：“把原问题变换为与它等价的新问题，建议你去思考一个可能有关的问题等。”

由波利亚对数学解题的建议可知，数学变换是解决数学问题的一种基本方法，对数学问题的适当变换是解题的关键。数学变换的方法在各阶段的数学学习中都会运用到，初中阶段的数学涉及的数学变换主要有三类：“代数变换、几何变换和数形变换。”代数变换，包括恒等变换（如方程）、同解变换、公式变换、顺序变换、同余变换等，这里的代数变换涉及数与代数领域和图形与几何领域，如恒等变换主要指数与代数领域的方程，公式变换主要指图形与几何领域的面积、体积的计算。几何变换，主要是指图形与几何领域的变换，包括刚体变换（如平移、旋转、对称）、等积变换（如形变面积不变、形变体积不变）等。数形变换，主要指数与形之间的变换，包括几何代数化的解析几何（如正比例、反比例函数）、图文变换、数形联想、图表变换、图式变换等。数学是表示数量关系和空间形式的科学，代数变换、几何变换和数形变换沟通了数学中的数与形，实现了数形之间的互相转化。

数学问题的解决需要对问题进行适当变换，如何对问题进行恰当的变化是解题的中心环节。初中数学问题的恰当变换需要遵循联想类比、熟悉化、简单化三个基本原则。联想类比原则是指，在解决问题的过程中，遇到的问题如果使用常规解法比较困难，可以联想认知系统内的相似结构，从而把问题转化为该系统内的知识求解。这就是波利亚在解题的“拟定方案”中所建议的“尽量想出一道你所熟悉的具有相同或相似未知量的题目”、熟悉化原则指将陌生的、不熟悉的问题转化为熟悉的问题求解，从而利用已有的知识经验解决陌生的问题。简单化原则要求将复杂的、不易解决的问题，转换为一个或几个简单的问题，通过解决简单问题完成复杂问题的解决。按照这三个原则可以达到对问题恰当变换的目的，从而高效解决问题。

#### 4. 数学变换能力

基于对数学变换的认识，数学变换能力是指“为了使得问题能够简化或成功解决会使用改变信息形态的某种数学转化策略。”数学变换能力要求对数学问题能够进行不同结构之间的转换和同一结构之间的转化，这就要求学生要沟通数学知识和数学方法之间的联系，使新学习的内容和原有的数学认知结构建立联系，从而促进学生形成有意义的数学学习。将数学问题进行不同变换的过程，有利于引导学生发散思维，转换思想与理念，学会从不同角度分析和思考问题，在发展学生思维的探究能力、提高解决问题能力的同时，也有助于学生体会多样化的数学，增加学习数学的兴趣。因此，培养初中生的数学变换能力，是初中数学教育的重要目标，也是初中数学学科实施核心能力培养的一个重要方面。

数学表征与数学变换能力是相互包含、密切联系的统一体。“数学表征能力表现为在具体特定的情境下能够识别、解释以特定表征形式出现的知识，并能够根据具体情况和目的去应用、选择、转换各种不同形式的表征用于数学问题的解决。”在对问题进行不同形式表征的过程中，包含了数学转化能力的运用，即在表征系统间转化和表征系统内转化。数学变换能力表现为对数学问题从不同角度分析，恰当转换问题，变换的最终形式表现为对问题的不同表征，这里包含了数学表征能力的应用。因而，对数学问题的分析、解答，同时包括了数学表征能力和数学变换能力的运用。

### （二）数学推理能力

#### 1. 数学推理的内涵

推理是由一个或几个已知判断，推导出未知结论的思维过程。从定义可以看出，推理包括前提、结论以及两者之间起桥梁作用的推理形式。前提是推理所依据的已知判断，表现为已知的事实或假设；结论是由已知判断推出的新判断；推理形式是连接前提和结论之间的和使推理得以发生的一种模式或框架，属于逻辑学的研究内容。从这个意义上来说，推理是一种形式逻辑，通过推理可以从已知知识得到未知知识，特别是一些不能通过感觉经验直接获得的知识。