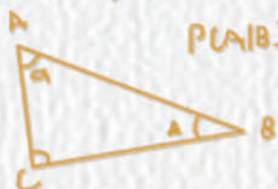
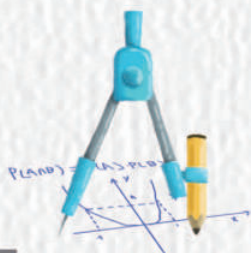


$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(u) du$$



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

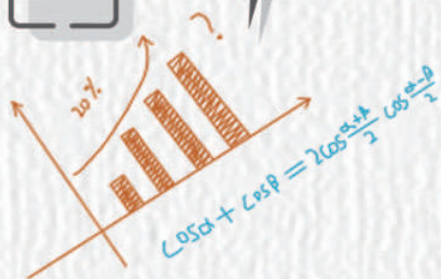
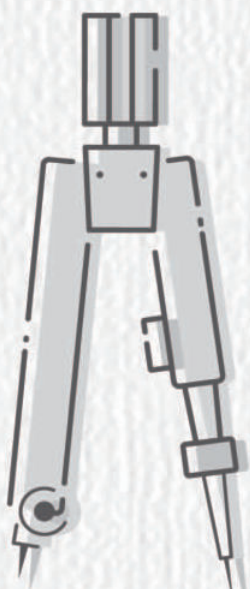


# 数学教育

## 与青少年心理发育

ShuXue JiaoYu Yu QingShaoNian XinLi FaYu

王伟云 著



吉林人民出版社

## 作者简介

王伟云，男，1970年出生于浙江绍兴，汉族，本科学历，中共党员。现任浙江省绍兴市上虞区崧厦镇中心小学数学教师。本着“用心经营教育，用爱温暖学生”的理念，一直踏实于农村小学教学工作第一线。教学工作中，加强自身教学基本功的训练，勤于反思，注重教学实效，坚持数学教学与生活实际相结合。指导学生参加全国小学生数学竞赛多人次获奖。重视小学数学的教学教育研究，有多篇论文在各级刊物上发表。

# 数学教育与青少年心理发育

王伟云 著

吉林人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学教育与青少年心理发育 / 王伟云著. -- 长春: 吉林人民出版社, 2019.9

ISBN 978-7-206-16359-3

I. ①数… II. ①王… III. ①数学课—教学研究—中 小学 IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 209948 号

## 数学教育与青少年心理发育

---

著 者: 王伟云

责任编辑: 门雄甲

封面设计: 飒 飒

吉林人民出版社出版 发行 (长春市人民大街 7548 号 邮政编码: 130022)

印 刷: 长春市昌信电脑图文制作有限公司

开 本: 787mm × 1092mm 1/16

印 张: 13.25 字 数: 190 千字

标准书号: ISBN 978-7-206-16359-3

版 次: 2019 年 9 月第 1 版 印 次: 2019 年 9 月第 1 次印刷

定 价: 45.00 元

---

如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与印刷厂联系调换。



## 前 言

追溯数学，其历史源远流长，可以说从文明之火初燃的那一刻起，数学就与人类相伴，数学文化就是随着人类文明的发展而发展的。到了20世纪，数学与数学以外的任何学科如自然科学、社会科学及哲学等的关系更是发生了翻天覆地的变化。华罗庚曾用“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学”来概括数学的应用之广，拉奥用“一个国家科学的进步，可以用它消耗的数学来度量”来说明数学是衡量一个国家科学技术发展快慢的一把尺子。毫无疑问，数学除了与我们的生活息息相关之外，它还关乎着整个国家国力的强弱。数学教育在我国教育行业更是占据着举足轻重的地位。而在数学教育中所占比重较大的就是对青少年学生的教育。青少年时期是人生中最关键而富有特色的时期，是个体由不成熟的童年向成熟人生过渡的时期，过渡性往往和不稳定性联系在一起。因此，青少年的心理发展成为社会的关注对象。作为教师更要在教学过程中密切关注青少年的心理健康问题。

本书主要有五个章节。第一章从数学文化与人类文明的角度出发，简单介绍了数学文化的特征、数学教育与人类文化、近代数学发展与现代文明以及国内外数学文化发展历程等一些数学文化背景和环境。第二章对数学教育进行了意义探究，主要从数学教育意义的探求、小学数学教育的现状、数学课程的理性探索和数学教育的科学评价进行了探讨。第三章简单阐述了我国中小学数学教育改革，通过对国外数学教育改革和我国数学教育改革的探究和分析，对数学教育改革进行了思考。第四章主要介绍了青少年心理发育的特征，结合了大量的权威研究成果，对青少年心理健康及其影响因素、青少年心理发展现状和青少年心理健康存在的问题进行了分析，并给出了建议。在本书的第五章，笔者结合了青少年心理发展特征对数学教育进行了研究，简单总结了小学数学教育的特征，重点分析了小学数学教育和奥数学



习的关系，小学各年龄阶段的心理特点和数学认知水平，并对于如何在数学教学中进行心理健康教育和突破数学学习中形成的心理障碍的方法进行了探究。

本书参阅并引用了大量参考文献，笔者在此对这些文献的作者致以真诚的谢意。由于作者水平有限，加上撰写时间仓促，书中不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。



## 目 录

<b>第一章 数学文化与人类文明</b> .....	1
第一节 数学文化的特征 .....	1
第二节 数学教育与人类文化 .....	17
第三节 近代数学发展与现代文明 .....	30
第四节 国内外数学文化发展历程 .....	37
<b>第二章 数学教育的意义探究</b> .....	42
第一节 数学教育的意义 .....	42
第二节 小学数学教育的现状 .....	55
第三节 数学课程的理性探索 .....	66
第四节 数学教育的科学评价 .....	78
<b>第三章 我国中小学数学教育改革</b> .....	89
第一节 国外数学教育改革 .....	89
第二节 我国数学教育改革 .....	103
第三节 数学教育改革的思考 .....	111
<b>第四章 青少年心理发育的特征</b> .....	121
第一节 青少年心理健康及其影响因素 .....	121
第二节 青少年心理发展概述 .....	128
第三节 青少年心理发展现状 .....	135



第四节 青少年心理健康存在的问题 .....	141
第五章 结合青少年心理发展特征的数学教育研究 .....	146
第一节 小学数学教育的特征 .....	146
第二节 小学数学教育和奥数学习的关系 .....	151
第三节 小学各年龄阶段的心理特点和数学认知水平 .....	167
第四节 如何在数学教学中进行心理健康教育 .....	178
第五节 数学学习中形成的心理障碍与突破方法 .....	190
参考文献 .....	203



# 第一章 数学文化与人类文明

## 第一节 数学文化的特征

### 一、文化的特征

#### (一) 文化和文明

说起“文化”这个词，大家都不会感到陌生，因为我们在日常生活中经常提到这个词。它涉及的范围很广，如东西方文化，我国的茶文化、酒文化等。例子很多，不胜枚举，那么到底什么是文化呢？自“文化”一词出现以来，从西方到东方，从狭义到广义，不同的人对文化的理解与释义亦是不尽相同。可以说到现在为止，人们对于文化的定义依然没有一个令人满意的答案。考证专家认为：“文化”一词，在中国古代很早就有，比西方要早，但西方对“文化”的论述比中国古文献要广泛和科学一些。追溯中国最早的“文化”，出自《周易》“观乎天文，以察时变；观乎人文，以化成天下”。之后有西汉刘向的“凡武之兴，为不服也，文化不改，然后加诛”之说，但这里的“文化”与我们现在理解的文化的含义完全不一样。在西方语言中，英语“culture”一词取自拉丁语“cultura”，在1690年版《通用词典》中定义为：人类为使土地肥沃，种植树木和栽培植物所采取的耕耘和改良措施。这种定义法与中国人所理解的文化意思截然不同，从中也可以看出中西方文化的含义很早就存在着差异。

“文化”一词是人类学的一个核心概念，但也是定义争议最多的一个词。1952年，美国学者克鲁伯和克拉克对1871—1951年出现的“文化”定义做了统计，共有160多种定义。随着20世纪文化热的兴起，对文化的探讨更是层出不穷，到20世纪80年代，对文化的定义已经达到了260多种。

在《现代汉语词典》里“文化”的解释是“人类在社会历史发展过程中



所创造的物质财富和精神财富的总和，特指精神财富。”在“文明”一栏中，第一个解释就是“文化”。而在《英汉大辞典》里，对“culture”的解释有“文化，文明；教养，修养；陶冶，教育”，“civilization”的解释是“文明：(特定地区、国家和时期的)文化、社会 and 生活方式；开化，教化(过程)”。由词典的解释看“文化”与“文明”这两个词没有本质的区别，主要是看个人用词的风格或某些地方约定俗成的习惯。也有学者认为：“文明”偏在外，凡是涉及政治经济、法律法规、教育，以及工艺与科学的内容，都属于“文明”的范畴；“文化”偏在内，主要指精神层面的东西，如宗教、哲学、艺术等思想与习俗。李大潜院士给了他对文化的独特理解，他认为称得上“文化”的东西应该是具有里程碑意义的东西，如在人类认识或改造世界的过程中，起到了关键性作用或决定性作用的东西，或者是经过漫长的岁月积累起来的，并逐渐转化为人类的素质与教养的东西。这两种东西相互交融贯通，一方面构成了现在意义上的文化，另一方面也推动了人类文明的进程。

早在原始社会，人类因为要满足最低的生存需求，农业民族和畜牧民族应运而生。早期文化大多是在农业民族中产生的，这是由农业民族和畜牧民族的性质决定的。农业民族因兴修水利需要大量的人力，而畜牧民族因狩猎不需要大规模聚居。正因为农业民族有大规模聚居的要求，才有了对文字的需求，于是他们发明了文字，从而产生了狭义的文化。

判断文明出现的标准有三个：城市的出现、文字的产生及国家制度的建立。但我们偏向于文化的产生比文明要久远，因为人类有历史记载就有文化，但文明被认为是文化发展到高级阶段的特征，是人类有了语言文字之后才产生的。

有了“广义的文化”之后，我们可以这样理解现代文明：现代文明是现代人类在物质财富和精神财富两个方面所取得的总体成就以及在生活质量方面所体现出来的进步状况和水平。整个人类文明发展和演变的过程其实就是人类从愚昧走向文明、从粗浅走向智慧的过程。

## (二) 文化的分类及特征

一般来说，定义多，分门别类的方法也多。如果我们把这 260 多种的文



化定义进行分类，将相同类别的定义放在一起，再用简洁的语言将其总结概括出来，文化的定义是否就能确定下来呢？随着人类社会的不断发展与进步，文化也在不断地丰富与创新，每当有新的血液融入这个大家庭里来，文化的内涵就会拥有新的活力。文化不会停滞不前，那么也就意味着它的定义也不会只拘泥于现在对它的概括，它必将随着人类的发展继续前进。

首先，文化是一个复合的整体，是有差别的共有。它是由一系列能被集体所认同共有的概念、价值观和行为准则组成的共同标准，涉及面很广，遍及社会生活的方方面面。在特定的历史条件下，社会生活中的每一个方面又会形成自己的子文化，而一个社会的文化就是这些子文化构成的体系。也就是说，社会生活中形成的子文化与整体文化之间具有一致性，而且构成整体文化的各个子文化之间也是相互联系、相互支持、相互渗透的。比如说我们的日常生活、商品买卖、银行贷款等都是离不开数学的。意大利数学家在20世纪20年代建立了鱼类捕食与被捕食关系的模型，此模型就是数学与生物学的结合。当然，即使在同一个人社会内部，文化也具有差异性。例如，男性文化和女性文化、少儿文化与老年文化，不管在哪个社会都有区别。其实，不管身处什么民族、什么社会，文化都会因为年龄、性别、职业、风俗、阶级等的不同而存在着差异性。

其次，文化不是通过遗传而天生具有的，它是通过学习得来的，并且是不断发展变化的。人的行为分为本能的和学习的两类。自然界所有的动物天生就具有一定的学习能力，这是与物种的生存相关联的，但人类学习的能力远远胜过动物本能的学习。文化是人类知识与社会生活实践相结合的产物，它与自然事物的分水岭就在于此事物是否凝聚了人类的知识、意识与生活经验。另外，文化不是一成不变的，它是随着人类社会的发展而不断变化的。每一个民族的文化都是不一样的，都具有封闭性和排异性，还具有不断扩散的传播性。随着人类社会的进步、科学技术的发展、人们生活经验的不断积累及生活空间的不断扩大，再加上不同的地区、民族、国家的交往和沟通日益增多，这些地区、民族、国家之间的文化必然会互相影响、互相渗透，本土文化通过学习和吸收外来文化而不断变化发展。众所周知，古希腊数学在人类文明史上占有重要一席，却不知古希腊数学的辉煌就是古巴比伦、古埃及数学与古希腊哲学融会贯通的结果。



最后，文化的基础是象征。它是一种被传播的通信象征，其最主要的表现方式是语言和文字，除此之外还有图像（如各国国旗、绘画）、肢体动作（如鼓掌、拥抱、摇头等）、建筑物（如天安门、故宫等）、行为方式（如送礼）等其他的表现方式。通信联系并不是人类所特有的，动物之间也有这种联系，所有的动物相互间可以使用各具特色的呼唤、叫喊、姿势等信号进行通信联系，而且这种信号通信都是由遗传决定，不能做任何改变的，比如说任何一只羊遇到危险后发出求救信号的方式绝对是一样的。而人类的语言则完全不同于动物，组成人类语言的词不仅是一种信号，而且是一种象征。象征是灵活的，人们完全可以任意组合、修改，表达并不存在的事物，或者传播宗教、道德、文化和科学等各种思想。可以说，整个社会文化体系正是通过语言、文字等象征符号进入我们的大脑，而人类的思维又通过这些象征物来解读眼前的各种事物，从而达到解读社会的目的。

## 二、数学文化的特征

### （一）数学文化的内涵

“数学文化”这个词最早出现在西方，由美国数学家怀尔德于1950年在其代表作《数学概念演化的初步阶段》中率先提出，我国最早提出此观点的是北京大学的邓东皋、孙小礼。1990年，邓东皋、孙小礼等人编写了《数学与文化》，他们从自然辩证法的角度对数学文化做了较为深入的探讨，这是我国首次谈到数学文化，也是第一本有关数学文化的书籍。2001年，为配合教育部倡导的大学生文化素质教育活动，南开大学顾沛教授率先在高校开设了以培养大学生文化素质为目的、以文理交融为特色的数学文化选修课程。2002年，在北京召开的第24届国际数学家大会期间，91岁高龄的陈省身先生为“中国少年数学论坛”活动题词，在“中国少年数学论坛”活动的横幅中，就使用了“数学文化”一词。2003年4月，天津市三所著名高校即南开大学、天津大学和天津师范大学，联合举办“数学文化展示月”活动，“数学文化”瞬间成为大学生文化素质教育活动的主题词。同年颁布的《普通高中数学课程标准（实验）》中，多处谈及数学文化，并在二级标题中出现该词。同年10月，“数学文化”成为高等教育出版社在北京召开“全国数学



史、数学文化课程建设与教学研讨会”的主题词。“数学文化”一词出现的时间不长，对许多人来说，还是陌生的，但是这一词汇能在短期内得到教育部、出版社、各高校及教育工作者们的认可，说明它极富生命力。而且从数学文化观念的提出到现在，吸引了越来越多人的关注，引发了一场遍及全国的数学文化研究热，使数学文化正焕发出勃勃生机。

那么什么是数学文化呢？结合目前的文献分析，再根据数学文化内涵的不同侧重点，我们把它主要概括为三种观点。一种观点是从数学与文化的关系出发，认为数学文化的含义应为文化意义下的数学。数学家齐民友先生就认为：数学作为文化的一部分，其最根本的特征是它表达了一种探索精神。数学作为文化的一部分，其永恒的主题是认识世界，也认识自己。第二种观点是从文化形成的一个标志是从文化共同体的确认这个角度考虑的，认为数学文化是由数学家群体在认识数学世界和相互交往中自觉形成的一种相对独立、相对稳定的社会意义网络。郑毓信、王宪昌认为，数学文化是一种特殊群体即数学共同体所持有的行为、观念和态度等，数学文化是数学共同体产生的文化效应，同时还强调数学文化不是一个自生自灭的封闭系统，而是一个开放的系统。第三种观点认为文化有广义与狭义之分，而数学文化是一种特殊的文化，所以也有广义与狭义之分。顾沛就是从狭义和广义两个方面阐述数学文化的，他认为：狭义上，数学的思想、精神、方法、观点、语言，以及它们的形成和发展过程就是数学文化；广义上还包含数学史、数学中的美、数学家的生平事迹、数学教育、数学与各种学科之间的关系、数学发展中的人文成分等。

除此之外，还有其他一些具有代表性的说法，如美国学者怀尔德(R.Wilder, 1896—1982)在他的经典著作《数学概念的进化》和《作为文化系统的数学》中，从文化生成、发展等角度提出数学文化系统理论。他认为：“数学是一个由于其内在力量与外在力量共同作用而处于不断发展和变化之中的文化系统。”也就是说，数学文化由数学传统和数学本身组成。

美国克莱因(M.Kline)认为数学是一种理性精神，在人类文明中一直充当着主要的文化力量；李兴怀认为数学文化是社会群体在各种数学活动中所创造的物质财富和精神财富的总和。其中，物质财富指的是数学知识体系，精神财富指的是数学的思想、方法和观念等人类精神方面的内容。数学课程



标准说数学是人类的一种文化，它的内容、思想、方法和语言是现代文明的重要组成部分。

以上观点是从不同角度来论述数学文化的，因为“数学文化”一词出现得较晚，所以至今对“数学文化”这个概念还没有一个公认的、统一的界定。从以上的论述我们还可以看出，数学文化不是数学外在的附属品，也不是简单的“数学”+“文化”，它的本质是指数学作为人类认识世界和改造世界的一种科学语言、思维工具、思想方法、理性精神及活动产品，是数学与人文的结合。数学的发展就是文化的发展，数学与文化是不可分离的。

## （二）数学文化的特征

《普通高中数学课程标准（实验）》认为，数学文化的重要特征不仅包含数学的抽象性、形式化、严密性，还包括数学在应用方面的广泛性等。顾沛教授对数学的抽象性、精确性及应用的广泛性的特点做了较详尽的论述。数学文化除了以上这些特征外，还有许多其他特征。下面我们从数学文化的传统性、哲学性、美学性、渗透性、发展性、文学艺术性及趣味性七个方面来谈数学文化的特征，以便更全面地认识数学文化。

### 1. 传统性

怀尔德在其代表作《作为文化系统的数学》中指出，数学是一个文化系统，它具有来自内部与外部两种文化基因。一方面，人类文明的进步受制于数学的发展；另一方面，数学文化又受所处时代文化的影响，要从其他文化中汲取营养。因为不同的国家、不同的民族、不同的地区有着不同的文化背景，当然他们各自产生的数学文化也就不一样。春秋战国时期，我国虽有百家争鸣的学术风气，言谈也自由，但因为是君主专制制度，表层次说数学的发展是为了丈量土地和兴修水利，深层次还是为了更好地帮助君主达到统治臣民、管理国家的目的。因此，从文化层面看，我们的数学是“管理数学”“实用数学”。在我国古代，数学文化最显著的特点就是崇尚实用，以“计算见长”且具有较强实用性的《九章算术》在这种氛围下产生也就不足为怪了。而古希腊的城邦实行“奴隶主的民主政治”，学术辩论气氛非常浓厚，在此理性思维得以长足发展。严谨的逻辑性是古希腊数学文化的显著特点，



由此产生了对后世有着巨大影响的《几何原本》。古代印度因几个世纪以来一直受着外来民族的侵略，对他们来说数学仅仅是一种计算技巧，研究数学的动力就是想制定一种标记季节循环的历书，因此印度出版的最早的书籍就是关于天文学的著作《已经确立的结论》。

我国有 56 个民族，不同的民族有着不同的风俗习惯，因而在我国又蕴藏着独具特色的少数民族的数学文化，其主要表现在建筑艺术、绘画艺术、服饰及天文历法、宗教等方面。代钦教授对蒙古族传统生活中的数学文化进行了深入研究。蒙古包是蒙古族的传统建筑，在建造过程中体现了数学的严谨性，在结构比例方面也符合黄金比例。不仅如此，蒙古服饰也运用了黄金比例结构，看起来更美观；还有蒙古族的图案艺术中比较偏爱有规律的三角形和四边形，这些都是长期以来蒙古民族智慧的结晶。又如，维吾尔族的传统服饰、清真寺庙、民间乐器、手工艺品等都涉及几何知识，藏族建筑、唐卡及壁画中采用的轴对称、中心对称，佛教中体现的函数思想等，展现数学文化的影子随处可见。苗族人服饰中的三角形、长方形、菱形、圆、星形线、螺旋线及玫瑰线等，以及由这些图形经过连接、组合、堆积等方式构成的太阳纹、网纹、回纹、鱼纹、蝶纹、水波纹等图案，成了黔东南地区一道亮丽的苗族服饰风景线。虽然各民族因其地理环境的不同所体现在数学文化方面的侧重点亦不同，但无可厚非的是数学文化已经融入人类的各个角落。在今天，人类文明已经走过了原始社会、农业社会、工业社会，正迈向信息社会，科学技术达到前所未有的高度，数学文化集地域性、民族性和世界性于一身，这也是科学技术发展的必然结果。

## 2. 哲学性

古希腊存在一种奇特现象，很多大哲学家都是大数学家，如毕达哥拉斯、亚里士多德等著名哲学家，他们在数学上也有杰出的成就，这是否从某个角度说明了数学与哲学同宗同源？著名数学家欧几里得的《几何原本》中说：点是没有部分的那种东西，线是没有宽度的长度，面是只有长度和宽度的那种东西。这些对点线面的简单形象描述都很具哲理性。

伟大的哲学家马克思一生都酷爱数学，他和恩格斯都认为数学是建立辩证唯物主义哲学的一个重要基础，马克思还把数学看作丰富唯物辩证法的一个源泉。马克思在探求微积分思想上颇有建树，这也验证了亚里士多德说



过的新的思想家眼里数学和哲学是一样的。

数学是一种哲学，其主要体现在思维上。思维是数学的灵魂，而抽象思维又是数学思维的根基，因此抽象思维也是数学文化哲学观的灵魂。著名的“哥尼斯堡七桥”问题要求的条件是“不重复走遍七桥”，欧拉将岛和岸抽象为一个点，桥抽象成一条线，就把问题转化为“一笔画问题”，不但解决了“不重复走遍七桥”的问题，而且还创立了一个新的数学分支——图论；对于英国大学生 F. 古色利于 1852 年提出的四色问题，一百多年来很多数学家都很重视，并进行了大量研究。应用抽象思维，去掉非本质的“地区的形状和大小”，抓住最本质的东西——相互位置，可以把问题转化为四色猜想，对此问题的解答又推动了拓扑学的发展。

数学文化的哲学性还表现在，一方面，数学的重要思想方法都会反映在某个哲学范畴上；另一方面，数学又能为我们更深一步地理解哲学提供工具。例如，数学的无穷小、连续的概念，也是哲学研究的范畴，芝诺悖论、17 世纪无限小的争论又需要借助数学知识加以理解，而且古希腊时期唯心主义与唯物主义的斗争一直贯穿数学发展的全部历史。

从 2000 年前的古希腊毕达哥拉斯学派的“万物皆数”，到欧几里得的点线面，再到今天的高科技时代，数学与哲学一直是相依相伴。德国数学家德莫林说：“没有数学，人们无法看透哲学的深度；没有哲学，人们也无法看透数学的深度；若没有了两者，人们就什么也看不透了。”如果把哲学比喻为望远镜，那么数学就是显微镜，两者相得益彰。

### 3. 美学性

美是一种和谐，美是一种境界，美是一种价值体验。美学不仅仅体现在史诗、音乐、造型（绘画、建筑等）上，还体现在数学上，它包括简单美、对称美、完备美、统一美、和谐与奇异美等。数学文化的一个重要内容就是数学文化的美学性，而对数学文化的审美追求也成了数学发展的动力之一。

1202 年，斐波那契从兔子问题得到斐波那契数列：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ……有趣的是这些斐波那契数在我们生活中随处可见，如打开手掌，每手生五指，每指生三节。身边大多数植物的花，其花瓣数是斐波那契数，且其他数目花瓣的花很少，如梅、桃、李、杏、梨、苹果、樱花等 5 枚，百合花、兰花、茉莉花 3 枚，毛茛属的植物 5 枚，翠雀属、



万寿菊属、紫菀属植物分别是 8、13、21 枚，雏菊属植物一般有 34、55、89 枚。向日葵的管状小花按顺时针和逆时针的两组螺线排列，其条数一般是 34 和 55，大向日葵是 89 和 144，或 144 和 233 条螺线，它们都是斐波那契数列中相邻的两项。蒲公英和松塔的种或鳞片也都具有如此规律。而且生活中音乐、电路、股票指数增长幅度、连分数、优选法、黄金分割等，都与斐波那契数列有关。我们还可以根据此数列画出斐波那契螺线，堪称世界最完美的经典黄金比例，能给予我们人类最舒适、最愉悦、最美丽的感受。例如，《蒙娜丽莎的微笑》就是一个佐证，整个画面呈现出一种无与伦比的旷世之美。

斐波那契数列中任意相邻的两个数相除，其倒数接近 0.618，如取极限值正好就是黄金比 0.618，它在视觉上给人极大的愉悦感和美感。世界上有很多令人瞩目的建筑，如西方建筑中古埃及的金字塔、古雅典的帕特农神庙、印度的泰姬陵、法国的埃菲尔铁塔等；还有著名的雕像如维纳斯女神像、太阳神阿波罗的塑像等，都蕴含着黄金比 0.618；舞蹈演员特别是芭蕾演员起舞时总是踮起脚尖，因为踮起脚尖才能展现 0.618 的美；达·芬奇、提香等著名艺术家的作品、著名乐章的高潮都离不开 0.618。

美学的数学化问题，目前还在探索中，但由下面的例子我们还可以得到一定的启发。当前国际上有世界小姐、环球小姐及国际小姐三大选美赛事，选美活动每年都要举行一次，可以说是历史悠久、家喻户晓。美国心理学家麦克·克尼根对此做了统计分析，给出美女的“量化”的标准，如下巴长度是脸长的  $1/5$ ，眼珠到眼眉的距离是脸长的  $1/10$  等，虽然选美标准因不同国家、地区、种族而异，仅凭一些数字是远远不够的，但它也从某个角度说明了数学在美学研究中所起的量化作用。

概率论是探究偶然性问题，平面几何是探究确定性问题，表面上看来它们是没有交集的两个数学分支，但数学家蒲丰 (1707—1788) 用事实说话，他在 1777 年用随机投针的方法求出了圆周率“ $\pi$ ”。这个试验打破了人们的传统观念，告诉我们即使是数学的两个完全不同的分支，它们之间也可能存在着内在联系，而且即使现在没有联系，并不代表它们将来没有联系，只是还没有发现而已，这个试验也向人们展现了数学的“统一美”。后来的数学家已经用几何概率的知识证明蒲丰的计算方法是正确的。圆周率可以用随机试验