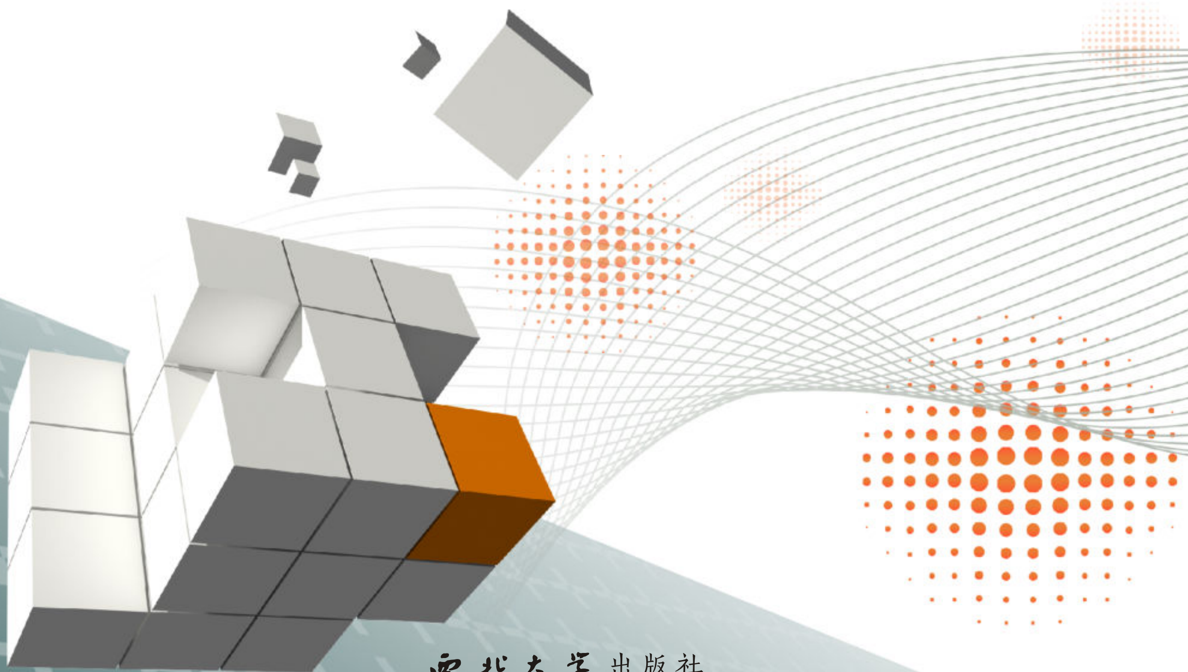
· 高水平高等职业院校规划教材

YINGYONG SHUXUE

应用数学

（基础模块）

◎ 张海妮　张喜荣　主编



西北大学出版社

高水平高等职业院校规划教材

应用数学

基础模块

主　编
张海妮　张喜荣

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学:基础模块/张海妮,张喜荣主编.—西安:
西北大学出版社,2019.9

高等职业教育系列规划教材·数学平台课

ISBN 978-7-5604-4388-1

Ⅰ.①应…　Ⅱ.①张…　②张…　Ⅲ.①应用数学—高
等职业教育—教材　Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 140247 号

应用数学(基础模块)

出版发行	西北大学出版社	**社　址**	西安市太白北路 229 号
电　话	029-88303313	**经　销**	新华书店经销
印　刷	陕西奇彩印务有限责任公司	**开　本**	787mm×1092mm　1/16
版　次	2019 年 9 月第 1 版	**印　次**	2019 年 9 月第 1 次印刷
字　数	232 千字	**印　张**	11.5
书　号	ISBN 978-7-5604-4388-1	**定　价**	28.00 元

本版图书如有印装质量问题,请拨打电话 029-88302966 予以调换。

前　言

为落实高职高专院校培养高素质技能型人才的需要，在总结全国高职高专院校数学课程教学改革经验的基础上，我们编写了适应高职高专院校各专业的《应用数学（基础模块）》教材。

在编写的过程中，我们充分考虑到目前高等职业教育的特点及对人才培养目标的要求，特别在以下方面做了一定的努力：

1. 在注意数学自身的系统性与逻辑性的基础上，对难度较大的基础理论不追求严格的论证，只作简单的几何说明。严格贯彻“轻理论、重应用”的教学原则。

2. 特别注意与实际应用联系，既重视对基础知识、基本方法和基本技能的训练，又强调对学生应用能力的培养，使学生能方便地用所学数学方法求解简单的数学模型。

3. 在内容安排上兼顾对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力、较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力的培养。

4. 每章前配有名人名言，每章后配有 MATLAB 软件应用、章节小结以及拓展知识，对调动学生学习的兴趣、提高学习效率和增强应用知识的能力很有帮助。

通过对本书的学习，学生能够培养运用数学思想、数学方法分析和解决问题的能力，满足后续专业课的学习需要，为将来的进一步发展做好准备。

本书由陕西交通职业技术学院张海妮、张喜荣担任主编。具体编写分工如下：第一、四章由张海妮编写，第二章由刘妍妮编写，第三章由刘颖编写，第五章由张喜荣编写。全书的策划由张海妮、张喜荣负责，全书的统稿由张海妮完成。

本书的编写和出版得到了陕西交通职业技术学院基础部领导和数学教研室全体同仁的支持和帮助。另外，在编写过程中还参考了许多文献资料和最新的教学研究成果。在此，一并表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限，时间也比较仓促，书中难免有不足之处，敬请读者指正。

编　者

2019 年 7 月

目 录

在数学的领域中，提出问题的艺术比解答问题的艺术更为重要.

——康托尔

一个国家只有数学蓬勃的发展，才能展现它国立的强大. 数学的发展和至善和国家繁荣昌盛密切相关.

——拿破仑

数学是除了语言与音乐之外，人类心灵自由创造力的主要表达方式之一，而且数学是经由理论的建构成为了解宇宙万物的媒介. 因此，数学必需保持为知识、技能与文化的主要构成要素，而知识与技能是得传授给下一代，文化则得传承给下一代的.

——Hermann Weyl

第一章 函 数

我们生活的世界时刻都在发生变化，变化无处不在，这些变化着的现象都可以用数学有效地描述它们的变化规律. 函数正是描述客观世界变化规律的重要数学模型，通过函数模型可以帮助我们解决许多实际问题. 因此，学习函数知识对研究客观世界，掌握事物变化规律具有重要的意义.

函数是用来刻画变量之间依存关系的数学模型，应用数学以函数为基本研究对象. 本章在初等数学的基础上，对函数、反函数、复合函数以及初等函数进行回顾、深入学习，目的是为了扎实打好基础，以便进行后面应用数学内容的学习与应用.

【学习目标】

1. 知识目标：理解函数的概念，理解函数的要素.

2. 能力目标：能发现生活中的数学，能用函数表示实际问题，掌握函数的基本性质.

3. 素质目标：培养学生发现问题、分析问题、解决问题的能力，培养学生的团队合作意识.

第一节 函数的概念

本节在复习初等数学中函数概念的基础上，进一步分析和理解函数概念的两个要素及四大特性，并介绍分段函数、反函数、复合函数及初等函数的概念.

一、引入新课

案例 1 新学期开始，宿舍同学相约一起购买热水瓶，若一个热水瓶 9 元一个，宿舍

一共 6 位同学，每人都买一个，需要多少钱？大家正要离开时，有同学打电话让帮忙带两个热水瓶，那么还需要付多少钱？

分析 6 个热水瓶，需要 54 元钱；8 个热水瓶，需要 72 元.

结论 热水瓶个数发生改变时，需要付的钱数随着发生改变.

案例 2 乘坐出租车外出办事，若起步价 3 公里之内 9 元，之后的乘车费以每公里 2.3 元计费，此人共乘车 5.2 公里，需付多少出租车费？如果乘车 6 公里呢？8.3 公里呢……

分析 乘车 5.2 公里，车费 14.06 元；乘车 6 公里，车费 15.9 元；乘车 8.3 公里，车费 21.19 元……

结论 乘车里程发生改变，车费就会发生改变.

案例 3 工程队修筑一条长 100 公里的公路，若修路进度每天能修筑 100 米，则需要多久才能修好该条公路？若每天修筑 120 米，需要多久？若每天修筑 150 米，需要多久？

分析 每天修筑 100 米，需要 1 000 天；每天修筑 120 米，需要 834 天；每天修筑 150 米，需要 667 天.

结论 每天进度发生改变时，完成修路需要的天数会随着发生改变.

案例 4 某影视明星巡演预在该市进行，为此需要搭建一个圆形舞台，舞台半径为 15 米时，面积多大？半径为 18 米时的面积呢？

分析 半径为 15 米，舞台面积大约 706.5 平方米；半径为 18 米，舞台面积大约 1 017.4 平方米.

结论 舞台半径发生改变时，舞台面积会随着发生改变.

注意 以上案例中均存在两组变量，而且当一组变量发生改变时，另一组变量会随之发生改变.

综合上述，就其所包含的具体含义而言，有经济的、工程的、几何的，抛开各自的具体含义，可抽象出函数的一般概念.

定义 1 设 D 是非空实数集合，x 和 y 是两个变量，若当变量 x 在 D 内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律 f，有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y = f(x), x \in D.$$

其中变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**因变量**，自变量的取值范围 D 称为**函数的定义域**.

对于确定的 $x_0 \in D$ 函数 $y = f(x)$ 与之对应的变量 y 的取值 y_0 称为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作

$$y_0 = y\,|_{x=x_0} = f(x_0).$$

函数值所得的集合，称为**函数的值域**，记作 M，即 $M = \{f(x) \mid x \in D\}$.

若函数在某区间上的每一点都有定义，则称这个函数在该区间上有定义.

【相关材料】17 世纪之前，函数的定义一直与公式紧密关联，到了 1837 年，德国数学家狄利克雷(Dirichlet，1805—1859) 抽象出了直至今日人们易于接受的函数定义.

二、函数要素

分析函数概念知，由自变量、因变量、定义域、对应法则四个因素可构成一个函数，当函数的自变量、因变量的符号改变时并不能改变一个函数，而当对应法则或者定义域发生改变时，函数不再相同. 因此，我们将函数的对应法则、定义域称为**函数的两个要素**.

（一）对应法则

例 1　设 $f(x)=\cos x^2$，求 $f(0)$，$f\left(\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)$.

解　f 确定的对应法则为

$$f(\ )=\cos(\ )^2.$$

所以

$$f(0)=\cos(0)^2=1.$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)=\cos\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)^2=\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

例 2　设 $f(x+1)=e^x$，则求 $f(\sqrt{x})$.

解　f 确定的对应法则为

$$f(\ )=e^{(\ )-1}.$$

所以

$$f(\sqrt{x})=e^{\sqrt{x}-1}.$$

例 3　设 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$，$g(x)=\sqrt{x}$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$f[f(x)]$，$g[g(x)]$.

解　$f[g(x)]=\dfrac{g(x)-1}{g(x)+3}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$；

$g[f(x)]=\sqrt{f}=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$；

$$f[f(x)]=\frac{f(x)-1}{f(x)+3}=\frac{\dfrac{x-1}{x+3}-1}{\dfrac{x-1}{x+3}+3}=-\frac{1}{x+2};$$

$g[g(x)]=\sqrt{g}=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$.

（二）定义域

一般地，函数的定义域就是函数有意义的自变量取值范围，例如，偶次根号函数，根号底数大于等于零；分式函数，分母不为零；对数函数，真数大于零；等等. 如果是描述实际问题的函数，则以实际问题能发生的自变量取值范围作为函数的定义域.

例 4　求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x-1)$ 的定义域.

解　使函数 y 有意义，必须满足：

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ x-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x>1\end{cases}.$$

解上面不等式组，这两个不等式的公共解为 $1<x\leqslant 2$，所以函数的定义域为 $(1,2]$.

例 5 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域.

解 使函数 y 有意义，必须满足：

$$\begin{cases}1-x\geqslant 0\\1-x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant 1\\x\neq 1\end{cases}.$$

解上面不等式组，这两个不等式的公共解为 $x<1$，所以函数的定义域为 $(-\infty,1)$.

如果两个函数的定义域与对应发起则分别相同，则将这两个函数视为相同的函数. 例如，$y=x$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 就是相同的函数，由此可见判断两个函数是否相同，只需要考查它们的定义域和对应法则是否一致就可以了.

例 6 函数 $f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是否相同，为什么？

解 $f(x)=x+1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $x\neq 1$ 即 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域不同，所以它们不相同.

例 7 设函数 $f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$，判断 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一个函数吗？为什么？

解 $f(x)=|x|$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$g(x)=\sqrt{x^2}$ 的定义域也为 $(-\infty,+\infty)$ 且 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域与对应法则都是相同的，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同一个函数.

三、函数的表示法

通常表示函数的方法有三种：**解析法**、**列表法**以及**图形法**.

函数的三种表示方法各有优缺点：

(1) 解析法的优点是简明、全面地揭示了变量之间的关系，不但可以通过函数的解析式求出自变量对应的函数值，而且还可以利用解析式研究函数的性质；缺点是抽象.

(2) 列表法的优点是便于查找函数值；缺点是能查到的函数值有限.

(3) 图形法的优点是形象、直观、容易记忆，能直接形象地表示出函数的变化情况；缺点是粗略，利用函数图形由自变量计算函数值不够准确.

四、分段函数

例如，绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}-x, & x\geqslant 0\\ x, & x<0\end{cases}$，再如符号函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$.

容易看出，上述函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，但它们在**自变量的不同取值范围内**

是用不同解析式来表示的，这样的函数称为**分段函数**. 分段函数是定义域上的一个函数，不是多个.

例 8 设函数 $f(x)=\begin{cases} 3, & 0\leqslant x<5 \\ -x+2, & x\geqslant 5 \end{cases}$，求函数 $f(x)$ 的定义域，$f(2)$，$f(7)$.

解 因为当 $0\leqslant x<5$ 时，$f(x)$ 成立，或者 $x\geqslant 5$ 时，$f(x)$ 也成立，所以，$f(x)$ 的定义域为 $0\leqslant x<5\cup x\geqslant 5$，即定义域 D：$\{x\mid 0\leqslant x\}$.

同时可得，$f(2)=3$；$f(7)=-7+2=-5$.

五、函数的几种特性

(一) 有界性

定义 2 设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若存在正数 M，使得对任意 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ **在区间 I 上有界**. 此时，也称 $f(x)$ **为区间 I 上的有界函数**.

例 9 判断函数 $y=\sin x$ 是否有界？

解 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\exists 2$，s. t.

$$|\sin x|\leqslant 2.$$

则函数 $y=\sin x$ 有界.

例 10 判断函数 $y=x^3$ 是否有界？

解 因为对于任意给定的正数，均可取某一 xM 的值，使得 $x^3>M$，因此，函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

(二) 单调性

定义 3 若对于区间 I 上任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加，区间 I 称为函数 $f(x)$ 的**单调递增区间**. 此时，也称 $f(x)$ 为区间 I 上的**单调递增函数**(图 1－1)；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调减小，区间 I 称为函数 $f(x)$ 的**单调递减区间**. 此时，也称 $f(x)$ 为区间 I 上的**单调递减函数**(图 1－2).

单调递增区间和单调递减区间统称为**单调区间**；单调递增函数和单调递减函数统称为**单调函数**.

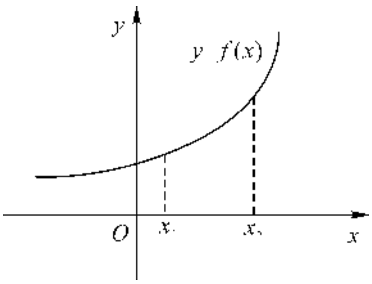


图 1－1

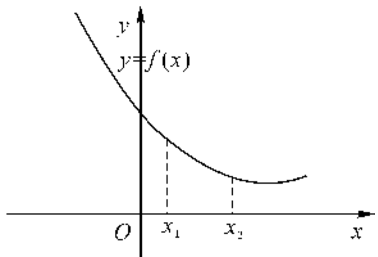


图 1－2

例 11 判断函数 $y=x^2$ 的单调性.

解 $\forall\ x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,当$x_1<x_2$ 时,

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1{}^2-x_2{}^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2).$$

考察,因为$x_1<x_2$ 即$x_1-x_2<0$,所以 $f(x_1)-f(x_2)$的符号与x_1+x_2 的符号有关,而当$x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 时,x_1+x_2 可正可负可为零,所以函数 $y=x^2$ 没有单调性.

如果$x_1,x_2\in(-\infty,0)$ 时,$(x_1+x_2)<0$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0,$$

即 $f(x_1)>f(x_2)$,此时,函数 $y=x^2$ 单调减少;

如果$x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 时,$(x_1+x_2)>0$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)(x_1+x_2)<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$,此时,函数 $y=x^2$ 单调增加.

(三)奇偶性

定义 4 设函数 $f(x)$的定义域D关于原点对称,若对于任意 $x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为**偶函数**;若 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为**奇函数**.

有函数奇偶性的定义,易知偶函数的图形关于 y 轴对称;奇函数的图形关于原点对称.

如 $y=x^2$,$y=\cos x$ 等图形都关于y 轴对称(示意图 1—3),所以都是偶函数;$y=x^3$,$y=\sin x$ 等图形都关于原点对称(示意图 1—4),所以都是奇函数.

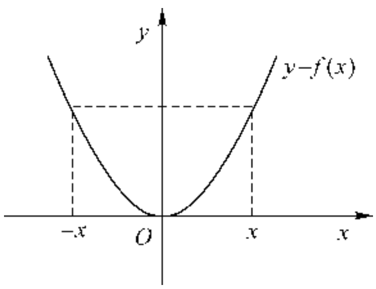


图 1—3

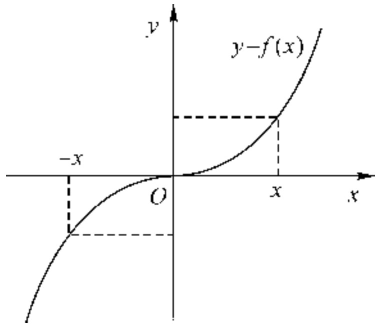


图 1—4

(四)周期性

定义 5 若存在不为零的数 T,使得对于任意 $x\in I$(I 为 $f(x)$的定义域),都有 $x+T\in I$ 及 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$为**周期函数**.

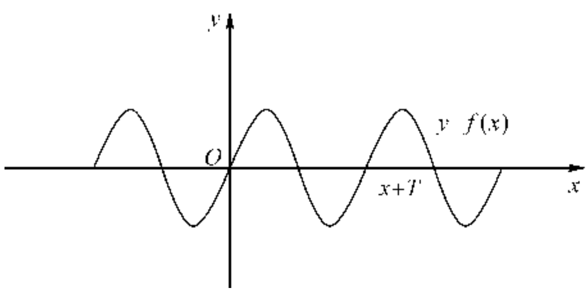


图 1—5

如 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 都是周期函数,其最小正周期为 2π;$y=\tan x$,$y=\cot x$ 也是周期函数,其最小正周期为 π. 周期函数的图形具有"重现性",即周期函数在

每个周期内的图形都相同(图 1－5).

【思考题】

1. 确定一个函数需要哪几个因素?

2. 函数的表达形式有哪几种,最适合研究的函数表达形式是哪种?

3. 有界函数的界唯一吗?

4. 函数 $y=\sqrt{x}$ 有奇偶性吗?为什么?

5. 周期函数的周期唯一吗?最小正周期呢?

习题一

1. 设自变量 $x\in\{1,2,3,4\}$,判断下列数学结构是否为函数?若是,其定义域、对应法则、值域分别是什么?

$$(1)f:\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 1&3&5&7\end{array};\quad (2)f:\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&0&4&1\end{array};\quad (3)f:\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&3&3&3\end{array}.$$

2. 市内公用电话通话时间3分钟内收费0.3元,超过3分钟,每分钟加收0.1元,试列出电话费与通话时间之间的函数关系,并画出其图形.

3. 指出下列函数是否是相同的函数:

(1)$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$;　(2)$y=\ln\sqrt{x}$ 与 $y=\dfrac{1}{2}\ln x$;　(3)$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$.

4. 判断下列函数的奇偶性:

(1)$y=10^x$;　(2)$y=x\sin x$;

(3)$y=\dfrac{x}{1+a^x}$;　(4)$y=e^x+e^{-x}$.

第二节　初等函数

一、引入新课

引例1　已知某商品的销售单价为 p 元,则对每一个给定的销售量 x,可通过 $y=px$ 确定销售总收益 y,即总收益是销售量的函数.反过来,对每一给定的销售总收益 y,可通过规则 $x=\dfrac{y}{p}$ 确定销售量 x,即销售量是销售总收益的函数.后一函数 $x=\dfrac{y}{p}$ 称为前一函数 $y=px$ 的反函数.

二、反函数的概念

定义1　设给定 y 是 x 的函数 $y=f(x)$,如果把 y 当作自变量,x 当作因变量,则由

关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.

习惯上总是用 x 表示自变量,用 y 表示因变量(函数),因此,往往把函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$,称为 $y=f(x)$ 的**矫形反函数**,记作

$$y=f^{-1}(x).$$

若将函数 $y=f(x)$ 与其矫形反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一直角坐标系中,则两图形关于直线 $y=x$ 对称.

注意 函数存在反函数需要满足两变量之间一一对应,即函数满足单调性.

例 1 求函数 $y=\sin x$ 的反函数.

解 因为 $y=\sin x$ 要求反函数需要满足单调性,所以取单调区间 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,值域 $y\in[-1,1]$,且

$$\arcsin y=\arcsin(\sin x)\Rightarrow x=\arcsin y.$$

易知函数 $x=\arcsin y$ 的定义域 $y\in[-1,1]$,值域 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,习惯表达式(即反函数的矫形函数)为 $y=\arcsin x$,定义域 $x\in[-1,1]$,值域 $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

例 2 求函数 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}(x\neq 1)$ 的反函数.

解 因为函数 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ 的定义域为 $x\neq 1$,值域为 $y\neq 2$.

由 $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$,解得 $x=\dfrac{y+3}{y-2}\ (y\neq 2)$.

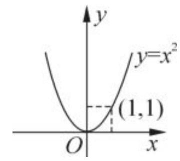
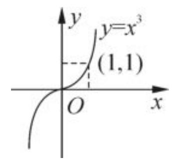
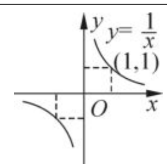
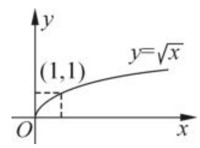
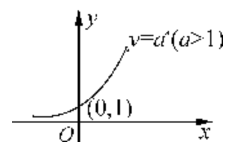
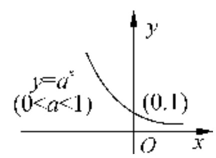
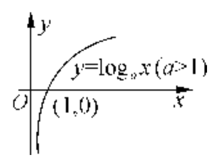
三、基本初等函数

定义 2 如下六类函数统称为基本初等函数:

1. 常函数 $y=c$(c 为常数);
2. 幂函数 $y=x^n$(n 为实数);
3. 指数函数 $y=a^x$($a>0,a\neq 1,a$ 为常数);
4. 对数函数 $y=\log_a x$($a>0,a\neq 1,a$ 为常数);
5. 三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$;
6. 反三角函数 $y=\mathrm{acrsin}x,y=\mathrm{acrcos}x,y=\mathrm{acrtan}x,y=\mathrm{acrcot}x$.

以上六种基本初等函数的性质、图形在中学阶段已经学过,但由于在后面的学习中,经常要涉及到基本初等函数,因而编者建议读者对基本初等函数的定义、性质、图形列表复习一下,下面给出基本初等函数表(表 2-1).

表 2－1 基本初等函数表

函数		定义域	值域	简单性质	图形
幂函数 $y=x^{\alpha}$	$y=x^2$	**R**	$y\geqslant 0$	偶函数 $x>0$,递增 $x<0$,递减	
	$y=x^3$	**R**	**R**	奇函数 单调递增	
	$y=\dfrac{1}{x}$	$x\neq 0$	$y\neq 0$	奇函数 在区间 $(-\infty,0)$ 和$(0,+\infty)$ 分别单调递减	
	$y=\sqrt{x}$	$x\geqslant 0$	$y\geqslant 0$	非奇非偶 单调递增	
指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$	$a>1$	**R**	$\mathbf{R}^+$	单调递增 过$(0,1)$	
	$0<a<1$	**R**	$\mathbf{R}^+$	单调递减 过$(0,1)$	
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$	$a>1$	$\mathbf{R}^+$	**R**	单调递增 过$(1,0)$	
	$0<a<1$	$\mathbf{R}^+$	**R**	单调递减 过$(1,0)$