

JIAOCAIJIEDU

教材 解读

源于教材 高于教材

数学

八年级上册 湘教版

8

《教材解读》编写组 编

CTS

湖南教育出版社

湖南教育出版社

JIAOCAIJIEDU

教材 解读

源于教材 高于教材

数学 八年级上册 湘教版

《教材解读》编写组 编

CS 湖南教育出版社
HUNAN EDUCATION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目 (C I P) 数据

教材解读. 数学八年级. 上册 : 湘教版 / 《教材解读》
编写组编. — 长沙 : 湖南教育出版社, 2015. 8

ISBN 978-7-5539-2786-2

I. ①教… II. ①教… III. ①中学数学课—初中—教
学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 201669 号

JIAOCAI JIEDU

教材解读

数学 八年级上册

(湘教版)

《教材解读》编写组 编

责任编辑: 邹伟华

出版发行: 湖南教育出版社出版发行 (长沙市韶山北路 443 号)

网 址: <http://www.hnepi.com>

电子邮箱: hnjycbs@sina.com 微信号: 多点学习

客 服: 电话 0731-85486979

总 经 销: 湖南省新华书店经销

印刷装订: 益阳市顺鑫印务有限公司印制

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 9

字 数: 180 千字

版 次: 2015 年 8 月第 1 版 2016 年 8 月第 2 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5539-2786-2

定 价: 18.80 元

(本书若有印刷、装订错误, 可向承印厂调换)

《教材解读》是一套与现行小学、初中最新教材同步的助学助教类系列丛书。本丛书以“全、细、新、实”为宗旨，内容覆盖教材上所有知识点，对重点、难点、考点详尽解读，兼具知识性与趣味性、典型性与拓展性。

《教材解读》系列丛书集合了众多名牌中小学特级教师和资深教研员的优秀成果，为学生打造出一个自主互动的学习平台。本丛书是学生夯实基础知识、掌握方法技巧的重要辅导资料，也是老师把握教材知识的优秀参考资料；是学生学习和考试的良师，是老师备课和教学的益友。本丛书具有以下几个鲜明特点：

1. 内容全

对教材知识全方位、立体化归纳总结。真正做到了“一册在手，学习内容全都有”，不仅整合了教材上明确列出的必学内容，而且提炼了和实际运用息息相关的隐含知识，注意了课内与课外、课本与生活的联系，触类旁通，形成知识点的全面覆盖。

2. 讲解细

对教材细致入微地讲解。对重点、难点、易错易混点、拓展延伸点等都进行了详细分析。全面讲解了教材中的每一个知识点，由表及里，由易到难，真正做到了教材讲解周密细致，重难点梳理精准易懂，易错易混点剖析透彻，拓展延伸点深入浅出。

3. 题目新

以新课标为导向，以新考纲为依据，结合最新教材来设置题目，讲练结合，以巩固所学知识。所设题目均为近年来考试中的最新题型，以及生活中出现的最新问题，做到紧扣考题趋势，紧贴能力要求，紧跟时代特点，巩固练习、讲练结合。

4. 体例实

结合教学要求和课程进度安排设计体例，包含了课堂、课后等环节，对学生学习的全过程进行了指导，科学实用，既有利于学生随堂学习，又有利于学生课后自主学习。

全解精练、自主互动、整合突破、拓展创新是《教材解读》撰写的四大理念，它充分体现了新课标生本位的自主学习、学用结合、知能结合、发散思维、培养创新能力的目标要求，充分体现了学习的科学程序和认知规律。在这个基础上，《教材解读》已经形成了一整套切实有效的创新学习方法，能够真正帮助学生解疑答惑，提高学习成绩。



本书必背概念、性质、公式及定理

知识点	内容	举例	名师点拨
1. 分式的定义及其基本性质	<p>定义：一个整式f除以一个非零整式g，所得的商记作$\frac{f}{g}$，其中f是分式的分子，g是分式的分母，$g \neq 0$。</p> <p>基本性质：$\frac{f}{g} = \frac{f \cdot h}{g \cdot h}$ ($h \neq 0$)</p>	$\frac{a}{x}$ ， $\frac{s}{t}$ ， $\frac{a+b}{x+y}$ 等都是分式	<p>分式的基本性质从左到右看表明：分式的分子与分母都同乘一个非零整式，所得分式与原式相等</p> <p>分式的基本性质从右到左看表明：分式的分子与分母都除以它们的一个公因式，所得分式与原分式相等</p>
2. 分式的乘法、除法和乘方	<p>分式的乘法：$\frac{f}{g} \cdot \frac{u}{v} = \frac{fu}{gv}$</p> <p>分式的除法：$\frac{f}{g} \div \frac{u}{v} = \frac{f}{g} \cdot \frac{v}{u} = \frac{fv}{gu}$ ($u \neq 0$)</p> <p>分式的乘方：$\left(\frac{f}{g}\right)^n = \frac{f^n}{g^n}$ (n为正整数)</p>	$\frac{x^2}{y} \cdot \frac{y}{x} = \frac{x^2 \cdot y}{y \cdot x} = x$; $\frac{x^2}{x+1} \div \frac{2x}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{2x} = \frac{x}{2}$	<p>(1) 分式的除法运算可转化为分式的乘法运算</p> <p>(2) 分式的乘方运算时，一定要把分子、分母分别乘方. 当分子、分母是多项式时，应把分子、分母看成一个整体</p>
3. 整数指数幂	<p>同底数幂的除法：$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ($a \neq 0$, m, n都是整数)</p> <p>零次幂：$a^0 = 1$ ($a \neq 0$)</p> <p>负整数指数幂：$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ ($a \neq 0$, n都是正整数). 特别地，$a^{-1} = \frac{1}{a}$ ($a \neq 0$)</p>	$(xy)^5 \div xy = (xy)^4 = x^4 y^4$; $x^3 \div x^5 = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$	<p>零不能作除数，所以$a \neq 0$是$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$成立的前提条件</p>
4. 分式的加法和减法	<p>同分母分式相加减：$\frac{f}{g} \pm \frac{h}{g} = \frac{f \pm h}{g}$</p> <p>异分母分式相加减：$\frac{f}{g} \pm \frac{k}{h} = \frac{fh}{gh} \pm \frac{gk}{gh} = \frac{fh \pm gk}{gh}$</p>	$\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x-y} = \frac{x-y}{x-y} = 1$; $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad-bc}{cd}$	<p>分式相加减，当分式分子是多项式时，特别是分子相减时，要把分子用括号括起来，否则容易导致符号上的错误</p>
5. 三角形	<p>不在同一直线上的三条线段首尾相接所构成的图形叫三角形. “三角形”可用符号“\triangle”来表示</p>	<p>三角形ABC记作“$\triangle ABC$”，读作“三角形ABC”，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$叫作$\triangle ABC$的角</p>	<p>三角形只能用表示顶点的三个大写字母来表示</p>

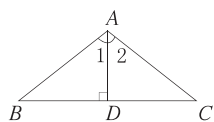
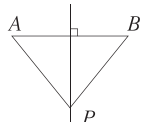


本书必背概念、性质、公式及定理

知识点	内容	举例	名师点拨
6. 三角形三边的关系	三角形的任意两边之和大于第三边	$\triangle ABC$ 的三个顶点 A, B, C 的对边 BC, AC, AB 分别记为 a, b, c , 则有 $\begin{cases} a+b>c, \\ a+c>b, \\ b+c>a \end{cases}$	三角形的两边是指任意两边, 只有任意两边都满足三边关系时才能组成三角形
7. 三角形的高	从三角形的一个顶点向它对边所在的直线作垂线, 顶点和垂足之间的线段叫作三角形的高线, 简称三角形的高	 如图, $AD \perp BC$, 垂足为点 D , 则线段 AD 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高	三角形的高常和面积联系在一起, 涉及高的问题, 常用面积来求解
8. 三角形的角平分线	在三角形中, 一个角的平分线与这个角的对边相交, 这个角的顶点与交点之间的线段叫作三角形的角平分线	 如图, $\angle BAD = \angle CAD$, 则 AD 是 $\triangle ABC$ 的一条角平分线	三角形的角平分线是一条线段, 而角的平分线是一条射线
9. 三角形的中线	在三角形中, 连接一个顶点和它对边中点的线段叫三角形的中线	 如图, $BD = DC$, 线段 AD 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线	三角形的中线把三角形分成两个等底同高即面积相等的三角形
10. 三角形内角和定理及其推论	三角形内角和定理: 三角形的内角和等于 180° 推论: 三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和	 如图, $\angle 1 = \angle A + \angle B$	可利用这个性质说明三个角之间的关系或两个角的大小关系
11. 命题	一般地, 对某一件事情做出正确或不正确的判断的语句(陈述句)叫作命题. 把正确的命题称为真命题, 把错误的命题称为假命题	语句“两点之间, 线段最短”是命题, 且是真命题	要判断一个命题是假命题, 只须举出一个反例即可, 而要判断一个命题是真命题, 则需要严格的推理论证
12. 逆命题	对于两个命题, 如果一个命题的条件和结论是另一个命题的结论和条件, 我们把这样两个命题称为互逆命题, 其中一个叫作原命题, 另一个叫作逆命题	命题“两直线平行, 同旁内角互补”的逆命题是“同旁内角互补, 两直线平行”	只要将一个命题条件和结论互换, 就可得到它的逆命题, 所以每个命题都有逆命题



本书必背概念、性质、公式及定理

知识点	内容	举例	名师点拨
13. 等腰三角形的性质及判定	<p>(1) 等腰三角形是轴对称图形，对称轴是顶角平分线所在的直线</p> <p>(2) 等腰三角形底边上的高、中线及角平分线重合（简称“三线合一”）</p> <p>(3) 等腰三角形的两底角相等（简称“等边对等角”）</p> <p>(4) 判定：有两个角相等的三角形是等腰三角形</p>	 <p>等腰三角形ABC中，如果$AB = AC$，则$\angle B = \angle C$；若$\angle 1 = \angle 2$，则$BD = CD$，$AD \perp BC$；在$\triangle ABC$中，若$\angle B = \angle C$，则$\triangle ABC$为等腰三角形</p>	<p>(1) 等腰三角形两腰上的中线、高分别相等</p> <p>(2) 在等腰三角形中，作底边上的中线或底边上的高是一种常见的辅助线作法</p> <p>(3) 等腰三角形的性质“等边对等角”与等腰三角形的判定“等角对等边”为互逆定理</p> <p>(4) 在同一个三角形中，欲证边相等，先证角相等；欲证角相等，先证边相等</p>
14. 等边三角形的性质及判定	<p>(1) 等边三角形的三个内角相等，且都等于60°</p> <p>(2) 判定定理1：三个角都是60°的三角形是等边三角形</p> <p>(3) 判定定理2：有一角是60°的等腰三角形是等边三角形</p>	<p>若$\triangle ABC$是等边三角形，则$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$；</p> <p>在$\triangle ABC$中，$\angle A = 60^\circ$，$AB = AC$，则$\triangle ABC$为等边三角形</p>	<p>(1) 等边三角形是轴对称图形，它有三条对称轴，分别是三个内角的平分线所在的直线</p> <p>(2) 若已知三角形为一般三角形，可根据定义证明三边相等，也可证明三个角相等</p> <p>(3) 若已知的三角形为等腰三角形，则只要证明一个角为60°即可</p>
15. 线段的垂直平分线及其性质定理和性质定理的逆定理	<p>定义：把垂直且平分一条线段的直线叫作线段的垂直平分线</p> <p>性质定理：线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等</p> <p>性质定理的逆定理：到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上</p>	 <p>如图，点P是线段AB的垂直平分线上一点，则$PA = PB$</p>	<p>(1) 线段的垂直平分线必须同时满足两个条件：一是垂直于这条线段，二是平分这条线段</p> <p>(2) 线段是轴对称图形，线段的垂直平分线是它的对称轴</p>
16. 全等三角形及其性质	<p>定义：能完全重合的两个三角形叫作全等三角形</p> <p>性质：全等三角形的对应边相等，对应角相等</p>	<p>若$\triangle ABC$与$\triangle DEF$完全重合，则$\triangle ABC$与$\triangle DEF$全等，常使用的判定方法有SAS, ASA, AAS, SSS</p>	<p>图形经过平移、翻折、旋转变换后，得到的三角形与原三角形全等</p>



本书必背概念、性质、公式及定理

知识点	内容	举例	名师点拨
17. 平方根	如果一个数 r ，使得 $r^2=a$ ，我们把 r 叫作 a 的一个平方根	由于 $(\pm\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}$ ，则 $\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$ 是 $\frac{1}{9}$ 的平方根	正数的平方根有两个，它们是相反数；0的平方根是0；负数没有平方根
18. 算术平方根	把正数 a 的正平方根叫作 a 的算术平方根，记作 \sqrt{a} ，读作“根号 a ”	$\sqrt{9}$ 的算术平方根是3	算术平方根是一个非负数，因此正数的算术平方根只有一个，且为正数；0的算术平方根是0；负数没有算术平方根
19. 无理数	无限不循环小数叫作无理数	$\sqrt{2}$ 、0.23457...、 $1+\pi$ 等都是无理数	常见的无理数有开方开不尽的数， π 及化简后含 π 的数
20. 立方根	如果一个数 b ，使得 $b^3=a$ ，那么我们把 b 叫作 a 的立方根，也叫作三次方根， a 的立方根记作 $\sqrt[3]{a}$ ，读作“立方根号 a ”或“三次根号 a ”	0.001的立方根是0.1	正数有一个正的立方根，负数有一个负的立方根，0的立方根是0
21. 不等式及其基本性质	定义：把用不等号（ $>$ ， $<$ ， \geq ， \neq ， \leq ）连接而成的式子叫作不等式 基本性质：（1）不等式的两边都加上（或减去）同一个数（或式），不等号的方向不变；（2）不等式的两边都乘（或除）同一个正数，不等号的方向不变；（3）不等式的两边都乘（或除）同一个负数，不等号的方向改变	$x > 5$ ， $x < 5$ ， $x \geq 5$ ， $x \leq 5$ ， $x \neq 5$ 等都是不等式	（1）判断一个式子是不是不等式，关键是看它是否含有不等号中的一种，若有，则是不等式，否则不是 （2）应用不等式的的基本性质时，要注意“两边”是指不等号，还要注意“同一个”的要求
22. 二次根式	把形如 \sqrt{a} 的式子叫作二次根式，根号下面的数叫作被开方数	$\sqrt{a-1}$ 、 $\sqrt{\pi}$ 等都是二次根式	在实数范围内，负实数没有平方根
23. 二次根式的三个性质	（1） $\sqrt{a} \geq 0$ （ $a \geq 0$ ） （2） $(\sqrt{a})^2 = a$ （ $a \geq 0$ ） （3） $\sqrt{a^2} = a $	（1） $\sqrt{6} \geq 0$ （2） $(\sqrt{3})^2 = 3$ （3） $\sqrt{(-3)^2} = 3$	在具体问题中，若已知 \sqrt{a} ，则 $a \geq 0$



▼ 第1章 分式

1.1 分式	/1
1.2 分式的乘法和除法	/7
1.3 整数指数幂	/12
1.4 分式的加法和减法	/18
1.5 可化为一元一次方程的分式方程	/24
第1章复习	/30
第1章检测	/31

▼ 第2章 三角形

2.1 三角形	/33
2.2 命题与证明	/40
2.3 等腰三角形	/47
2.4 线段的垂直平分线	/53
2.5 全等三角形	/58
2.6 用尺规作三角形	/66
第2章复习	/71
第2章检测	/72

▼ 第3章 实数

3.1 平方根	/74
---------	-----

3.2 立方根	/79
3.3 实数	/83
第3章复习	/89
第3章检测	/90

▼ 第4章 一元一次不等式(组)

4.1 不等式	/92
4.2 不等式的基本性质	/95
4.3 一元一次不等式的解法	/98
4.4 一元一次不等式的应用	/103
4.5 一元一次不等式组	/106
第4章复习	/110
第4章检测	/111

▼ 第5章 二次根式

5.1 二次根式	/113
5.2 二次根式的乘法和除法	/118
5.3 二次根式的加法和减法	/123
第5章复习	/128
第5章检测	/129

期中检测	/131
期末检测	/133

第1章 分式



通常购买同一品种的西瓜时,西瓜的质量越大,花费的钱越多.因此人们希望西瓜瓤占整个西瓜的比例越大越好.假如我们把西瓜都看成球形,并把西瓜瓤的密度看成是均匀的,西瓜皮的厚度都是 d ,已知球的体积公式为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (其中 R 为球的半径),那么西瓜瓤与整个西瓜的体积比是多少?买大西瓜合算还是买小西瓜合算?



参考答案 设瓜的半径为 R ,西瓜瓤的半径为 r ,则西瓜瓤与整个西瓜的体积比为:

$$\frac{V_{\text{瓤}}}{V_{\text{瓜}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{R^3}, \because R - d = r, \therefore \frac{V_{\text{瓤}}}{V_{\text{瓜}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{R^3} = \left(\frac{R-d}{R}\right)^3 = \left(1 - \frac{d}{R}\right)^3;$$
 故此买大西瓜合算,因为 R 越大,代数式 $\left(1 - \frac{d}{R}\right)^3$ 值越大.

1.1 分式

知识详解

知识点 1

分式

一个整数 m 除以一个非零整数 n ,所得的商记作 $\frac{m}{n}$,称 $\frac{m}{n}$ 为分数.类似地,一个整式 f 除以一个非零整式 g (g 中含有字母),所得的商记作 $\frac{f}{g}$,把代数式 $\frac{f}{g}$ 叫作分式,其中 f 是分式的分子, g 是分式的分母, $g \neq 0$.

【解读】分式的基本形式与分数的基本形式是有区别的:分式是一个式子,不是一个具体的数,因此分式的基本形式不是研究分式的值变或不变,研究的是什么样的两个分式是相等的.

正确理解分式的概念应注意以下几点:

- (1)分式是两个整式相除的商式;
- (2)分母中一定要含有字母,分子可以含有字母,也可以不含;
- (3)分母不能为0,否则分式无意义.

要点提示

分母为零无意义,分子为零值为零.

例 1 下列代数式中, 哪些是分式? 哪些是整式?

$$\frac{1}{x}, \frac{x}{\pi}, \frac{2x+y}{x-y}, -5, \frac{a-b}{2}, 4a.$$

分析

代数式	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\pi}$	$\frac{2x+y}{x-y}$	-5	$\frac{a-b}{2}$	4a
分子	1	x	2x+y	-5	a-b	4a
分母	x	π	x-y	1	2	1
是否是分式	是	否	是	否	否	否

解: 分式有 $\frac{1}{x}, \frac{2x+y}{x-y}$; 整式有 $\frac{x}{\pi}, -5, \frac{a-b}{2}, 4a$.

知识点 2

分式的基本性质

与分数类似, 分式有以下基本性质:

分式的分子与分母都乘同一个非零整式, 所得分式与原分式相等. 即对于分式 $\frac{f}{g}$, 有 $\frac{f}{g} = \frac{f \cdot h}{g \cdot h} (h \neq 0)$. ①

【解读】(1) 公式①从左到右看表明: 分式的分子与分母都乘同一个非零整式, 所得分式与原分式相等.

(2) 公式①从右到左看表明: 分式的分子与分母都除以它们的一个公因式, 所得的分式与原分式相等.

例 2 根据分式的基本性质填空:

$$(1) \frac{xy}{a} = \frac{(\quad)}{aby}; \quad (2) \frac{6x(y+z)}{3(y+z)^2} = \frac{(\quad)}{y+z}.$$

【分析】(1) 由题意知分母从左到右乘 by , 且 by 处在分母中, 故 $by \neq 0$, 所以分子也应乘 by .

(2) 已知分母从左到右除以 $3(y+z)$, 而从左边分母 $3(y+z)^2$ 知 $3(y+z) \neq 0$, 所以分子也应除以 $3(y+z)$.

解: (1) bxy^2 (2) $2x$

知识点 3

分式有无意义的条件

(1) 分式有意义的条件: 分母不等于零.

(2) 分式无意义的条件: 分母等于零.

【解读】分式有无意义与分母有关, 与分子无关. 分式中分母

即学即练

1. 在式子 $\frac{x}{3x+1}, -\frac{x^2+1}{2}$,

$\frac{x}{3} - y^2, \frac{3a-b}{a+2}, \frac{x^2-1}{x-1}, \frac{a}{\pi}$

中, 分式的个数是 ()

A. 1 B. 2

C. 3 D. 4

即学即练

2. 填写下列等式中未知的分子或分母.

$$(1) \frac{x+y}{x-y} = \frac{(\quad)}{x^2-y^2};$$

$$(2) \frac{b-a}{a} = \frac{(\quad)}{ab}.$$

($b \neq 0$)

是含未知数的式子,它的值随未知数取值的不同而变化,当未知数的取值使分母等于0时,分式就无意义.要明确分式是否有意义,就必须分析、讨论未知数中所含未知数不能取哪些值,以避免分母的值为0.同时,要使分式值为0的条件是分子等于零,分母不等于零,两者缺一不可.

例3 当 x 取什么值时,下列分式有意义?当 x 取什么值时,分式的值为0?

$$(1) \frac{2x+5}{x-3}; (2) \frac{x-2}{x^2+1}; (3) \frac{x^2-6}{2|x|-3}.$$

分析 要使分式有意义,只需要分母不为零;要使分式的值为零,则需要分子等于零且分母不等于零.

解: (1) $x-3 \neq 0$, 即 $x \neq 3$ 时, 分式 $\frac{2x+5}{x-3}$ 有意义; 当 $2x+5=0$, 且 $x-3 \neq 0$, 即 $x=-\frac{5}{2}$ 时, 分式的值为0.

(2) 无论 x 取什么值, $x^2+1 > 0$, 所以 x 取任何实数时, $\frac{x-2}{x^2+1}$ 都有意义; 当 $x-2=0$, 即 $x=2$ 时, 分式 $\frac{x-2}{x^2+1}$ 的值为0.

(3) 当 $2|x|-3 \neq 0$, 即 $x \neq \pm \frac{3}{2}$ 时, 分式 $\frac{x^2-6}{2|x|-3}$ 有意义; 当 $x^2-6=0$, 即 $x = \pm\sqrt{6}$ 时, 分式的值为0.

知识点 4

分式的约分

和分数一样, 根据分式的基本性质, 把一个分式的分子与分母的公因式约去(即分子分母都除以它们的公因式), 叫作分式的约分. 即 $\frac{A \cdot B}{B \cdot C} = \frac{A}{C}$. 经过约分后的分式, 其分子与分母没有公因式, 这样的结果称为最简分式.

【解读】 约分的关键是确定分子和分母中的公因式, 有以下两种方法: (1) 当分子、分母都是单项式时, 先找分子、分母系数的最大公约数, 再找相同未知数的最低次幂, 它们的积就是公因式; (2) 当分子和分母中含有多项式, 且多项式能够分解因式时, 应先把该多项式分解因式.

例4 化简下列各式:

$$(1) \frac{6xy}{30y^2}; \quad (2) \frac{x-y}{x^2-y^2}; \quad (3) \frac{9-x^2}{x^2-6x+9}.$$

即学即练

3. 当 x 取什么值时, 下列分式有意义?

$$(1) \frac{x+1}{2x};$$

$$(2) \frac{2x+3}{3x-5};$$

$$(3) \frac{2}{|x|-1};$$

$$(4) \frac{x+2}{x^2+2}.$$

要点提示

找公因式时常会用到完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, 平方差公式 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

分析 (1) 分子、分母都是单项式, 取 6、30 的最大公约数 6, 相同未知数的最低次幂为 y , 则 $6y$ 是公因式; (2) 分子、分母都是多项式, 分母分解因式为 $(x-y)(x+y)$, 则 $x-y$ 是公因式; (3) 分子、分母都是多项式, 分子分解因式为 $(3-x)(3+x)$, 分母分解因式为 $(x-3)^2$, $3-x$ 与 $x-3$ 互为相反数, 提出一个负号即化为相同因式, 结果中将负号放在分式本身的前面.

$$\text{解: (1) } \frac{6xy}{30y^2} = \frac{6y \cdot x}{6y \cdot 5y} = \frac{x}{5y};$$

$$(2) \frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{(x+y)(x-y)} = \frac{1}{x+y};$$

$$(3) \frac{9-x^2}{x^2-6x+9} = \frac{(3-x)(3+x)}{(x-3)^2} = \frac{-(x-3)(3+x)}{(x-3)^2} = -\frac{3+x}{x-3}.$$



拓展提升

类型一：利用整体思想确定分式的值

例 5 已知 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$, 求 $\frac{2x+5xy-2y}{x-2xy-y}$ 的值.

分析 从已知条件中不能求出 x, y 的值, 所求的代数式不能化简, 因此解决此题要寻求已知条件与所求代数式之间的关系, 通过观察、分析可知, 若将所求代数式分子、分母同时除以 xy , 就会得到与已知有关的式子, 从而本题可解.

$$\text{解: 原式} = \frac{(2x+5xy-2y) \div xy}{(x-2xy-y) \div xy} = \frac{-2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) + 5}{-\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) - 2},$$

$$\text{因为 } \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2, \text{ 所以原式} = \frac{-2 \times 2 + 5}{-2 - 2} = -\frac{1}{4}.$$

类型二：用换元思想求分式的值

例 6 已知 $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$ ($xyz \neq 0$), 求 $\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ 的值.

分析 根据已知条件和待求分式的特点, 设未知数(换元)解题, 在解决连等、连比形式的问题, 一般采用设未知数(换元)的方法.

$$\text{解: 设 } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} = k (k \neq 0), \text{ 则 } x = 3k, y = 4k, z = 6k.$$

即学即练

4. 约分:

$$(1) \frac{-20a^3b^2}{15ab^3};$$

$$(2) \frac{a^2+2a+1}{a^2-1};$$

$$(3) \frac{a^2-b^2}{-a-b}.$$

即学即练

5. 已知 $y-x=2xy$, 求

$$\frac{3x+7xy-3y}{2x-3xy-2y} \text{ 的值.}$$

即学即练

6. 已知 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ ($xy \neq 0$)

$$\text{求 } \frac{x^2-2xy-3y^2}{x^2-6xy-7y^2} \text{ 的值.}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2} &= \frac{3k \cdot 4k + 4k \cdot 6k + 6k \cdot 3k}{(3k)^2 + (4k)^2 + (6k)^2} \\ &= \frac{54k^2}{61k^2} = \frac{54}{61}. \end{aligned}$$

类型三：分式在实际问题中的应用

例 7 甲、乙两人分别从两地同时出发，若相向而行，则 a 小时后相遇；若同向而行，则甲 b 小时追上乙。那么甲的速度是乙的速度的多少倍？

分析 此题涉及行程问题中的相遇问题和追及问题。对相遇问题而言，甲的路程 + 乙的路程 = S ；对追及问题而言，甲的路程 - 乙的路程 = S 。

解： 设甲、乙两人开始时之间的距离是 S ，甲乙两人的速度分别为 v_1 和 v_2 ，可得
$$\begin{cases} S = a(v_1 + v_2) \\ S = b(v_1 - v_2) \end{cases}$$

$$\text{于是 } a(v_1 + v_2) = b(v_1 - v_2),$$

$$\text{解得 } \frac{v_1}{v_2} = \frac{a+b}{b-a},$$

即甲的速度是乙的速度的 $\frac{a+b}{b-a}$ 倍。

即学即练

7. 某校工厂将总价值为 2 000 元的甲种原料与总价值为 4 800 元的乙种原料混合后，其平均价格比原甲种原料 0.5 kg 少 3 元，比乙种原料 0.5 kg 多 1 元，问混合后单价 0.5 kg 是多少元？

我说你讲

如何正确地将分式约分？

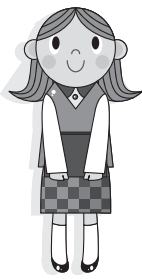


熟悉分式约分的三种类型：**①**分子、分母都是单项式；**②**分子、分母都是多项式；**③**分子、分母是单项式与多项式的积。



若分子、分母都是单项式，则先找出分子、分母系数最大的公约数，再找相同字母的最低次幂。

约分步骤：**①**把能因式分解的分子、分母因式分解；**②**按确定分子、分母、公因式的方法确定分子、分母、公因式；**③**约去公因式。



若分子、分母是多项式，则先把多项式因式分解，再找出分子、分母的公因式。




巩固练习

1. 下列各个代数式: ① $\frac{mn}{2}$; ② $2a + b$;

③ $\frac{5}{1-x}$; ④ $\frac{2x}{3}$; ⑤ $\frac{x-z}{5+y}$. 其中整式有_____

_____, 分式有_____.

2. 一箱苹果售价为 p 元, 总质量为 m kg, 箱子的质量为 n kg, 每千克苹果的售价为_____元.

3. 若 $\frac{-4}{a-4}$ 表示一个整数, 则整数 a 的取值可能是_____.

4. 若分式 $\frac{1}{1-2x}$ 有意义, 则 x 的取值范围是 ()

A. $x > \frac{1}{2}$ B. $x \neq \frac{1}{2}$

C. $x > -\frac{1}{2}$ D. $x < \frac{1}{2}$

5. 如果把分式 $\frac{x+2y}{x+y}$ 中的 x, y 都扩大 10 倍, 那么分式的值 ()

A. 都扩大 10 倍 B. 是原来的 $\frac{1}{10}$

C. 是原来的 $\frac{2}{3}$ D. 不变

6. 下列等式中正确的是 ()

A. $\frac{b}{a} = \frac{b^2}{a^2}$ B. $\frac{-a+b}{a-b} = -1$

C. $\frac{a+b}{a+b} = 0$ D. $\frac{a^2-b^2}{a^2+ab} = \frac{a+b}{a}$

7. 求下列条件下, 分式 $\frac{2x+1}{3x-5}$ 的值.

(1) $x=1$;

(2) $x=2.5$

8. 约分.

(1) $\frac{12x^2y^3}{9x^3y^2}$;

(2) $\frac{y-x}{(x-y)^3}$.

9. 当分式 $\frac{|x|-1}{1-x}$ 的值为 0 时, 求代数式

$\frac{1}{x} - x$ 的值.

10. 某厂的仓库里有煤 p 吨, 每天需用煤 q ($q > 1$) 吨, 若从现在开始, 每天节省 1 吨煤, 则 p 吨煤可以用多少天? 当 $p=10, q=3$ 时, 仓库里的煤可以用多少天?

1.2 分式的乘法和除法

知识详解

知识点 1

分式的乘除

乘法法则: 分式乘分式, 把分子乘分子, 分母乘分母分别作为积的分子、分母.

除法法则: 分式除以分式, 把除式的分子、分母颠倒位置后, 与被除式相乘.

用式子表示是:

$$\frac{f}{g} \cdot \frac{u}{v} = \frac{fu}{gv}, \quad \frac{f}{g} \div \frac{u}{v} = \frac{f}{g} \cdot \frac{v}{u} = \frac{fv}{gu} \quad (u \neq 0).$$

【解读】(1) 公式中的 f, g, u, v 可以是单项式, 也可以多项式, 如果是多项式, 应先把分子、分母分解因式.

(2) 除式或被除式是整式时, 可把它们看作是分母为 1 的分式, 然后依照法则进行计算.

(3) 分式的除法运算和有理数的除法运算一样, 先将除法转化为乘法, 然后按乘法运算进行, 特别要注意运算中各项的符号.

(4) 分式的运算结果一定要化为最简分式或整式.

例 1 计算 $\frac{3ab}{2cd} \cdot \frac{4c^2d}{3a^2b}$ 的结果为_____.

分析

	分子	分母
前一个分式	$3ab$	$2cd$
后一个分式	$4c^2d$	$3a^2b$
乘积	$12abc^2d$	$6a^2bcd$
约分后的结果	$\frac{12abc^2d}{6a^2bcd} = \frac{2c}{a}$	

解: $\frac{2c}{a}$.

例 2 计算 $\frac{x-3}{x^2+x} \div \frac{x^2-6x+9}{x^2-1}$.

分析 按步骤求解: (1) 除法关系转化成乘法; (2) 因式分解; (3) 相乘; (4) 约分.

巧记乐背



分式乘法先约分,
约分之后再求积.
子、母若含多项式,
分解可找公因式.
除法转化乘倒数,
转化之后法一致.
运算结果分类看,
整式也可是分式.
子、母如有式乘积,
通常变为多项式.

即学即练

1. 计算:

(1) $\frac{6m}{8x} \cdot \frac{2x^2}{3m}$;

(2) $\frac{3a^2b^3}{c^2d} \div \frac{5a^2b}{(-c^3d^2x)}$.