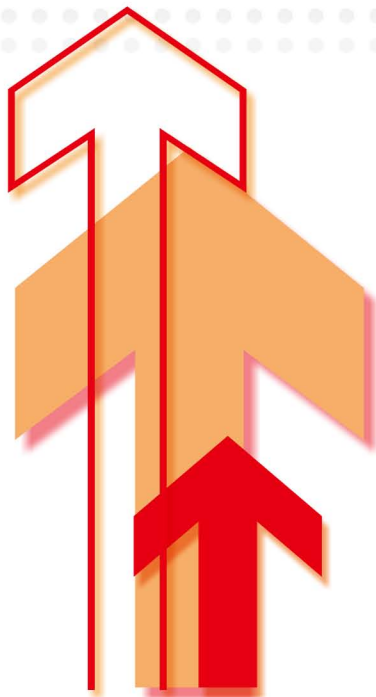


湘教版

湘教
考苑



7 数学
七年级下册

“单元学习全优用书”

★ 一线名师的重要讲义

梳理单元知识 / 对比历年热考题型 / 巩固本单元的重点知识

★ 优生必看的精华笔记

以教材单元为基本结构 / 依据历年热考题型 / 汇总本单元的知识重点

★ 紧贴考点的拓展演练

遵循教材和考纲 / 以图表概述单元结构 / 轻松把握知识要点

单元整合与测评

DANYUAN ZHENGHE YU CEPING

本书编写组 编

配套单元测试卷 + 期中测试卷 + 期末测试卷

CES 湖南教育出版社
PUBLISHING & MEDIA
湖南教育出版

湘教版

本册主编 康 军 戴洪昱

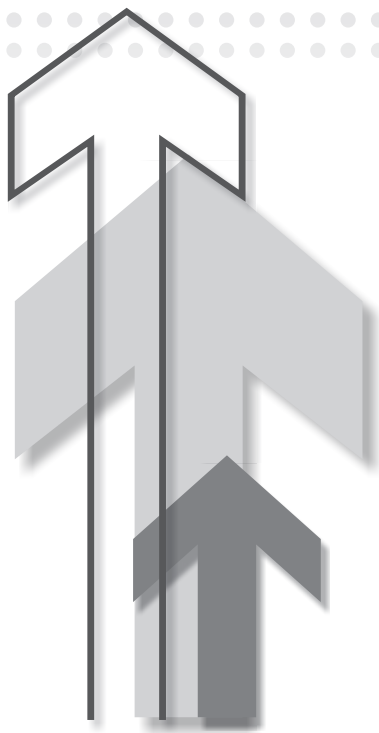
丛书编委 李 珺 康 军

仇玉云 吴课朋

戴美红 曾灿辉

肖 耘 刘寒晓

龙凤云 彭智旭



7 数学
七年级下册

“单元学习全优用书”

★ 一线名师的重要讲义

梳理单元知识 / 对比历年热考题型 / 巩固本单元的重点知识

★ 优生必看的精华笔记

以教材单元为基本结构 / 依据历年热考题型 / 汇总本单元的知识重点

★ 紧贴考点的拓展演练

遵循教材和考纲 / 以图表概述单元结构 / 轻松把握知识要点

单元整合与测评

DANYUAN ZHENGHE YU CEPING

本书编写组 编

配套单元测试卷 + 期中测试卷 + 期末测试卷

CIS 湖南教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

单元整合与测评. 数学七年级. 下册: 湘教版/《单元整合与测评》编写组编. —长沙: 湖南教育出版社, 2016. 1
ISBN 978-7-5539-3056-5

I. ①单… II. ①单… III. ①中学数学课—初中—习题集
IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 292338 号

单元整合与测评

数 学 七 年 级 下 册 (湘 教 版)

本书编写组 编

责任编辑: 钟劲松

出版发行: 湖南教育出版社

地 址: 长沙市韶山北路 443 号

网 址: <http://www.hnepb.com>

电子邮箱: hnjycbs@sina.com

微信服务号: 多点学习

客 服: 电话 0731-85486979

经 销: 湖南省新华书店

印 刷: 湖南长福彩色印务有限公司

开 本: 787×1092 1/16

印 张: 8

字 数: 250 千字

版 次: 2016 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5539-3056-5

定 价: 18.00 元

本书如有印刷、装订错误, 可向承印厂调换

第 1 章 二元一次方程组

单元知识梳理	1
重点知识详解	2
1. 1 建立二元一次方程组	2
1. 2 二元一次方程组的解法	4
1. 3 二元一次方程组的应用	6
*1. 4 三元一次方程组	9
思维能力拓展	12

第 2 章 整式的乘法

单元知识梳理	16
重点知识详解	17
2. 1 整式的乘法	17
2. 2 乘法公式	20
思维能力拓展	22

第 3 章 因式分解

单元知识梳理	25
重点知识详解	26
3. 1 多项式的因式分解	26
3. 2 提公因式法	27
3. 3 公式法	30
思维能力拓展	33

第4章 相交线与平行线

单元知识梳理	36
重点知识详解	37
4.1 平面上两条直线的位置关系	37
4.2 平移	40
4.3 平行线的性质	42
4.4 平行线的判定	44
4.5 垂线	46
4.6 两条平行线间的距离	49
思维能力拓展	51

第5章 轴对称与旋转

单元知识梳理	55
重点知识详解	56
5.1 轴对称	56
5.2 旋转	58
5.3 图形变换的简单应用	60
思维能力拓展	62

第6章 数据的分析

单元知识梳理	65
重点知识详解	66
6.1 平均数、中位数、众数	66
6.2 方差	70
思维能力拓展	73

第 1 章

二元一次方程组



单元知识梳理

知识点	内容	备注
二元一次方程	含有两个未知数(二元), 并且含未知数的项的次数都是 1, 称这样的方程为二元一次方程, 使二元一次方程两边的值相等的两个未知数的值, 叫做二元一次方程的解	二元一次方程的解是成对的, 一个二元一次方程的解有无数个
二元一次方程组	把两个含有相同未知数的二元一次方程(或者一个二元一次方程, 一个一元一次方程)联立起来, 组成的方程组, 叫做二元一次方程组	
二元一次方程组的一个解	在一个二元一次方程组中, 使每一个方程的左、右两边的值都相等的一组未知数的值, 叫做这个方程组的一个解	
解方程组	求方程组的解的过程叫做解方程组	
解二元一次方程组的基本思想	消去一个未知数(简称为消元), 得到一个一元一次方程, 然后解这个一元一次方程	基本思想: 消元, 二元 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 一元
二元一次方程组的解法	解二元一次方程组的两种方法: (1)代入消元法: 把其中一个方程的某一个未知数用含有另一个未知数的代数式表示, 然后把它代入到另一个方程中, 得到一个一元一次方程. (2)加减消元法: 两个二元一次方程中同一未知数的系数相同或相反时, 把这两个方程相减或相加, 就能消去这个未知数, 从而得到一个一元一次方程	解题时可根据方程组的具体情况灵活选择适合的消元方法
二元一次方程组的应用	用二元一次方程组解决实际问题的步骤: (1)找出两个等量关系;(2)设两个未知数;(3)列方程组;(4)解方程组;(5)检验解是否符合实际情况;(6)作答	找等量关系是关键



1.1 建立二元一次方程组

知识 点拨

知识点 1 二元一次方程组的概念

二元一次方程的定义：一个含有两个未知数(二元)，并且含未知数的项的次数都是1，这样的方程叫二元一次方程。

注意：(1)在方程中“元”是指未知数，“二元”就是指方程中有且只有两个未知数。

(2)“含未知数的项的次数都是1”是指每个含有未知数的项(单项式)的次数是1，而不是每个未知数的次数都是1。

(3)二元一次方程的左边和右边都必须是整式。

二元一次方程组的定义：把具有相同未知数的两个二元一次方程联立起来，组成的方程组，叫二元一次方程组。此外，组成方程组的各个方程也不必同时含有两个未知数。

例 1

(1)在下列方程中，不是二元一次方程的有()

- A. $x+y=3$ B. $xy=3$
C. $x-y=3$ D. $x=3-y$

(2)下列方程组是二元一次方程组的有()

$$\textcircled{1} \begin{cases} 2m-n=1 \\ m+n=2 \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} x-2y=3 \\ y+z=1 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} x=1 \\ x+2y=5 \end{cases} \quad \textcircled{4} \begin{cases} x^2+y=5 \\ x-y=4 \end{cases}$$

- A. 1 个 B. 2 个
C. 3 个 D. 4 个

分析：根据二元一次方程、二元一次方程组的定义来进行判断。满足的条件：含有2个未知数，且未知数的项的次数是1的整式方程。

解：(1)A. $x+y=3$ 是二元一次方程，故本选项不符合题意；

B. $xy=3$ 是二元二次方程，故本选项符合题意；

C. $x-y=3$ 是二元一次方程，故本选项不符合题意；

D. $x=3-y$ 是二元一次方程，故本选项不符合题意。

整合突破

1. 下列方程中，是二元一次方程的是 ()

- A. $3x^2-2y=4$
B. $6x+y+9z=0$
C. $\frac{1}{x}+4y=6$
D. $4x=\frac{y-2}{4}$

2. 下列各方程组中，属于二元一次方程组的是()

- A. $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ xy=5 \end{cases}$
B. $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x=z=2 \end{cases}$
C. $\begin{cases} y=2x \\ 3x+4y=2 \end{cases}$
D. $\begin{cases} \frac{5}{x}+\frac{y}{3}=\frac{1}{2} \\ x+2y=3 \end{cases}$

3. 下列方程组：

- ① $\begin{cases} x-y=4 \\ xy=3 \end{cases}$
② $\begin{cases} 2x-y=5 \\ y=4x+1 \end{cases}$
③ $\begin{cases} y=3x \\ x+4z=-8 \end{cases}$
④ $\begin{cases} x-5=3y \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=\frac{1}{4} \end{cases}$

其中，二元一次方程组的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】1. D 2. C 3. B

故选 B.

(2) 根据二元一次方程组的定义, 可知①③为二元一次方程组;

②中有三个未知数不是二元一次方程组, ④中 $x^2 + y = 5$ 不是二元一次方程, \therefore ②④不是二元一次方程组.

\therefore 二元一次方程组为 2 个.

故选 B.

知识点 2 二元一次方程组的解的概念

在一个二元一次方程组中, 使每一个方程的左、右两边的值相等的两个未知数的值, 叫做二元一次方程组的一个解. 求方程组的解的过程, 叫做解方程组.

一般地, 二元一次方程组的两个方程的公共解, 叫做二元一次方程组的解.

注意: (1) 方程组中每个未知数的值应同时满足两个方程, 所以检验是否是方程组的解, 应把数值代入两个方程, 若两个方程同时成立, 才是方程组的解, 而方程组中某一个方程的某一组解不一定是方程组的解.

(2) 方程组的解要用大括号联立;

(3) 一般地, 二元一次方程组的解只有一组, 但也有特殊情况, 有的方程组无解, 或者解有无数个.

例 2 (1) 解为 $\begin{cases} x=2, \\ y=-3 \end{cases}$ 的二元一次方程是 ()

- A. $4x - y = 5$ B. $5x + y = 7$
C. $y - 2x = -1$ D. $x - y = -5$

(2) 下列方程组中, 解为 $\begin{cases} x=-5, \\ y=1 \end{cases}$ 的是 ()

- A. $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=-6 \end{cases}$
C. $\begin{cases} x+y=-4 \\ x-y=-6 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x+y=-4 \\ x-y=-4 \end{cases}$

解: 将 x 、 y 的值分别代入选项中, 看二元一次方程两边是否相等, 若相等就是方程的解.

(1) A 选项中, $4x - y = 4 \times 2 - (-3) = 11$, 故 A 选项错误;

B 选项中, $5x + y = 5 \times 2 + (-3) = 7$, 故 B 选项正确;

C 选项中, $y - 2x = -3 - 2 \times 2 = -7$, 故 C 选项错误;

D 选项中, $x - y = 2 - (-3) = 5$, 故 D 选项错误.

所以选 B.

(2) 因为 $x + y = -4$, 故排除 A、B; 又 $x - y = -6$, 所以选 C.

整合突破

4. 下列各组数中是方程组 $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$ 的解为 ()

- A. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$
B. $\begin{cases} x=-2 \\ y=-7 \end{cases}$
C. $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$
D. $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

5. 以 $\begin{cases} x=1, \\ y=2 \end{cases}$ 为解的二元一次方程组是 ()

- A. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$
B. $\begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + y = -5 \end{cases}$
C. $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 3x + 5y = -5 \end{cases}$
D. $\begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

【答案】4. A 5. D

知识点 3 根据实际问题列二元一次方程组

根据实际问题列方程组，它的关键是把已知量和未知量联系起来，找出题目中的相等关系。一般来说，所列方程必须满足：(1)方程两边表示的是同类量；(2)同类量的单位要统一；(3)方程两边的数值要相等。

例 3 某校七年级(2)班 40 名同学为“希望工程”捐款，共捐款 100 元。捐款情况如下表：

捐款额(元)	1	2	3	4
人数	6			7

表格中捐款 2 元和 3 元的人数不小心被墨水污染，已看不清楚。若设捐款 2 元的有 x 名同学，捐款 3 元的有 y 名同学。根据题意，可得方程组()

- A. $\begin{cases} x+y=27 \\ 2x+3y=100 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+y=40 \\ 2x+3y=66 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} x+y=27 \\ 2x+3y=66 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x+y=40 \\ 2x+3y=100 \end{cases}$

分析：根据总人数为 40 人和总捐款数为 100 元可列出两个关于 x 、 y 的方程，求方程组的解即可。

解：根据七年级(2)班有 40 名同学得： $6+x+y+7=40$ ，即 $x+y=27$ 。

根据一共捐款 100 元，可得： $6+2x+3y+28=100$ ，即 $2x+3y=66$ 。

所以可得方程组为 $\begin{cases} x+y=27, \\ 2x+3y=66. \end{cases}$ 故选 C。

点评：本题考查了二元一次方程的应用，解题关键是要读懂题目的意思，根据题目给出的条件，找出合适的等量关系，列出方程组。

整合突破

6. 刘刚同学买了两种不同的贺卡共 8 张，单价分别是 1 元和 2 元，共用 10 元。

设刘刚买的 1 元贺卡有 x 张，2 元贺卡有 y 张，则下面的方程组正确的是()

- A. $\begin{cases} x+\frac{y}{2}=10 \\ x+y=8 \end{cases}$
- B. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=8 \\ x+2y=10 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} x+y=10 \\ x+2y=8 \end{cases}$
- D. $\begin{cases} x+y=8 \\ x+2y=10 \end{cases}$

7. 已知两数 x 、 y 之和是 10， x 比 y 的 3 倍大 2，则下面所列方程组正确的是()

- A. $\begin{cases} x+y=10 \\ y=3x+2 \end{cases}$
- B. $\begin{cases} x+y=10 \\ y=3x-2 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} x+y=10 \\ x=3y+2 \end{cases}$
- D. $\begin{cases} x+y=10 \\ x=3y-2 \end{cases}$

【答案】 6. D 7. C

1.2 二元一次方程组的解法

知识 点拨

知识点 1 代入消元法

定义：把二元一次方程组中的一个方程的某一个未知数用含另一个未知数的代数式表示出来，再代入另一方程，实现消元，进而求得这个二元一次方程组的解，这种方法叫做代入消元法，简称代入法。

整合突破

1. 用代入法解方程组 $\begin{cases} 2x+3y-2=0 & \text{①} \\ 4x+1=9y & \text{②} \end{cases}$ 时，变形正确的是 ()

用代入法解二元一次方程组的一般过程：

①从方程组中选定一个系数比较简单的方程进行变形，将这个方程中的一个未知数用含有另一个未知数的代数式表示出来；

②将变形后的关系式代入另一个方程(不能代入原变形方程)中，消去一个未知数，得到一个一元一次方程；

③解这个一元一次方程，求出其中的一个未知数的值；

④把已求得的未知数的值代入变形的关系式中，求出另一个未知数的值；

⑤用“{”联立两个未知数的值，就是方程组的解。

例1 用代入消元法解下列方程组：

$$(1) \begin{cases} 3x+2y=5 \\ y=1-x \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 4x-y=5 \end{cases}$$

解：(1)把方程 $y=1-x$ 代入 $3x+2y=5$ 得

$$3x+2-2x=5,$$

解得 $x=3$.

把 $x=3$ 代入方程 $y=1-x$,

解得 $y=-2$.

故方程组的解是 $\begin{cases} x=3, \\ y=-2. \end{cases}$

(2)把方程 $4x-y=5$ 移项得 $y=4x-5$,

把方程 $y=4x-5$ 代入方程 $2x+3y=-1$ 得 $14x=14$,

解得 $x=1$,

把 $x=1$ 代入方程 $y=4x-5$,

解得 $y=-1$,

故方程组的解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$

知识点 2 加减消元法

定义：两个二元一次方程中同一未知数的系数相反或相同时，将两个方程的两边分别相加或相减，就能消去这个未知数，得到一个一元一次方程，这种方法叫做加减消元法，简称加减法。

用加减法解二元一次方程组的一般过程：

①根据“等式的两边都乘以(或除以)同一个不等于0的数，等式仍然成立”的性质，将原方程组化成有一个未知数的系数绝对值相等的形式；

②根据“等式两边加上(或减去)同一个整式，所得的方程与原方程是同解方程”的性质，将变形后的两个方程相加(或相减)，消去一个未知数，得到一个一元一次方程；

③解这个一元一次方程，求出一个未知数的值；

A. 先将①变形为 $x = \frac{3y-2}{2}$ ，再代入②

B. 先将①变形为 $y = \frac{2-2x}{3}$ ，再代入②

C. 先将②变形为 $x = \frac{9}{4}y - 1$ ，再代入①

D. 先将②变形为 $y = 9(4x+1)$ ，再代入①

2. 用代入消元法解下列方程组：

$$(1) \begin{cases} 4x-3y=17, \\ y=7-5x. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x-y=-5, \\ 3x+2y=10. \end{cases}$$

【答案】1. B

$$2. (1) \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}$$

整合突破

3. 方程组 $\begin{cases} 3x+7y=9, \\ 4x-7y=5 \end{cases}$ 的解是 ()

A. $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=-2 \\ y=\frac{3}{7} \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{3}{7} \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{3}{7} \end{cases}$

4. 用加减消元法解下列方程组：

$$(1) \begin{cases} m-n=5, \\ 3m-n=-1. \end{cases}$$

④把求得的未知数的值代入原方程组中比较简单的一个方程中, 求出另一个未知数的值;

⑤将两个未知数的值用“{”联立在一起即可.

例 2 用加减消元法解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 4a-2b=6, \\ 2a-6b=-2; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x+y=1, \\ 5x+2y=3. \end{cases}$$

$$\text{解: } (1) \begin{cases} 4a-2b=6, & \text{①} \\ 2a-6b=-2, & \text{②} \end{cases}$$

$$\because \text{①}-\text{②} \times 2 \text{ 得: } 10b=10,$$

$$\therefore b=1.$$

$$\text{把 } b=1 \text{ 代入①得: } 4a-2=6,$$

$$\text{解得: } a=2,$$

$$\text{原方程组的解是 } \begin{cases} a=2, \\ b=1. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x+y=1, & \text{①} \\ 5x+2y=3. & \text{②} \end{cases}$$

$$\because \text{①} \times 2 - \text{②} \text{ 得: } -x = -1,$$

$$\therefore x=1,$$

$$\text{把 } x=1 \text{ 代入①得: } 2+y=1,$$

$$\text{解得: } y=-1,$$

$$\text{即方程组的解是 } \begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$$

点评: 当方程组中有一个未知数的系数的绝对值相等或同一个未知数的系数成整数倍时, 用加减消元法较简单.

$$(2) \begin{cases} 3x+5y=5, \\ 3x-4y=23. \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 5x-3y=13, \\ 2x+4y=0. \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 5x-y=-9, \\ y=-3x+1. \end{cases}$$

【答案】 3. D

$$4. (1) \begin{cases} m=-3 \\ n=-8 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$$

1.3 二元一次方程组的应用

知识 点拨

知识点 1 列方程组解应用题的基本思想

列方程组解应用题是把“未知”转化为“已知”的重要方法, 它的关键是把已知量和未知量联系起来, 找出题目中的相等关系.

一般来说, 有几个未知数就必须列出几个方程, 所列方程必须满足: (1) 方程两边表示的是同类量; (2) 同类量的单位要统一; (3) 方程两边的数值要相等.

例 1 为了保护环境, 某校环保小组成员收集废电池, 第一天收集 1 号电池 4 节, 5 号电池 5 节, 总重量为 460 克, 第

整合突破

1. 小颖家离学校 1200 米, 其中有一段为上坡路, 另一段为下坡路. 她去学校共用了 16 分钟. 假设小颖上坡路的平均速度是 3 千米/时, 下坡路的平均速度是 5 千米/时. 若设小颖上坡用了 x 分钟, 下坡用了 y 分钟, 根据题意可列方程组为 ()

$$A. \begin{cases} 3x+5y=1200 \\ x+y=16 \end{cases}$$

二天收集1号电池2节,5号电池3节,总重量为240克,试问1号电池和5号电池每节分别重多少克?

分析:如果1号电池和5号电池每节分别重 x 克、 y 克,则4节1号电池和5节5号电池总重量为 $(4x+5y)$ 克,2节1号电池和3节5号电池总重量为 $(2x+3y)$ 克.

解:设1号电池每节重 x 克,5号电池每节重 y 克,根据题意可得

$$\begin{cases} 4x+5y=460, & \text{①} \\ 2x+3y=240. & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{②} \times 2 - \text{①}, \text{得 } y=20.$$

把 $y=20$ 代入②,得 $2x+3 \times 20=240$, $x=90$.

所以这个方程组的解为 $\begin{cases} x=90, \\ y=20. \end{cases}$

答:1号电池每节重90克,5号电池每节重20克.

知识点 2 列方程解应用题中常用的基本等量关系

1. 行程问题:速度 \times 时间=路程.

顺水速度=静水速度+水流速度.

逆水速度=静水速度-水流速度.

2. 工程问题:工作效率 \times 工作时间=工作量.

3. 浓度问题:溶液 \times 浓度=溶质.

4. 银行利率问题:免税利息=本金 \times 利率 \times 期数.

5. 增长率问题

$$\text{增长率} = \frac{\text{增长量}}{\text{计划量}} \times 100\%;$$

计划量 $\times(1+\text{增长率})$ =增长后的量;

计划量 $\times(1-\text{减少率})$ =减少后的量.

常见类型题还有比例分配问题、商品利润问题、年龄问题等.

例2 某工厂去年的总产值比总支出多500万元.由于今年总产值比去年增加15%,总支出比去年节约10%,因此,今年总产值比总支出多950万元.今年的总产值和总支出各是多少万元?

分析:可列下表(去年总产值 x 万元,总支出 y 万元).

	总产值	总支出	差
去年	x	y	500
今年	$(1+15\%)x$	$(1-10\%)y$	950

题中有两个相等关系:(1)去年的总产值-去年的总支出=500万元;

(2)今年的总产值-今年的总支出=950万元.

解:设去年的总产值是 x 万元,去年的总支出是 y 万元,

$$\text{B. } \begin{cases} \frac{3}{60}x + \frac{5}{60}y = 1.2 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} 3x + 5y = 1.2 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} \frac{3}{60}x + \frac{5}{60}y = 1200 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

2. 甲种电影票每张20元,乙种电影票每张15元.若购买甲、乙两种电影票共40张,恰好用去700元,则甲种电影票买了_____张.

【答案】1. B 2. 20

整合突破

3. 已知甲、乙两种商品的原单价和为200元.因市场变化,甲商品降价10%,乙商品提高10%,调价后甲、乙两种商品的单价和比原单价和提高了5%.求甲、乙两种商品的原单价各是多少元.

4. 某企业接到任务,须在规定时间内生产一批帐篷.如果按原来的生产速度,每天生产120顶帐篷,那么在规定时间内只能完成任务的90%.为按时完成任务,该企业所有人员都支援到生产第一线,这样,每天能生产160顶帐篷,刚好提前一天完成任务.问规定时间是多少天?生产任务是多少顶帐篷?

由题意，得

$$\begin{cases} x-y=500 \\ (1+15\%)x-(1-10\%)y=950. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=2\ 000 \\ y=1\ 500. \end{cases}$

所以 $(1+15\%)x=2\ 300$, $(1-10\%)y=1\ 350$.

故今年的总产值是 2 300 万元，总支出是 1 350 万元.

知识点 3 列二元一次方程组解应用题的一般步骤

利用二元一次方程组探究实际问题时，一般可分为以下六个步骤：

1. 审题、弄清题意及明确各数量之间的关系；
2. 设未知数，可直接设未知数，也可间接设未知数；
3. 列出方程组，根据题目中能表示全部含义的等量关系列出方程，并组成方程组；
4. 解所列的方程组，并检验解的正确性；
5. 写出答案.

注意：

(1) 解实际应用问题必须写“答”，而且在写答案前要根据应用题的实际意义，检查求得的结果是否合理，不符合题意的解应该舍去；

(2) “设”、“答”两步，都要写清单位名称；

(3) 一般来说，设几个未知数就应该列出几个方程并组成方程组.

解答步骤简记为：问题 $\xrightarrow{\text{分析抽象}}$ 方程组 $\xrightarrow{\text{求解}}$ 解答

例 3 学校书法兴趣小组准备到文具店购买 A, B 两种类型的毛笔，文具店的销售方法是：一次性购买 A 型毛笔不超过 20 支时，按零售价销售；超过 20 支时，超过部分每支比零售价低 0.4 元，其余部分仍按零售价销售. 一次性购买 B 型毛笔不超过 15 支时，按零售价销售；超过 15 支时，超过部分每支比零售价低 0.6 元，其余部分仍按零售价销售.

如果全组共有 20 名同学，若每人各买 1 支 A 型毛笔和 2 支 B 型毛笔，共支付 145 元；若每人各买 2 支 A 型毛笔和 1 支 B 型毛笔，共支付 129 元. 这家文具店的 A, B 两种类型毛笔的零售价各是多少？

分析：20 名同学每人买 1 支 A 型毛笔的钱 + 每人买 2 支 B 型毛笔的钱 = 145 元；20 名同学每人买 2 支 A 型毛笔的钱 + 每人买 1 支 B 型毛笔的钱 = 129 元.

解：设该家文具店 A 型毛笔的零售价为每支 x 元，B 型毛笔的零售价为每支 y 元，根据题意，得

【答案】3. 甲的原单价为 50 元，乙的原单价为 150 元

4. 规定时间是 6 天，生产任务是 800 顶帐篷

整合突破

5. 中国国家博物馆由原中国历史博物馆和中国革命博物馆两馆合并改扩建而成. 新馆的展厅总面积与原两馆大楼的总建筑面积相同，成为目前世界上最大的博物馆. 已知原两馆大楼的总建筑面积比原两馆大楼的展览面积的 3 倍少 0.4 万平方米，新馆的展厅总面积比原两馆大楼的展览面积大 4.2 万平方米，求新馆的展厅总面积和原两馆大楼的展览面积.

6. 某镇水库的可用水量 12000 万立方米，假设年降水量不变，能维持该镇 16 万人 20 年的用水量. 实施城市化建设，新迁入 4 万人后，水库只够维持居民 15 年的用水量.

(1) 年降水量为多少万立方米？每人年平均用水量为多少立方米？

(2) 政府号召节约用水，希望将水库的使用年限提高到 25 年，则该镇居民人均每年需节约多少立方米水才能实现目标？

$$\begin{cases} 20x+15y+25(y-0.6)=145, \\ 20x+20(x-0.4)+15y+5(y-0.6)=129, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} 20x+40y=160, \\ 40x+20y=140, \end{cases}$

化简, 得 $\begin{cases} x+2y=8, \\ 2x+y=7. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$

∴ 这家文具店 A 型毛笔的零售价为每支 2 元, B 型毛笔的零售价为每支 3 元.

【答案】 5. 新馆的展厅总面积为 6.5 万平方米, 原两馆大楼的展览面积为 2.3 万平方米.

6. (1) 年降水量为 200 万立方米, 每人年平均用水量为 50 立方米 (2) 该城镇人均每年需要节约 16 立方米的水才能实现目标.

* 1.4 三元一次方程组

知识 点 拨

知识点 1 三元一次方程组

定义: 含有三个未知数, 每个方程中含有未知数的项的次数都是 1, 并且一共有三个方程, 像这样的方程组叫做三元一次方程组.

理解三元一次方程组的定义时, 要注意以下几点:

- (1) 方程组中的每一个方程都是一次方程;
- (2) 如果三个一元一次方程合起来共有三个未知数, 它们就能组成一个三元一次方程组.

例 1 下列方程组不是三元一次方程组的是 ()

A. $\begin{cases} x+y=1 \\ 2y+z=-2 \\ 3y=6 \end{cases}$	B. $\begin{cases} x^2-4=0 \\ y+1=x \\ xy-z=-3 \end{cases}$
C. $\begin{cases} x=2 \\ 2y=-3 \\ x-z=1 \end{cases}$	D. $\begin{cases} y-x=1 \\ x+z=3 \\ 2y-z=0 \end{cases}$

分析: 根据三元一次方程组的定义来求解, 对 A、B、C、D 四个选项进行一一验证.

解: 由题意知, 含有三个相同的未知数, 每个方程中含未知数的项的次数都是 1, 并且一共有三个方程, 叫做三元一次方程组.

- 满足三元一次方程组的定义;
- $x^2-4=0$, 未知量 x 的次数为 2 次, ∴ 不是三元一次

整合突破

1. 下列方程组:

$$\textcircled{1} \begin{cases} a+b+c=2 \\ a=0 \\ a-c=4 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=10 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 2xyz=5 \\ 3x-2y=4 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

其中是三元一次方程组的是 _____ (填序号).

2. 下列方程中, 是三元一次方程组的是 ()

A. $\begin{cases} 2x+y=1 \\ y+4x=3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 4x+3y=7z \\ 2x-yz=4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x-y=1 \\ y-3z=2 \\ 4x-z=0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 3x-yz=6 \\ x-y=1 \\ xz-3y=8 \end{cases}$

【答案】 1. ①② 2. C

方程;

C. 满足三元一次方程组的定义;

D. 满足三元一次方程组的定义;

故选 B.

知识点 2 三元一次方程组的解法

解三元一次方程组的基本思想仍是消元,一般的,应利用代入法或加减法消去一个未知数,从而化三元为二元,然后解这个二元一次方程组,求出两个未知数,最后再求出另一个未知数.解三元一次方程组的一般步骤是:

(1)利用代入法或加减法,把方程组中一个方程与另两个方程分别组成两组,消去两组中的同一个未知数,得到关于另外两个未知数的二元一次方程组;

(2)解这个二元一次方程组,求出两个未知数的值;

(3)将求得两个未知数的值代入原方程组中的一个系数比较简单的方程,得到一个一元一次方程;

(4)解这个一元一次方程,求出最后一个未知数的值;

(5)将求得的三个未知数的值用“{”合写在一起.

注意:

(1)有些特殊的方程组可用特殊的消元法,解题时要根据各方程特点寻求比较简单的解法.

(2)要检验求得的未知数的值是不是原方程组的解,将所求得的一组未知数的值分别代入原方程组里的每一个方程中,看每个方程的左右两边是否相等,若相等,则是原方程组的解,只要有一个方程的左、右两边不相等就不是原方程组的解.

例 2 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 3x - y + z = 4, \\ 2x + 3y - z = 12, \\ x + y + z = 6; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + 3y + z = 6, \\ x - y + 2z = -1, \\ x + 2y - z = 5. \end{cases}$$

$$\text{解: } (1) \begin{cases} 3x - y + z = 4, & \text{①} \\ 2x + 3y - z = 12, & \text{②} \\ x + y + z = 6, & \text{③} \end{cases}$$

$$\text{①} + \text{②} \text{得: } 5x + 2y = 16, \quad \text{④}$$

$$\text{②} + \text{③} \text{得: } 3x + 4y = 18, \quad \text{⑤}$$

$$\text{④} \times 2 - \text{⑤} \text{得: } x = 2,$$

$$\text{把 } x = 2 \text{ 代入④得: } y = 3,$$

$$\text{把 } x = 2, y = 3 \text{ 代入③得: } z = 1,$$

$$\text{原方程组的解是 } \begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = 1. \end{cases}$$

整合突破

3. 三元一次方程组

$$\begin{cases} 5x + 4y + z = 0, \\ 3x + y - 4z = 11, \text{消去未} \\ x + y + z = -2, \end{cases}$$

知数 z 后,得到的二元一次方程组是()

$$\text{A. } \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 7x + 5y = 3 \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 23x + 17y = 44 \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 7x + 5y = 3 \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 23x + 17y = 11 \end{cases}$$

4. 下列四组数值中,为

$$\text{方程组 } \begin{cases} x + 2y + z = 0, \\ 2x - y - z = 1, \text{的解的} \\ 3x - y - z = 2 \end{cases}$$

是()

$$\text{A. } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x+3y+z=6, & \text{①} \\ x-y+2z=-1, & \text{②} \\ x+2y-z=5. & \text{③} \end{cases}$$

$$\text{①}+\text{③} \text{得: } 3x+5y=11 \quad \text{④}$$

$$\text{②}+\text{③} \times 2 \text{ 得: } 3x+3y=9 \quad \text{⑤}$$

$$\text{④}-\text{⑤} \text{得: } y=1,$$

$$\text{把 } y=1 \text{ 代入④得: } x=2,$$

$$\text{把 } x=2、y=1 \text{ 代入③得: } z=-1,$$

$$\text{原方程组的解是} \begin{cases} x=2, \\ y=1, \\ z=-1. \end{cases}$$

点评: 本题考查了三元一次方程组的解法. 解三元一次方程组的关键是把“三元”转化为“二元”、把“二元”转化为“一元”的消元的思想方法. 解题之前先观察方程组中的方程的系数特点, 认准易消的未知数, 消去未知数, 组成该未知数的二元一次方程组.

知识点 3 三元一次方程组的应用

用三元一次方程组解答实际问题的方法与用二元一次方程组解答实际问题的方法类似, 根据题目给出的条件, 寻找相等关系是利用方程组解应用题的重要环节.

例 3 某农场 300 名职工耕种 51 公顷土地, 计划种植水稻、棉花和蔬菜, 已知种植植物每公顷所需的劳动力人数及投入的设备资金如下表:

农作物品种	每公顷需劳动力	每公顷需投入资金
水稻	4 人	1 万元
棉花	8 人	1 万元
蔬菜	5 人	2 万元

已知该农场计划在设备上投入 67 万元, 应该怎样安排这三种作物的种植面积, 才能使所有职工都有工作, 而且投入的资金正好够用?

分析: 首先种植水稻 x 公顷, 棉花 y 公顷, 蔬菜为 z 公顷, 根据题意可得等量关系: ① 三种农作物的投入资金 = 67 万元; ② 三种农作物所需要的人力 = 300 名职工; ③ 三种农作物的种植面积 = 51 公顷, 根据等量关系列出方程组即可.

解: 设种植水稻 x 公顷, 棉花 y 公顷, 蔬菜为 z 公顷,

$$\text{由题意得: } \begin{cases} x+y+2z=67, \\ 4x+8y+5z=300, \\ x+y+z=51, \end{cases}$$

$$5. \text{ 已知} \begin{cases} x+y-z=0, & \text{①} \\ 2x-3y+5z=5, & \text{②} \\ 3x+y-z=2, & \text{③} \end{cases}$$

求 x, y, z 的值.

【答案】 3. A 4. D

5. $x=1, y=-1, z=0$

整合突破

6. 有一个三位数, 个位数字是百位数字的 3 倍, 十位数字比百位数字大 5, 若将此数的个位数与百位数互换, 所得新数比原数的 2 倍多 35, 求原数.

7. 某单位职工在植树节时去植树, 甲、乙、丙三个小组共植树 50 棵, 乙小组植树的棵数是甲、丙两小组的和的 $\frac{1}{4}$, 甲小组植树的棵数恰是乙小组与丙小组的和, 问每小组各植树多少棵?

【答案】 6. 163 7. 甲小组植树 25 棵, 乙小组植树 10 棵, 丙小组植树 15 棵.

$$\text{解得: } \begin{cases} x=15, \\ y=20, \\ z=16. \end{cases}$$

答: 种植水稻 15 公顷, 棉花 20 公顷, 蔬菜 16 公顷.

点评: 此题主要考查了三元一次方程组的应用, 关键是弄懂题意, 抓住题目中的关键语句, 找出等量关系, 设出未知数, 列出方程组.



思维能力拓展

题型一 利用二元一次方程组的解求二元一次方程组中字母系数的值

例 1 已知关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} mx - \frac{1}{2}ny = \frac{1}{2}, \\ mx + ny = 5 \end{cases}$ 的解为

$$\begin{cases} x=2, \\ y=3, \end{cases} \text{ 求 } m、n \text{ 的值.}$$

$$\text{解: 将 } \begin{cases} x=2, \\ y=3 \end{cases} \text{ 代入方程组得: } \begin{cases} 2m - \frac{3}{2}n = \frac{1}{2}, & \text{①} \\ 2m + 3n = 5, & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得: } \frac{9}{2}n = \frac{9}{2}, \text{ 即 } n=1.$$

将 $n=1$ 代入②得: $m=1$,

$$\text{则 } \begin{cases} m=1, \\ n=1. \end{cases}$$

题型二 二元一次方程组的解法技巧

1. 用代入消元法解方程组

例 2 解方程组 $\begin{cases} 2x+3y=16, & \text{①} \\ x+4y=13. & \text{②} \end{cases}$

分析: 观察方程组中各未知数的系数可知, 方程②中 x 的系数为 1, 因此可把方程②转化为用含 y 的代数式表示 x 的形式, 再把 $x=13-4y$ 代入方程①中求解.

$$\text{解: 由②, 得 } x=13-4y. \quad \text{③}$$

把③代入①, 得 $2(13-4y)+3y=16$, 解得 $y=2$.

把 $y=2$ 代入③, 得 $x=5$.

$$\text{所以原方程组的解为 } \begin{cases} x=5, \\ y=2. \end{cases}$$

2. 用加减消元法解方程组

答疑解惑

规律总结: 把方程组的解分别代入二元一次方程组中的两个方程, 从而得到关于 m 、 n 的两个二元一次方程, 联立这两个二元一次方程, 就可以求出 m 、 n 的值.

规律总结: 用代入消元法解二元一次方程组可以抓住其中未知数系数为 1 的二元一次方程, 将其中系数为 1 的未知数用含另外一个未知数的代数式表示, 再代入另一个方程消元转化为一元一次方程. 第二步一定要把表达式代入另一个方程中, 若代入原方程化简必然有“ $0=0$ ”而得不出解.