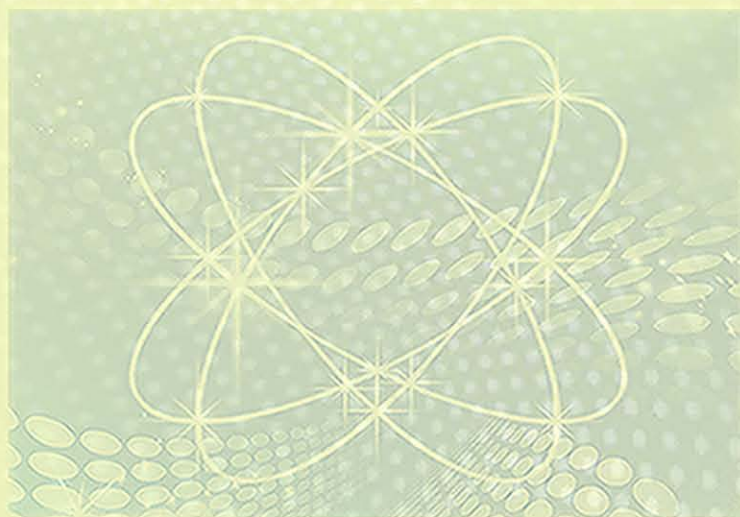


中等职业教育选择性课程改革实验教材配套用书

数学学习能力指导与训练 基础拓展与建模初步

闻达人 主编



电子科技大学出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

数学学习能力指导与训练：基础拓展与建模初步 /
闻达人主编. -- 成都：电子科技大学出版社, 2017.4
ISBN 978-7-5647-4333-8

I. ①数… II. ①闻… III. ①数学课 - 中等专业学校
- 教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 078850 号

中等职业教育选择性课程改革实验教材配套用书
数学学习能力指导与训练
(基础拓展与建模初步)

SHUXUE XUEXI NENGLI ZHIDAO YU XUNLIAN

(JICHU TUOZHAN YU JIANMO CHUBU)

闻达人 主编

出 版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编：610051）

策划编辑：吴艳玲

责任编辑：吴艳玲

主 页：www.uestcp.com.cn

电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn

发 行：新华书店经销

印 刷：安徽宣城海峰印刷包装有限公司

成品尺寸：185mm × 260mm 印张：7 字数：180 千字

版 次：2017 年 4 月第一版

印 次：2017 年 4 月第一次印刷

书 号：ISBN 978-7-5647-4333-8

定 价：21.00 元

■ 版权所有 侵权必究 ■

◆ 本社发行部电话：028-83202463；本社邮购电话：028-83201495

◆ 本书如有缺页、破损、装订错误，请寄回印刷厂调换。



目录 Contents

第 1 章 建模基础	1
1.1 认识建模	1
1.2 建模流程	3
章测试	5
第 2 章 函数模型及应用	7
2.1 一次函数与二次函数模型	7
2.2 分段函数模型	9
2.3 对勾函数模型	11
2.3.1 对勾函数	11
2.3.2 均值定理	13
2.3.3 实际应用	15
章测试	17
第 3 章 线性规划	20
3.1 生活中的运筹问题	20
3.2 二元一次不等式(组)与平面区域	22
3.3 简单的线性规划问题	24
章测试	26
第 4 章 三角公式变换	29
4.1 两角和与差的三角函数	29
4.1.1 两角和与差的余弦公式	29
4.1.2 两角和与差的正弦公式	30
4.1.3 两角和与差的正切公式	31
4.1.4 二倍角公式	32



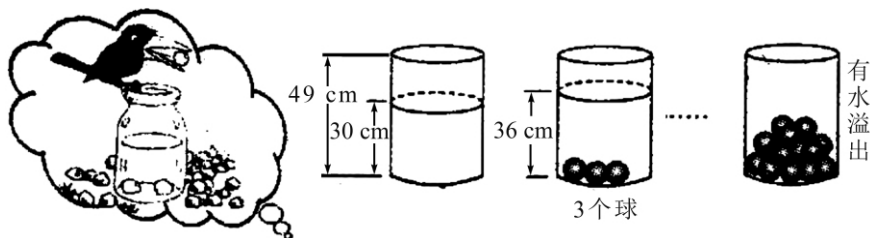
4.2 正弦型函数	33
4.2.1 正弦型函数的周期	33
4.2.2 正弦型函数的图象	34
4.2.3 振幅、周期、频率、相位	36
4.3 解三角形	37
4.3.1 正弦定理	37
4.3.2 余弦定理	38
4.3.3 三角形的面积公式	39
4.3.4 应用举例	40
章测试	42
第 5 章 排列与组合	45
5.1 排列及排列数的计算	45
5.2 组合及组合数的计算	46
5.3 排列与组合的应用举例	47
章测试	49
第 6 章 几何体计算	52
6.1 平面图形的分割与拼接	52
6.2 生活中的几何体计算	55
章测试	58
综合测试	61
综合测试(一)	61
综合测试(二)	65
综合测试(三)	69
综合测试(四)	73
综合测试(五)	77
综合测试(六)	82
参考答案	87

第1章 建模基础

1.1 认识建模

一、填空题

1. 小明受《乌鸦喝水》故事的启发, 利用量筒和体积相同的小球进行了如下操作:



第1题图

请根据图中给出的信息, 建立适当的数学模型求解并填空:

- (1) 放入一个小球, 量筒中水面升高_____ cm;
 - (2) 量筒中至少放入_____个小球时才会有水溢出.
2. 书本例题中, 测量一张纸的厚度问题中, 更合理的数学模型是_____.
 3. 今有鸡兔同笼, 共有头 10 只, 足 26 只, 则鸡比兔多_____只.

二、建模题

4. 穿高跟鞋真的使人觉得美吗? 建立数学模型分析这一问题. (提示: 当人体下肢与身高的比例为黄金比例时, 会让人看起来更美, 黄金比例为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 约等于 0.618.)

5.某公交公司开通新的公交线路,该路线全程为 x 公里,要求全程保持安全行驶速度,预计投入此路线的营运公交车为 a 辆,问:

(1)如果为了让司机在起点和终点站均能休息 b 分钟,那么应该每间隔多长时间发一辆车?

(2)设此路线的全程为 60 千米,预计投入的车辆为 20 辆,司机始终点的休息时间均为 10 分钟,那么应该每间隔多长时间发一辆车?(公交车的安全行驶速度一般规定为不超过 40 千米/小时)

6.某商店推出了一种优惠购物会员卡,花 300 元购买金卡全场享受七五折优惠,花 200 元购买银卡全场享受八折优惠,什么情况下购买何种卡购物更优惠?请建立适当的数学模型求解.

1.2 建模流程

一、选择题

1. 下列不属于建模流程的是 ()
A. 模型准备 B. 模型分析 C. 模型假设 D. 模型解析
2. 下列数学建模的几个基本环节中, 哪个对模型构成有最直接的影响? ()
A. 模型准备 B. 模型检验与应用 C. 模型假设 D. 模型解析
3. 为什么身材高挑的模特还要穿高跟鞋? 为什么踮起脚尖芭蕾舞演员看上去很舒服呢? 科学研究表明, 当人的下肢与身高的比为黄金比例时, 看起来最美, 爱美的女士时常通过高跟鞋来调整自身的这个比例. 现已知某成年女士的身高为 158 cm, 下肢为 95 cm, 通过建立适当的数学模型求解, 该女士所穿高跟鞋鞋跟的最佳高度应约为 ()
A. 5.7 cm B. 6.9 cm C. 7.6 cm D. 8.1 cm

二、建模题

4. 用一根长为 20 cm 的铁丝, 围成一个矩形小框, 当长和宽各为多少时, 面积最大?

5. 一家庭(父母及子女)去某地旅游. 甲旅行社套餐为: 当一位成人购买全票, 其余人均享受半价优惠. 乙旅行社套餐为: 家庭集体购票, 享受六五折优惠. 试通过建立适当的数学模型来分析, 应选择哪个旅行社.

6. 一个人从 A 地出发,以 30 千米/小时的速度到达 B 地,问:他从 B 地回到 A 地的速度要达到多少千米/小时才能使得往返路程的平均速度达到 60 千米/小时?



章测试

一、选择题

- 用一根长 a 米的细铁丝围成下列封闭的平面图形,建立模型求解面积最大的是 ()
A. 正方形 B. 正三角形 C. 正六边形 D. 圆
- 下列哪个不是数学建模流程中的基本环节? ()
A. 模型准备 B. 模型检验与应用
C. 模型构成 D. 模型分析
- 科学研究表明,当人的下肢与身高的比为黄金比例 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时,看起来最美.爱美的女士时常通过高跟鞋来调整自身的这个比例.现已知某成年女士的身高为 163 cm,下肢为 98 cm.通过建立适当数学模型求解,该女士所穿高跟鞋鞋跟的最佳高度应约为 ()
A. 5.8 cm B. 6.7 cm C. 7.2 cm D. 8.1 cm
- 一台电脑成本计价为 a 元,销售价高出成本价 25%.因库存积压,按销售价的 7 折出售,那么每台电脑的实际售价 y 与成本价 a 之间的函数模型为 ()
A. $y = (1+25\%)(1+70\%)a$ B. $y = 70\%(1+25\%)a$
C. $y = (1+25\%+70\%)a$ D. $y = (1+25\%)(1-70\%)a$

二、填空题

- 求 $\triangle ABC$ 面积的方法除了常用的“底 \times 高 $\div 2$ ”模型外,还可以利用海伦公式模型 $S_{\triangle} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,其中 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.请你用海伦公式模型求三边长分别为 3, 5, 6 的三角形面积,面积为 _____.
- 从普陀山风景名胜区售票处只能坐轮船到风景区,从网上查得两地相距约 8 千米,若顺风需要 $\frac{1}{3}$ 小时,若逆风则需要 $\frac{2}{3}$ 小时.小明去旅游当天无风,建立适当模型求解,小明从售票处出发大约需要 _____ 小时到达风景区.

三、建模题

- 某旅社有客房 100 间,当房价为每间 50 元时,每天都客满.该旅社欲提升档次,并提高价格.如果每间房价提高 5 元,客房出租数会减少 5 间.试建立适当的模型求解,旅社将房价提高到多少时,每天客房的租金收入最高?

8. 若某山区隧道长为 759 米, 客车长为 7 米, 隧道内限速为 40 千米/小时, 试建立适当模型求解, 客车通过隧道的最短时间约为多少秒?

9. 希望小学要买 50 个足球, 现有甲、乙、丙三个商店可以选择. 三个商店足球单价都是 25 元, 但优惠的方法不同.

甲店: 买 10 个足球免费赠送 2 个, 不足 10 个不赠送;

乙店: 每个足球优惠 5 元;

丙店: 购物满 100 元, 返还现金 20 元, 不足不返.

试建立适当模型求解, 希望小学应选择哪家店购买, 费用最省?



第2章 函数模型及应用

2.1 一次函数与二次函数模型

一、填空题

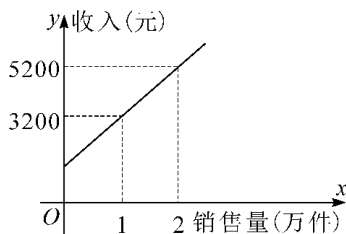
1. 下列命题正确的是_____. (写出所有正确命题的编号)

① 在一次函数模型中, 斜率 k 的取值会影响函数的性质;

② 对于利用二次函数模型 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 解决的实际应用题, 只有当自变量 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, 函数才能取得最大值.

2. 某公司市场营销部的个人月收入与其每月的销售量成一次函数模型, 其图象如图所示. 由图中给出的信息可知, 营销人员没有销售量时的收入是_____元.

3. 长为 4、宽为 3 的矩形, 当长增加 x , 且宽减少 $\frac{x}{2}$ 时面积最大, 此时 $x =$ _____, 最大面积 $S =$ _____.



第2题图

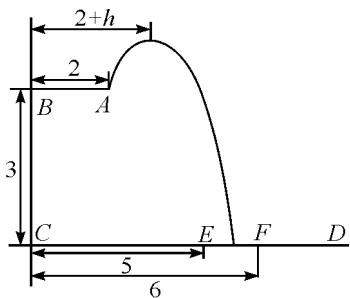
二、解答题

4. 某市原来民用电价为 0.52 元/kW·h. 换装分时电表后, 峰时段(早上八点到晚上九点)的电价为 0.55 元/kW·h, 谷时段(晚上九点到次日早上八点)的电价为 0.35 元/kW·h. 对于一个平均每月用电量为 200 kW·h 的家庭, 请建立一个函数模型, 使得节省的电费不少于原来电费 10% 的情况下, 这个家庭每月在峰时段的平均用电量为多少?

5. 某列火车从北京西站开往石家庄, 全程 277 km, 火车出发 10 min 开出 13 km 后, 以 120 km/h 匀速行驶, 写出火车行驶路程 s (km) 与匀速行驶的时间 t (h) 之间的函数模型, 并且求出火车离开北京西站 2 h 时行驶的路程.

6. 设物体在 8:00 到 16:00 之间的温度 T 是时间 t 的函数模型, $T(t) = at^2 + bt + c$ ($a \neq 0$), 其中温度的单位是 $^{\circ}\text{C}$, 时间的单位是 h, $t=0$ 表示 12:00, t 取正值表示 12:00 以后, 若测得该物体在 8:00 的温度为 8°C , 12:00 的温度为 60°C , 13:00 的温度为 58°C . 请确定温度 T 关于时间 t 的函数模型.

7. 某跳水运动员在一次跳水训练时的跳水曲线为如图所示的一段抛物线. 已知跳水板 AB 的长为 2 m, 跳水板距水面 CD 的高 BC 为 3 m. 为了安全和空中姿态优美, 训练时跳水运动员应在离起跳点 A 的水平距离为 h (m) ($h \geq 1$) 的一处达到距水面最大高度 4 m. 规定: 以 C 为原点, CD 所在直线为横轴, BC 所在直线为纵轴建立直角坐标系. 当 $h=1$ 时, 求跳水曲线所满足的函数模型.



第 7 题图

2.2 分段函数模型

一、填空题

1. 某沿海城市为节约用水,自来水公司规定收费标准如下:每户每月用水不超过 4 t 时,每吨为 1.80 元;当用水超过 4 t 时,超过部分每吨 3.00 元.某月甲、乙两用户共缴水费 y 元,已知甲、乙两用户该月用水量分别为 $5x, 3x$. 则 y 关于 x 的函数模型解析式为_____.
2. 某车站有快慢两种列车,始发站距终点站 7.2 km,慢车到达终点站需 16 min,快车比慢车晚发车 3 min,且匀速行驶 10 min 后到达终点站,则快车所行驶路程 y 关于慢车行驶时间 x 的函数模型解析式为_____.

二、解答题

3. 某城市固定电话市内通话的收费标准是:每次通话 3 分钟以内,收费 0.22 元;超过 3 分钟后,超出部分每分钟(不足 1 分钟按 1 分钟计算)收费 0.11 元.如果通话时间不超过 6 分钟,试建立通话费用与通话时间之间的函数关系,并作出函数图象.

4. 某市为了尽快改善职工住房的困难,鼓励个人购房和积累建房基金,该市决定住公房的职工必须按基本工资的高低缴纳建房公积金,办法如下表.

每月工资	公积金
100 元(不含 100 元)以下	不予缴纳
100~200 元	缴纳超过 100 元部分的 5%
200~300 元	100~200 元部分缴纳 5%,超过 200 元部分缴纳 10%
300 元(不含 300 元)以上	100~200 元部分缴纳 5%,200~300 元部分缴纳 10%,300 元以上部分缴纳 15%

设职工每月工资 x (元),缴纳公积金后实得工资为 y (元),请写出 y 与 x 之间函数模型的关系式.

5. 某品牌茶壶的原售价为 80 元/个, 今有甲、乙两家茶具店销售这种茶壶. 甲店用如下方法促销: 如果只购买一个茶壶, 其价格为 78 元/个, 一次购买的茶壶数每增加 1 个, 那么茶壶的价格减少 2 元, 但茶壶的售价不得低于 44 元/个; 乙店一律按原价的 75% 销售. 现某茶社要购买这种茶壶 x 个, 如果全部在甲店购买, 则所需金额为 y_1 元; 如果全部在乙店购买, 则所需金额为 y_2 元. 请分别写出 y_1 、 y_2 与 x 之间的函数模型关系式, 并且说明该茶社去哪家茶具店购买茶壶花费较少.

6. 某厂生产某种零件, 每个零件的成本为 40 元, 出厂单价为 60 元. 该厂鼓励销售商订购, 决定当一次订购量超过 100 个时, 每多订购一个, 订购的全部零件的出厂单价就降低 0.02 元, 但实际出厂单价不能低于 51 元, 由于受生产条件限制, 订购数量不超过 600 个.

- (1) 当一次订购量为多少个时, 零件的实际出厂单价恰降为 51 元?
- (2) 设一次订购量为 x 个, 零件的实际出厂单价为 P 元, 写出 P 与 x 的函数模型表达式;
- (3) 设销售商一次订购 x 个时, 工厂获得的利润为 W 元, 写出 W 与 x 的函数模型表达式, 并求出当一次订购多少个时, 工厂所获利润最大? 最大利润为多少元?



2.3 对勾函数模型

2.3.1 对勾函数

一、填空题

1. 函数 $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x}$, $x \in (0, \frac{3}{2}]$ 的值域为_____.

2. 函数 $y = \frac{x}{x^2 + 4}$, $x \in [1, \frac{3}{2}]$ 的值域为_____.

3. 函数 $y = \frac{\sin x}{2} + \frac{2}{\sin x}$ ($0 < x < \pi$) 的最小值为_____.

二、解答题

4. 已知函数 $f(x) = x + \frac{7}{x}$.

- (1) 若 $x \in [1, 2]$, 求 $f(x)$ 的值域;
- (2) 若 $x \in [2, 4]$, 求 $f(x)$ 的最小值;
- (3) 若 $x \in [-7, -3]$, 求 $f(x)$ 的值域.

5. 求函数 $y = \sin^2 x + \frac{4}{\sin^2 x}$ 的最小值.

6. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x}$ 在 $(0, 3]$ 上是减函数, 在 $[3, +\infty)$ 上是增函数, 求 a 的值.

7. 已知函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 求函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 上的值域.



2.3.2 均值定理

一、填空题

1. 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 函数 $y = \frac{1}{x-3} + x (x > 3)$ 达到最小值.
2. 已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且 $x + 4y = 1$, 则 xy 的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 若 $a > 0, b > 0$, a, b 的等差中项是 $\frac{1}{2}$, 且 $\alpha = a + \frac{1}{a}, \beta = b + \frac{1}{b}$, 则 $\alpha + \beta$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、解答题

4. 已知 $x > 0$, 求函数 $y = \frac{-2x^2 + x - 3}{x}$ 的最大值及相应的 x 的值.

5. 已知 $0 < x < \frac{3}{2}$, 求 $4x(3-2x)$ 的最大值.