



# 高中数学 课本中的数学 思想方法

必修  
3



- 基于新课标教学大纲，解读典型例题
- 依据课时内容，归类数学思想方法和解题策略
- 经典训练，助你练出好成绩



主编·王国江 副主编·张静霖



上海社会科学院出版社  
SHANGHAI INSTITUTE OF SOCIAL SCIENCES PRESS



# 高中数学 课本中的数学 思想方法

必修  
3



主编◎王国江 副主编◎张倬霖



上海社会科学院出版社  
SHANGHAI ACADEMY OF SOCIAL SCIENCES PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高中数学课本中的数学思想方法. 必修 3/王国江主  
编. —上海:上海社会科学院出版社, 2018  
ISBN 978-7-5520-2262-9

I. ①高… II. ①王… III. ①中学数学课—高中—教  
学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 057053 号

高中数学课本中的数学思想方法(必修 3)

---

主 编: 王国江

副 主 编: 张倬霖

责任编辑: 何红燕 陈如江

封面设计: 郁心蓝

出版发行: 上海社会科学院出版社

上海顺昌路 622 号 邮编 200025

电话总机 021-63315900 销售热线 021-53063735

<http://www.sassp.org.cn> E-mail: [sassp@sass.org.cn](mailto:sassp@sass.org.cn)

照 排: 上海碧悦制版有限公司

印 刷: 上海万卷印刷股份有限公司

开 本: 787 毫米×1092 毫米 1/16 开

印 张: 8

字 数: 178 千字

版 次: 2018 年 7 月第 1 版 2018 年 7 月第 1 次印刷

---

ISBN 978-7-5520-2262-9/G·720

定价: 30.00 元

---

版权所有 翻印必究

## 编 委 会

主 编:王国江

副主编:张倬霖

编 委:张倬霖 浦静滢 吴艳军 杨逸峰

张哲民 赵积慧 李 浩 赵 阳

(排名不分先后)

# 前 言

本书向广大读者介绍了高中数学课本中常见的数学思想方法与解题策略,由杨浦教师进修学院教研员、正高级教师、特级教师王国江老师任主编,上海市行知中学数学教研组长、首席教师、高级教师张倬霖老师任副主编。本书所设栏目:方法简述、易错解读、经典训练,行之有效地将教科书上的学术形态转化为学生可以理解的学习形态,有助于帮助学生理解、体会、巩固、提高。按课本内容分为必修一至五共五个分册。由区正高级教师、特级教师、首席教师、学科带头人和骨干教师进行编写。

作者按照高中数学的教学内容,根据问题的不同类型分门别类,分章节从理论上阐述了数学的解题方法,对教材内容以典型的实例进行了翔实、细致的分析、解答和点评。依据数学教材的每一节、每一课时内容,按小节雕刻、整章梳理、方法呈现、循序渐进、有机磨合、思想渗透、能力提升,这样,给读者对照教材、学习阅读带来了方便,更是接“地气”之作,避免了因按传统的大节编写、内容跨度跳跃较大而带来阅读上的麻烦,本书凝聚了作者多年的心血,是作者多年对解题理论研究、探索、实践的结晶。

基于新课标与数学学科核心素养的数学解题研究,近年已引起众多数学教育工作者的关注与重视,“知识”是基础,“方法”是手段,“思想”是深化。运用数学思想方法去解决数学问题,通常要从多角度、多方位去思考,学会举一反三,触类旁通,也是一门理论。对问题探究的不同途径和方法加以甄选,最后得出认知层次较高的、比较完善的结论,更能培养学生的发散思维和探究创新能力,有助于培养学生自主学习、自主探究的科学精神,激发学生的学习热情和兴趣,养成独立思考的良好习惯是本书的又一特色。

本书是对教材的二次开发、再加工、再创造的过程,对提高学生分析问题、解决问题、自主探究能力以及数学创新能力具有积极作用,对提升考生的应试能力具有较好的参考价值。

参与本书编写的人员,他们来自杨浦区王国江数学名师工作室、上海市教委教研室项目组(项目:基于核心素养的“创智课堂”教学实践研究,编号:JX09JC01201605)、宝山区高中数学研究团队。

上海市杨浦教师进修学院高中教研员、特级教师、正高级教师

王国江

## 第一章 算法初步

1.1 算法概念 .....	2
1.2 程序框图 .....	6
1.3 流程图(选学) .....	10
1.4 结构图 .....	16
章节测试 .....	20

## 第二章 基本统计方法

2.1 随机抽样 .....	26
2.2 用样本估计总体 .....	31
2.3 回归分析的基本思想及其初步应用(选学) .....	36
2.4 独立性检验的基本思想及其初步应用(选学) .....	47
章节测试 .....	51

## 第三章 概率论初步

3.1 概率论初步 .....	56
3.2 随机变量及其分布(选学) .....	63
3.2.1 离散型随机变量及其分布 .....	63
3.2.2 二项分布及其应用 .....	72
3.2.3 离散型随机变量的均值与方差 .....	78
3.2.4 正态分布 .....	83
章节测试 .....	86

## 第四章 计数原理(选学)

4.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理 .....	91
4.2 排列与组合 .....	96
4.3 二项式定理 .....	100
章节测试 .....	104
参考答案 .....	106

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$$



$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N W_i X_i}{\sum_{i=1}^N W_i}$$



$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

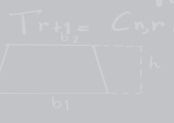
$$\tanh^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) = 1$$

$$\csc(-x) = -\csc(x)$$



1.  $P \rightarrow q$  }  $q$   
2.  $P$  }  $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$   
 $p \rightarrow F \equiv \sim p$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



$$\sinh(x)^h = (e^x - e^{-x})/2$$
  
$$X_{k+1} = (X_k + y/X_k)^{n-1} / 2$$



$$= \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$\cot(-x) = -\cot(x)$$

Log



$$\operatorname{sech}(x) = 1/\cosh(x) = 2/(e^x + e^{-x})$$



Parallelogram = bh

# 第一章 算法初步

1.  $P \rightarrow q$  }  
2.  $q \rightarrow r$  }  $P \rightarrow r$

1.  $P \vee q$  }  
2.  $\sim p$  }  $\sim (p \wedge q)$

1.  $P \rightarrow r$  }  
2.  $q \rightarrow s$  }  $r \vee s$   
3.  $p \vee q$  }  
1.  $p$  }  $p \vee q$

$$\cos(\dots)$$

$\exists x \exists y [\sim p(x, y)]$

$(n+1)d$

$$\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$$

$$\operatorname{csch}(x) = (e^x - e^{-x})/2$$

$$d = h/2 (b_1 + b_2)$$

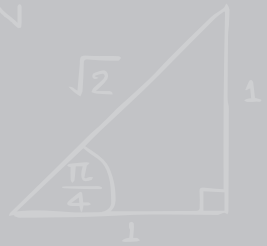
$$a^2 = 2ab + b^2 = (a+b)^2$$



$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - x_2)^2}{N}$$

$$p \vee F \equiv p$$

$$\arcsin(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$$



$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$\sim \forall x [\sim p(x)] \equiv \exists x [p(x)]$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

1.  $P \wedge q$  }  $p$  or  $q$

## 1.1 算法概念

自古以来,人们就常把解题的技术固定为一个公式或一个解题程序,使得其他人在解决同类问题时,只要将有关数据代入公式,或按部就班地执行解题程序,就可以得到结果.

随着计算机技术的迅速发展,人们正在把越来越多的工作交给计算机来实现.但是计算机本身不具备分析能力和设计能力,它的行为需要人的指挥.所以算法的学习是必要的任务.

### 方法简述

#### 1. 分类讨论

**例 1** 设计一个算法,求  $y=|x|$  的值.

**点拨** 由于绝对值的值与变量  $x$  的正负有关,所以必须进行分类讨论.

**解答** (1)输入  $x$  的值;

(2)进行判断,如果  $x \geq 0$ ,则  $f(x)=x$ ,否则  $f(x)=-x$ ;

(3)输出结果.

**反思** 通过判断语句完成算法的设计.

**例 2** 任意给定一个大于 1 的正整数  $n$ ,设计一个算法,求出  $n$  的所有因数.

**点拨** 是否为  $n$  的因数,必须由该数是否能整除  $n$  来进行研究.

**解答** (1)输入正整数  $n$ ;

(2)初始  $a$  为 1;

(3)判断  $n$  是否能被  $a$  整除;若是,输出  $a$ ,然后  $a$  累加 1;

(4)重复步骤(3),直至  $a$  大于  $n$ .

**反思** 判断语句和循环语句的结合使用.

#### 2. 一题多解

对于同一个问题,从不同的角度进行分析和思考,并借助不同的方法进行求解.

**例 3** 下面所列的是求  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  中最大值及序号的算法,请将该算法补充完整.

①  $M \leftarrow x_1, k \leftarrow 1$ ;

② 如果  $M < x_2$ , 则 \_\_\_\_\_,  $k \leftarrow 2$ ;

③ 如果  $M < x_3$ , 则  $M \leftarrow x_3$ ; \_\_\_\_\_;

④ \_\_\_\_\_;

⑤ \_\_\_\_\_;

⑥ 输出最大值  $M$  和序号  $k$ , 结束计算.

**点拨** 通过比较的方式,如果变量  $x_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$  较大,则赋给  $M$ ,将五个变量都进行比较,则问题得到解决.

**解答** ②  $M \leftarrow x_2$ ; ③  $k \leftarrow 3$ ; ④ 如果  $M < x_4$ , 则  $M \leftarrow x_4, k \leftarrow 4$ ; ⑤ 如果  $M < x_5$ , 则  $M \leftarrow x_5, M \leftarrow 5$ .

**反思** 通过判断语句和顺序语句的结合,逐次进行比较.

**例 4** 下面所列的是例 3 中的简化算法,请在空格上填上合适的内容.

①  $M \leftarrow x_1, k \leftarrow 1, n \leftarrow 2$ ;

② 如果  $M < x_n$ , 则 \_\_\_\_\_;

③  $n \leftarrow n + 1$ ;

④ 如果 \_\_\_\_\_, 则返回②; 否则, 输出最大值  $M$  和序号  $k$ , 结束计算.

**点拨** 问题的本质仍然是比较大小和赋值, 不同的是可以通过循环语句避免算法的重复.

**解答** ②  $M \leftarrow x_n, k \leftarrow n$ ; ④  $n \leq 5$ .

**反思** 循环语句将重复的算法结构进行简化, 并且在多次循环上有较大优势.

### 3. 冒泡法

冒泡法即冒泡排序, 是一种计算机科学领域的较简单的排序算法. 它重复地走访要排序的数列, 一次比较两个元素, 如果它们的顺序错误就把它交换过来. 走访数列的工作是重复地进行直到不再需要交换, 也就是说该数列已经排序完成.

**例 5** 写出将  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  按由小到大顺序排列的一种算法.

**点拨** 将“ $n$ 个数中的最大数  $M$  及其序号  $k$ ”的算法记为  $(M, k) = \max(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ .

求出  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  中的最大值与  $x_6$  互换; 再求出  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  中的最大值与  $x_5$  互换; 依此类推.

**解答** ①  $n \leftarrow 6$ ;

② 求得  $(M, k) = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;

③  $x_k \leftarrow x_n, x_n \leftarrow M$ ;

④  $n \leftarrow n - 1$ ;

⑤ 如果  $n \geq 2$ , 返回②; 否则, 输出  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  并结束运算.

**反思** 步骤③中,  $x_k \leftarrow x_n, x_n \leftarrow M$  就可以实现最大值与  $x_n$  的互换, 顺序不能颠倒; 如果按  $x_n \leftarrow M, x_k \leftarrow x_n$  顺序执行,  $x_n$  的值就消失了, 这样就出现了逻辑上的错误.

## 易错解读


**例 6** 一个完整的程序框图至少包含( ).

- A. 终端框和输入、输出框
- B. 终端框和处理框
- C. 终端框和判断框
- D. 终端框、处理框和输入、输出框

**解答** A

**易错点** 一个完整的程序框图至少需包括终端框和输入、输出框. 对于处理框, 由于输出框含有计算功能, 所以可不必有.

**例 7** 下列说法正确的是 \_\_\_\_\_ (填序号).

- ①程序框图中的图形符号可以由个人来确定；  
 ②  也可以用来执行计算语句；  
 ③输入框只能紧接在起始框之后；  
 ④程序框图一般按从上到下、从左到右的方向画；  
 ⑤判断框是具有超出一个退出点的唯一符号.

**解答** ④⑤

**易错点** 由于画程序框图要使用标准的程序框符号,故①错;由于判断框的功能是判断某一条件是否成立,故②错;③错,④⑤正确.

### 经典训练

1. 下列算法:① $z \leftarrow x$ ;② $x \leftarrow y$ ;③ $y \leftarrow z$ ;④输出  $x, y$ . 这个算法的作用是\_\_\_\_\_.
2. 算法的三种基本结构是\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_.
3. 计算机是将信息转换成二进制进行处理的,二进制即“逢二进一”,如 $(1101)_2$ 表示二进制数,将它转换成十进制形式,是 $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 13$ ,那么二进制数 $\underbrace{111 \cdots 1}_{16}$ 转换成十进制的形式是\_\_\_\_\_.

16

4. 用二分法求方程  $x^2 - 2 = 0$  的近似根的算法中要用哪种算法结构? ( ).  
 A. 顺序结构            B. 条件结构            C. 循环结构            D. 以上都用
5. 给出以下四个问题:  
 ①给出  $x$ , 输出它的相反数;  
 ②求面积为 6 的正方形的周长;  
 ③求三个数  $a, b, c$  中的最大数;  
 ④求函数  $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 0 \\ x+2, & x < 0 \end{cases}$  的函数值.
- 其中不需要用条件语句来描述其算法的有( ).  
 A. 1 个            B. 2 个            C. 3 个            D. 4 个
6. 写出交换两个大小相同的杯子中的液体(A 杯子中装水、B 杯子中装酒)的一个算法.

7. 已知一个三角形的三边边长为  $a, b, c$ , 则三角形的面积为  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  (其中  $p = \frac{a+b+c}{2}$ ), 这个公式被称为海伦—秦九韶公式. 利用海伦—秦九韶公式设计一个算法, 画出算法的程序框图, 并求出三边边长分别为 5, 6, 7 的三角形的面积.

8. 对于斐波那契数列:  $f_1 = 1, f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} (n \geq 3)$ , 写出计算  $f_{20}$  和前 20 项和  $S_{20}$  的算法.

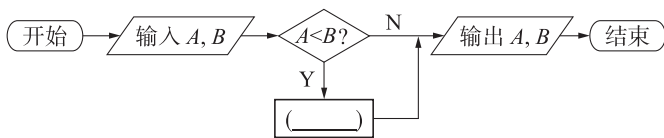
## 1.2 程序框图

一个完整的程序框图应该有一个起始框,至少有一个结束框.有了顺序结构、条件结构和循环结构的程序框图,我们就可以比较完整地构建算法的程序框图.

### 方法简述

#### 1. 运用定义

**例 1** 下面的程序框图的作用是按大小顺序输出两数,则括号处的处理可以是( ).



例 1 图

A.  $A \leftarrow B; B \leftarrow A$

B.  $T \leftarrow B; B \leftarrow A; A \leftarrow T$

C.  $T \leftarrow B; A \leftarrow T; B \leftarrow A$

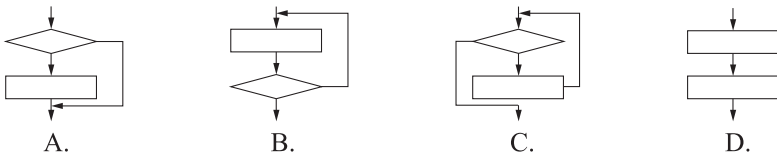
D.  $A \leftarrow B; T \leftarrow A; B \leftarrow T$

**点拨** 按照题目所给出的算法框图,可知在括号处所需进行的处理是将  $A, B$  两数的位置互换.那么后一步输出  $A, B$  的时候仍然是按从大到小的顺序输出.

**解答** B

**反思** 读懂程序框图的意义.

**例 2** 下列的流程图示中表示顺序结构的是( ).



**点拨** 顺序结构的特点就是没有任何的分支,一通到底.

**解答** D

**反思** 考查顺序结构、条件结构、循环结构三种基本算法结构的框图表示.

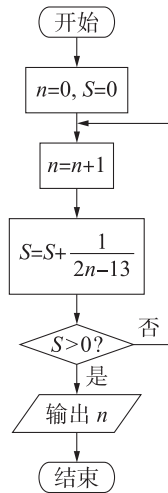
#### 2. 等价转换

**例 3** 如图所示,求输出的结果  $n$ .

**点拨** 本题只需读懂程序框图,将所需求和的数列通项找到就能迎刃而解.

**解答**  $S = \frac{1}{2 \times 1 - 13} + \frac{1}{2 \times 2 - 13} + \dots + \frac{1}{2 \times 13 - 13} = \frac{1}{13} > 0$ , 所以完成第 12 次循环体后  $S$  变为大于 0, 之前每次都满足  $S < 0$ , 所以输出的  $n = 13$ .

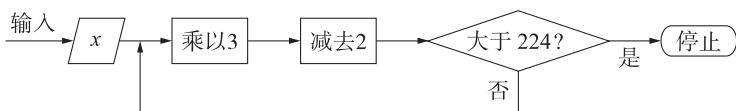
**反思** 本题考查对程序框图的理解能力与数列求和的基本素养.



例 3 图



**例7** 按如图所示程序框图运算：



例7图

规定：程序运行到“判断结果是否大于 224”为一次运算，若  $x=5$ ，则运算进行( )次才停止。

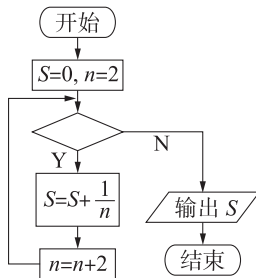
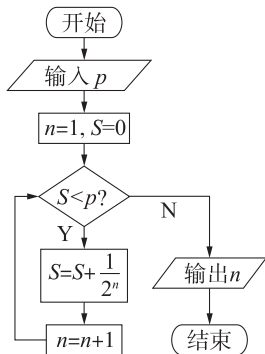
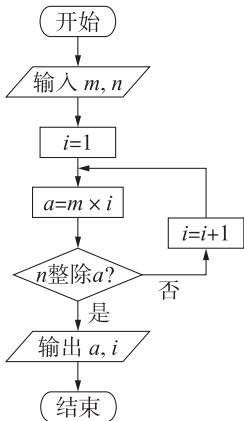
- A. 3 次                      B. 4 次                      C. 5 次                      D. 6 次

**解答** B

**易错点** 循环次数的计算.

**经典训练**

1. 阅读如图所示的程序框图，若输入  $m=4, n=6$ ，则输出  $a=$  \_\_\_\_\_,  $i=$  \_\_\_\_\_.

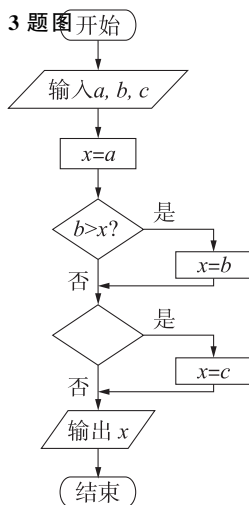


2. 执行如第1题图所示的程序框图，若  $p=0$ ，则输出的  $n=$  \_\_\_\_\_.

3. 如图所示，图中给出的是计算  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100}$  的值的一个程序框图，其中判断框内应填入的条件是 \_\_\_\_\_.

4. 如图所示的程序框图，如果输入三个实数  $a, b, c$ ，要求输出这三个数中最大的数，那么在空白的判断框中，应该填入下列四个选项中的( ).

- A.  $c > x$ ?  
 B.  $x > c$ ?  
 C.  $c > b$ ?  
 D.  $b > c$ ?



第4题图

5. 如果学生的成绩大于或等于 90 分,则输出“优秀”;如果低于 90 分且大于或等于 60 分,则输出“合格”;如果低于 60 分,则输出“不及格”.用程序框图表示这一算法.

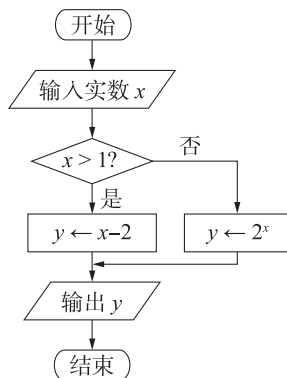
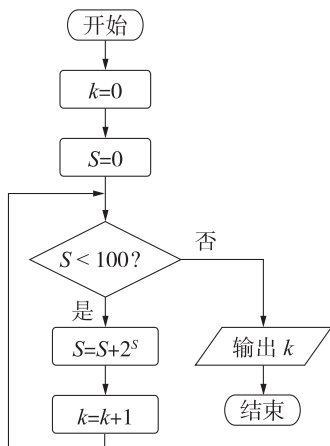
6. 画出求实系数一元二次方程  $ax^2+bx+c=0(a,b,c\in\mathbf{R})$  的根的程序框图.

7. 给定一个年份,写出  $x$  年是不是闰年的算法、程序框图.



**解答** 对于  $k=0, S=1, \therefore k=1$ ; 而对于  $k=1, S=3, \therefore k=2$ ; 则  $k=2, S=3+8, \therefore k=3$ ;  $k=3, S=3+8+2^{11}, \therefore k=4$ . 不符合条件时输出的  $k=4$ , 故选 A.

**反思** 求的是输出  $k$  的值.



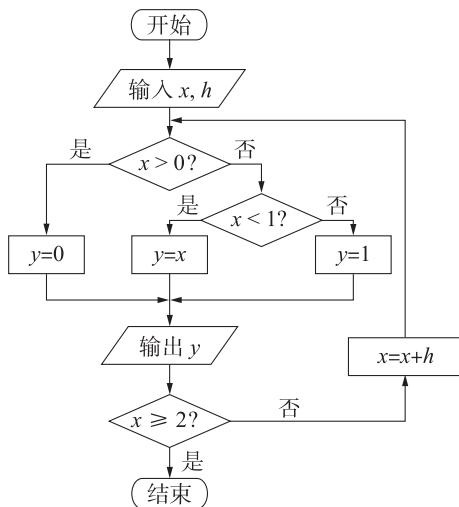
**例 4** 某算法的程序框图如图所示, 则输出量  $y$  与输入量  $x$  满足的关系式是 \_\_\_\_\_.

**点拨** 注意赋值条件.

**解答**  $y = \begin{cases} 2^x, & x \leq 1, \\ x-2, & x > 1. \end{cases}$

**反思** 注意循环终止条件.

**例 5** 如果执行如图所示的程序框图, 输入  $x=-2, h=0.5$ , 那么输出的各个数的和等于( ).



A. 3

B. 3.5

**例 5 图** C. 4

D. 4.5

**点拨** 注意多个循环体结构.

**解答** B

**反思** 不同循环体结束的条件.

**例 6** 某店一个月的收入和支出总共记录了  $N$  个数

