

何辉

字镠瑞，学者、文学家，跨界创作人、数字爱好者和业余研究者，著述涉及诸多领域，长期从事创造性思维研究和探索。

主要学术代表作有：《创意思维：关于创造的思考》《宋代消费史：消费与一个王朝的盛衰》《龙影：西方世界中国观念的思想渊源》《广告学教程》《广告文案》《广告创作与分析》等，文学代表作有长篇历史小说《大宋王朝·沉重的黄袍》《大宋王朝·大地棋局》《大宋王朝·天下布武》《大宋王朝·鏖战潞泽》《大宋王朝·王国的命运》等，该系列长篇历史小说被读者誉为开创了当代历史小说中的“新史家小说流”；《长征史诗》亦是作者文学代表作之一。另有文集《镠瑞集》《镠瑞续集甲集》等。《数学宝盒》一书是作者为数学入门者培养数学思维而撰写的数学科普性读物。

图书在版编目 (CIP) 数据

数学宝盒：从入门开始培养数学思维/何辉著.
—成都：四川人民出版社，2019. 2
ISBN 978-7-220-11086-3

I. ①数… II. ①何… III. ①数学—儿童读物
IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 244557 号

SHUXUE BAOHE: CONGRUMEN KAISHI PEIYANG SHUXUE SIWEI

数学宝盒：从入门开始培养数学思维
何 辉 著

选题策划
特约编辑
责任编辑
封面设计
内文设计
责任校对
责任印制

吴 浩
谭芙蓉
李淑云
张 妮
张 妮
韩 华
祝 健

出版发行
网 址

四川人民出版社（成都槐树街2号）

E-mail

<http://www.scpph.com>

新浪微博

scrmcbs@sina.com

微信公众号

@四川人民出版社

发行部业务电话

四川人民出版社

照盗版举报电话

(028) 86259624 86259453

排 版

(028) 86259624

印 刷

四川胜翔数码印务设计有限公司

成品尺寸

四川机投印务有限公司

印 张

145mm×210mm

字 数

5.25

版 次

110千

印 次

2019年2月第1版

书 号

2019年2月第1次印刷

定 价

ISBN 978-7-220-11086-3

28.00元

■ 版权所有·侵权必究

本书若出现印装质量问题，请与我社发行部联系调换
电话：(028) 86259453

序

思想是宇宙的真子集吗？

几年前的某一天，我的脑海中冒出了这样一个问题。对于这个问题，我至今也未找到答案。这个问题，似乎是一个哲学问题，其中包含一个数学概念，还有一个物理概念，因此，似乎也像是一个数学问题或一个物理问题。

在此，我并不想回答这个问题。或许，思想是一个非集合，宇宙也是一个非集合。将这个问题摆在读者面前，是试图借这个问题，揭示（也许说：“暗示”更为合适）实在世界（如宇宙）、数学世界（真子集这一概念就属于数学世界）和思想世界（或者说想象世界）之间存在的神秘联系。

在说明数学世界、思想世界及实在世界之间具有的这种神秘的联系时，我常常会有用一数学概念——如“射影”、“反函数”等——来作比喻的冲动，比如：数学世界仿佛是实在之中的美与秩序在思想世界之中的“射影”；数学世界与实在之中的美与秩序之间仿佛有一种互为“逆函

数”的关系。

如果数学是通往实在的一种手段，我们就可利用数学去探索、去发现、去理解实在中包含的美与秩序。我们对数学的运用，就仿佛是将实在中的美与秩序“反照”到我们的思想之中。在我们运用数学进行思想的过程，我们的思维也有机会去靠近美与秩序。如果我们把这种思维称为数学思维，那么它一定具有严密、精致、美妙的特征。

撰写这部数学入门小书，是希望学习者（尤其是小孩子）能够从一开始就体会到数学中的美与秩序。

本书不像有些数学书那样设置大量的习题并要求读者进行大量计算（当然解题与计算不是不重要），而是重在讲解数学中的规律，重在培养抽象的数学思维。本书的内容安排，尽量做到深入浅出（随文提及的相关文献往往是比较难的，可供有兴趣者深入研读）、从浅到深、由易到难。书中带“*”的章节较难，“*”越多、难度越大，但初读时可以跳过。

有些数学书入门书让读者觉得太难，往往是因为在该进一步解释的地方，作者想当然地认为很简单，便一笔带过。如此一来，便可能在学习者的思维中，制造出未能打通的“节点”，从而影响学习者数学思维的形成，渐渐磨损学习者对数学学习的兴趣。

本书则尽量在那些看起来似乎简单实际却可能造成理

解困难的环节处，做出更详细的、更透彻的解释，以期在细微之处带给学习者豁然开朗的感觉。

因此，如果读者在为孩子或为自己选购数学入门书的时候，曾经产生这样的困惑——不是觉得太难就是觉得太简单了，那么这部小书或许是一个不错的选择。

本书原来的书名是《数学宝盒：给孩子讲数学》，出版时，改为《数学宝盒：从入门开始培养数学思维》。读者可从原定书名与后来的变更中，看到我撰写此书的最初目的与期望所在。

何辉

2017.9.26



正整数	∕001
0	∕002
自然数	∕003
数的定义***	∕004
负整数	∕011
分数	∕013
有理数	∕015
算术基本规律	∕017
除法	∕025
和，差，积，商和余数	∕027
长除法的运算法则	∕029
分数的加减乘除	∕031
平方	∕034
乘方与开方	∕035

整数的表述	∕038	
记数系统	∕040	
不同于十进制的记数系统的计算方法*		∕047
七进制的加法	∕049	
七进制的乘法	∕050	
二进制加法与乘法	∕052	
整数体系的无穷性	∕054	
数学归纳法	∕055	
算术级数	∕057	
几何级数	∕061	
最前面的 $\oplus n \oplus$ 个自然数的平方和		∕065
数学的创造性成分	∕067	
数论	∕068	
质数(素数)	∕069	

对数***	1074	
最小公倍数	1076	
最大公约数	1077	
互质数	1078	
质数的分布初探	1079	
质数定理***	1081	
函数***	1085	
求最大公约数的欧几里得演算法		1087
同余**	1091	
费马小定理	1095	
连分数	1096	
数的扩张与分类	1099	
引入有理数对于运算规则的意义		1101
有理数的几何诠释	1104	

有理数的大小关系与绝对值	106	
可通约的线段	108	
不可通约线段或无理数	110	
毕达哥拉斯定理	112	
利用毕达哥拉斯定理求两点之间的距离		/
119		
毕达哥拉斯三元数组*	122	
十进制小数和无尽小数	126	
无限循环十进制小数*	136	
极限和无穷几何级数**	141	
无理数的普遍定义**	150	
参考文献	153	

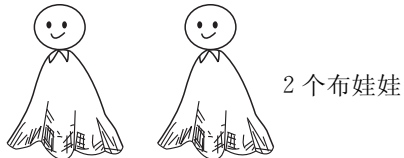
正整数

孩子总是用好奇的眼神看着周围的世界。一个苹果、一块糖、一个布娃娃，很多小东西都会引起他们的兴趣。用一个个可以彼此独立摆放的物体来说明正整数是很容易被孩子理解的。

正整数：1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...

• 1 个点

• • 2 个点



0

“0”这个数字，是可以看作是一个中性数的。它不是正整数，也不是负整数，但它是整数。

通常来说，“0”表示没有。在数学中，“0”可以表示起点、正数与负数的分界点、数轴上的原点、笛卡尔坐标的原点；还可以表示某个数的某一位上一个计数单位也没有，比如608这个数的“十位数”的数位上有数字“0”，0表示这个数位上一个计数单位也没有，或者说是用“0”来“占位”。

据说，“0”这个数学符号是由古印度人发明的，后来传到阿拉伯地区，再后来渐渐被全世界采用了。

自然数

什么是自然数？一般有两种看法。

第一种看法是：自然数包括正整数和 0。

第二种看法是：自然数即正整数。

国际数学界一般认为 0 也是自然数，目前中国中小学数学教材也把 0 视为自然数。

自然界中，物体一般是以整数状态存在的；或者说，自然状态存在的事物一般是用整数来计数的。

苹果总是一个一个自然生长出来的。树上一般不会长出半个苹果来。



1 个苹果

鱼总是一条一条游在水中的。



2 条鱼

数的定义 * * *

斟酌再三，我还是决定要在简单讨论了自然数之后补上“数的定义”这一节内容。严格意义上说，这个问题属于数理哲学范畴，而不属于普通数学范畴。德国数学家、逻辑学家、哲学家弗雷格(☉ *Cottlob Frege*, ☉ 1848 ~ 1925)和英国数学家、逻辑学家、哲学家罗素(☉ (*Bertrand Russell* ☉, 1872 ~ 1921)曾经深入探讨过这一问题。

在回到普通数学之前来讨论数的定义，是因为我相信对这一问题的思考，将有助于数学学习者在数学入门之时便获得一种深刻的启发，从而开拓抽象思维的“世界”，培养数学思维的精密与严密。(这正是本书的写作目的之一。)正如罗素所说：“数学这门学问当我们从它的最熟悉的部分开始时，可以沿着两个相反的方向进行。比较熟悉的方向是构造的，趋向于渐增的复杂，如：从整数到分数，实数，复数；从加法和乘法到微分与积分，以至更高等的数学。至于另一方向对于我们比较生疏，它是由分析我们所肯定的基本概念和命题，而进入愈来愈高的抽象和逻辑的单纯……。”罗素所说的“另一方向”，即是数理哲学或更具

体地说是数学原理的研究方向。

这里所讨论的“数的定义”，实际上是要给看上去最简单易知的自然数(0, 1, 2, 3, …)下定义。这便是在向探究数学原理的方向上前进了。

按照罗素的定义法，“数就是将某些集合($\textcircled{\text{set}}$)，即那些有给定项数的集合，归在一起的方法。我们可以假定所有的对子为一起，所有的三个一组为另一起，如此下去。这样我们得到各种不同的一起一起集合，每一起由给定项数的集合所组成。每一起是一类($\textcircled{\text{Class}}$)，它的分子是集合，也就是类；因此每一起是一个类的类。例如，由所有的对子所组成的一起是一个类的类：因为每一个对子是一个有两个分子的类，所以所有的对子归在一起是一个拥有无穷多个分子的类，其中的每一个分子又是两个分子的类。”（罗素《数理哲学导论》）

罗素的这段话有些费解。其中的“一起”，可以理解为“一个集合”。我建议读者在理解这个问题时，发挥想象力，将宇宙中的一切事物作为思考的对象。

下面我从“对子”入手来解释罗素关于数的定义。毫无疑问，下面的两个三角形可以视为一个对子。



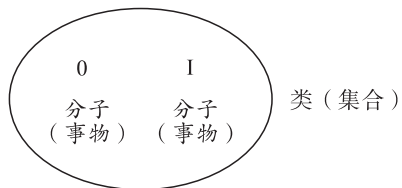
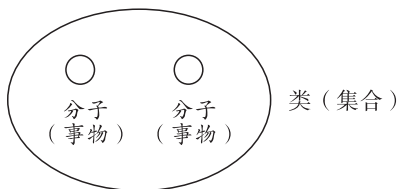
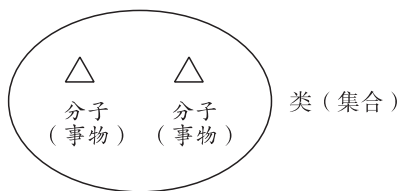
两个圆也可结成一个对子。



值得强调的是，如果我们将 0、1 视为两个事物，而先不视为数，那么 0、1 也可结成一个对子。

0 1

我们可以想象，宇宙中有无穷多个事物可结成无穷多个对子。按罗素的逻辑，我们可以把每一个对子视为是一个有两个分子的类或集合。这样的每一个类或集合包含两个分子，或者说给定了两个项数。可用示意图表示如下：



...

这样的对子有无穷多个。

接下来，我们将所有的对子组成一个类(集合)，或者说组成一个类(集合)的类(集合)。这样实际上出现了两个层

级的类(集合). 为了便于读者理解, 我将所有对子组成的类(集合)称为“二级类(集合)”(注意: 罗素从未如此称呼类(集合), 不过我相信罗素的表述中包含了这层意思), 以区别于由两个分子组成的对子这样的“类(集合)”——我将称之为“一级类(集合)”.

如此一来, 我们可以用下面的示意图来说明罗素关于数的定义.

下图(见下页)可以用文字表述为: 所有的对子的类(即我所说的“二级类”)乃是数 2. 其中每个对子(即我所说的“一级类”)有两个分子(事物), 或者说项数都是 2. 用罗素的话说: “所谓数就是某一个类的数.” 下页图示意的就是由所有对子组成的类的数, 即数 2.

按照这种逻辑给数 0 下定义, 数 0 就是一起包含那些没有分子的类的类; 而数 1 就是一起包含一切只有一个分子的类的类. 这就是罗素用来定义数 0, 数 1 的方法.

理解了罗素关于数的定义的思想, 再去理解现代数学的集合论就会容易得多. 按照现代数学接受的集合的古典定义, 集合是一些事物的全体. 或者说, 若一个类本身是一个新类中的元素, 这个类称为集合. 一些事物的全体叫作一个集合, 这些事物中的每一个, 都称为这个集合的元素. 如果某种事物不存在, 就称这种事物的全体是空集. 规定任何空集都只是同一个集合, 记作 \emptyset . 任何事物都不是