丛书策划：方旭

湘教考苑

总复习系列丛书

湘教考苑

2016 新课标

高考总复习（第二轮）

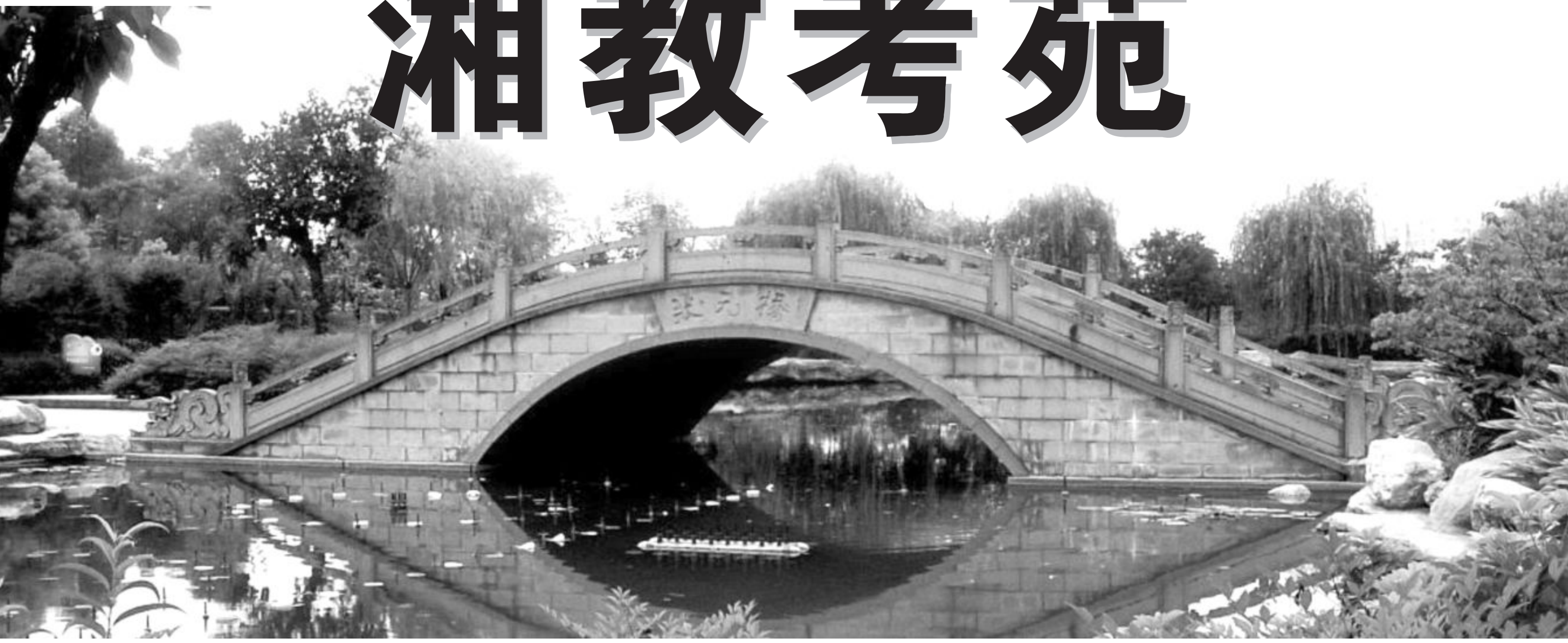
XIANGJIAO KAOYUAN GAOKAO ZONGFUXI

数学（理科）

本书编写组　编

湖南教育出版社

湘教考苑



高考总复习（第二轮）

数学

理科

本书编写组 编

丛书策划： 方　旭

主　　编： 陈　瑜　余天锡

副 主 编： 黄信璋　何新良　钟存益　陆　斌

编　　委： 胡瑞生　余　春　何新良　杨　琼
李燎原　王培玉

湖南教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

湘教考苑．高考总复习．第二轮．数学．理科 /《湘教考苑》编写组编．—— 长沙：湖南教育出版社，2015．12

ISBN 978－7－5539－2939－2

Ⅰ．①湘… Ⅱ．①湘… Ⅲ．①中学数学课－高中－升学参考资料 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 266742 号

湘 教 考 苑

高考总复习（第二轮）

数　学
理科

本书编写组　编

责任编辑： 钟劲松
出版发行： 湖南教育出版社（长沙市韶山北路 443 号）
网　　址： http://www.hneph.com
电子邮箱： 228411705@qq.com　**微信号：** 多点学习
客　　服： 电话 0731－85486742　QQ 228411705
总 经 销： 湖南省新华书店经销
印刷装订： 湖南天闻新华印务有限公司印制
开　　本： 890×1240　1/16
印　　张： 18
字　　数： 742 000
版　　次： 2015 年 12 月第 1 版第 1 次印刷
书　　号： ISBN 978－7－5539－2939－2
定　　价： 49.80 元

无需言，做自己

漫漫人生路，有鲜花，有阻挡；有批评，有颂扬；有疯狂嚣张，也有彷徨迷茫。是什么一直照亮前行的方向？你听，心灵告诉我们：无需言，做自己。

多少次我们面对事情很迷茫，多少次我们在众说纷纭中乱了方向。这时，心灵总会提醒我们：无需言，做自己。做自己需要勇气，你是否敢于面对外人的冷眼旁观？你是否勇于展现自己？做自己需要耐力，你能否忍住外界的冷嘲热讽？你能否耐住寂寞，坚守自我？人生如一条船，勇气做帆，耐力做桨，方可乘风破浪；人生如一坛酒，勇气去酝酿，耐力去贮藏，方可醇厚芳香。

曾经我们在黑暗中处处碰壁，曾经我们无数次跌倒又爬起，这时心灵总会温柔地说：无需言，做自己。坚强些，勇敢地面对探索路上的困难；乐观些，用微笑去征服人生路上的挫折。你看，那荆棘满路中藏着的怒放的玫瑰，是上帝给成功者最美的礼物。善于发现并改正自己的错误，你就会在一点一滴中进步。善于总结经验和吸取教训，你就会在磨炼中日益成熟。加油，要坚强！笑看风霜雨雪，去争取绚丽的雨后彩虹。当你自信满满、顶天立地做自己时，你就会发现，所有的泪水、汗水通通化为美丽的珍珠。

有时成功的先例难以模仿，不要恼火，不用慌张，心灵的开导会带给你无穷的力量：无需言，做自己。借鉴只是方法，而独创才是目的。博采众家之长，补己之短，才能走向完美。拘泥于模仿，毫无创新，只能是身陷其中，举步维艰。学习与模仿都只是引子，开阔你的视野，如果没有自我创新，哪有发展与未来？仰慕成功最可行的途径是学习前人成功的方法。有了好方法，创新就会如鱼得水般畅快。

有时创新的萌芽容易被扼杀，那是因为外界对新事物的认识需要时间。无需言，做自己。时间将是最公正的裁判，先进的事物会渡过时间的长河，日益显露；落后的事物却只能葬身于时间的惊涛骇浪，永远沉寂。人们往往乐于发表对新事物的看法，但这些意见与建议是对是错只有你自己最清楚。择优而从，取其精华，创新才能逐渐进步。

自信地走下去，勇敢地坚持住，当一切泪水化为欢笑，当所有的付出都得到回报，你就会发觉“无需言，做自己”有多么重要。做自己，让迷途的心灵之船找回正确的航向；做自己，让风雨中的心灵之花永远顽强地绽放；做自己，让我们一步步走向成功，迈向辉煌。

CONTENTS 目录

CONTENTS 目录

专题冲刺训练

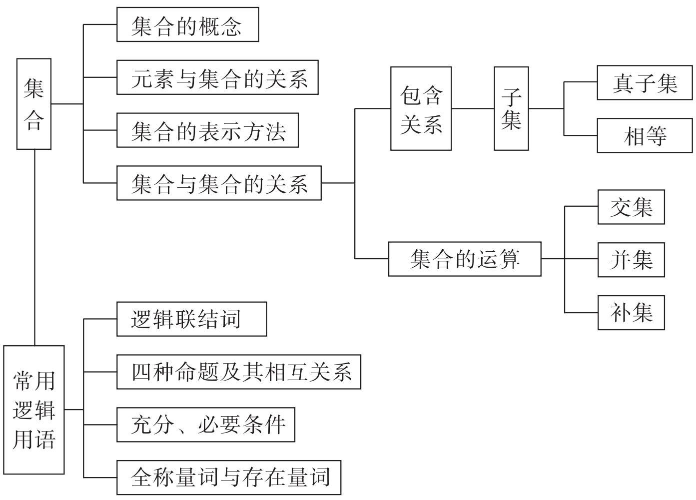
题型突破训练

考前特训

第一编　专题精讲

专题一　集合与常用逻辑用语

知能构建



核心自检

1. 常用数集的专用符号

自然数集__①__，正整数集__②__，整数集__③__，有理数集__④__，实数集__⑤__.

2. 集合的关系

(1)集合与元素的关系

如果 a 是集合 A 的元素，那么可表示为__⑥__；

如果 a 不是集合 A 的元素，那么可表示为__⑦__.

(2)集合与集合的关系

若 A 是 B 的子集，则可表示为__⑧__；

若 A 是 B 的真子集，则可表示为__⑨__.

(3)集合相等

定义：如果两个集合中的元素完全相同，则两集合__⑩__；

表示方法：集合 A 与集合 B 相等可表示为__⑪__；

如果集合 A 与集合 B 满足 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 A 与 B__⑫__.

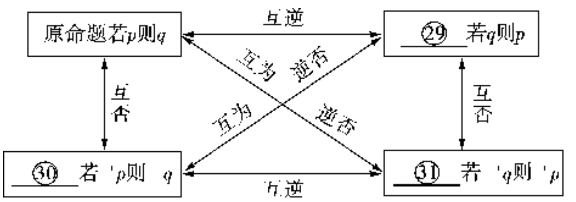
3. 集合 A 和 B 的交集是指__⑬__，用符号表示为__⑭__，用描述法表示为__⑮__，用 Venn 图表示为__⑯__.

4. 集合 A 和 B 的并集是指__⑰__，用符号表示为__⑱__，用描述法表示为__⑲__，用 Venn 图表示为__⑳__.

5. 设集合 I 为全集，集合 A 是它的一个子集，A 的补集是指__㉑__，用符号表示为__㉒__，用描述表示为__㉓__，用 Venn 图表示为__㉔__.

6. $A\cap B=A\Leftrightarrow$__㉕__，$A\cup B=A\Leftrightarrow$__㉖__，$\complement_I(A\cap B)$__㉗__$(\complement_I A)\cup(\complement_I B)$，$\complement_I(A\cup B)$__㉘__$(\complement_I A)\cap(\complement_I B)$.

7. 四种命题及其关系



8. 充分条件与必要条件

(1)如果 $p\Rightarrow q$,则 p 是 q 的__㉜__,q 是 p 的__㉝__;

(2)如果 $p\Rightarrow q$,$q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的__㉞__.

9. 逻辑联结词

命题中的__㉟__、__㊱__、__㊲__叫逻辑联结词.

命题 $p\wedge q$,$p\vee q$,$\neg p$ 的真假判断

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\neg p$
真	真	㊳	㊴	㊵
真	假	㊶	㊷	㊸
假	真	㊹	㊺	㊻
假	假	㊼	㊽	㊾

10. 全称量词

(1)短语"所有的""任意一个"在逻辑中通常叫做__㊿__,并用符号__(51)__表示.

(2)__(52)__的命题,叫做全称命题.

(3)全称命题"对 M 中任意一个 x,有 $p(x)$ 成立"可用符号简记为:__(53)__,读作:"__(54)__".

11. 存在量词

(1)短语"存在一个""至少有一个"在逻辑中通常叫做__(55)__,并用符号__(56)__表示.

(2)__(57)__的命题,叫做特称命题.

(3)特称命题"存在 M 中的一个 x_0,使 $p(x_0)$ 成立"可用符号简记为:__(58)__,读作:"__(59)__".

12. 含有一个量词的命题的否定

命题	命题的否定
$\forall x\in M,p(x)$	(60)
$\exists x_0\in M,p(x_0)$	(61)

核心考点

考点一 集合及其运算

考点精析

1. 集合的元素具有确定性、互异性、无序性,在求解集合问题时,要特别注意这三个性质在解题中的应用. 即在分析问题时,要看能否利用"三性"找到解题的切入点;题目解答出来后,再检验其元素是否满足"三性".

2. 含参数的集合问题是本部分的一个重要考向,解题时应根据集合元素的互异性多挖掘题目中的隐含条件,并注意分类讨论思想、数形结合思想在解题中的运用.

3. 集合问题多与函数、方程、不等式等知识联系在一起,因此要注意不同知识之间的融会贯通,要善于从函数、方程、不等式的角度去理解用描述法表示的集合,从而借助函数、方程、不等式的知识与方法去解决问题.

4. 在解题中要特别注意空集的特殊性,它往往导致我们在解题中出现错误,所以要善于总结空集在解题中的特殊性,避免因忽视空集而出现错误.

例 1-1 (**2015·北京卷**)若集合 $A=\{x\mid -5<x<2\}$,$B=\{x\mid -3<x<3\}$,则 $A\cap B=$ ( )

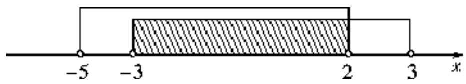
A. $\{x\mid -3<x<2\}$　　B. $\{x\mid -5<x<2\}$

C. $\{x\mid -3<x<3\}$　　D. $\{x\mid -5<x<3\}$

考点:集合的交集运算.

分析:集合 A、B 已知,直接在数轴上将集合 A、B 表示出来,数形结合求出 $A\cap B$.

解析:在数轴上将集合 A、B 表示出来,如图所示.



由交集的定义可得,$A\cap B$ 为图中阴影部分,

即 $\{x\mid -3<x<2\}$.

答案:A

点评:本题主要考查了集合的交集运算,利用数轴进行集合的交、并、补运算是常用方法.

例 1-2 (**2015·陕西卷**)设集合 $M=\{x\mid x^2=x\}$,$N=\{x\mid \lg x\leqslant 0\}$,则 $M\cup N=$ ( )

A. $[0,1]$　　B. $(0,1]$

C. $[0,1)$　　D. $(-\infty,1]$

考点:并集及其运算.

分析:分别求出集合 M、N 的元素,利用集合的基本运算即可得到结论.

解析:$M=\{x\mid x^2=x\}=\{0,1\}$,

$N=\{x\mid \lg x\leqslant 0\}=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$,

所以 $M\cup N=[0,1]$,故选 A.

答案:A

点评:本题主要考查集合的基本运算,利用条件求出集合 M、N 是解决本题的关键.

例 1-3 已知 M,N 为集合 I 的非空真子集,且 M,N 不相等,若 $N\cap \complement_I M=\varnothing$,则 $M\cup N=$ ( )

A. M　　B. N

C. I　　D. $\varnothing$

考点：集合间的关系.

分析：本题可利用韦恩图解决，由题可知 N 是 M 的真子集.

解析：由 $N\cap \complement_I M=\varnothing$，作韦恩图可知 $N\subseteq M$，则$M\cup N=M$，故选 A.

答案：A

点评：本题主要考查集合间的关系，用韦恩图可直观解决.

例 1－4（**2014·长沙二模**）若三个非零且互不相等的实数 a、b、c 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}$，则称 a、b、c 是调和的；若满足 $a+c=2b$，则称 a、b、c 是等差的. 若集合 P 中元素 a、b、c 既是调和的，又是等差的，则称集合 P 为“好集”. 若集合 $M=\{x\mid |x|\leqslant 2\ 014, x\in \mathbf{Z}\}$，集合 $P=\{a,b,c\}\subseteq M$. 则：

(1)“好集”P 中的元素最大值为________；

(2)“好集”P 的个数为________.

考点：元素与集合关系的判断.

分析：(1)根据“好集”的定义，可解关于 a,b,c 的方程组，用 b 把另外两个元素表示出来，再根据“集合 $M=\{x\mid |x|\leqslant 2\ 014, x\in \mathbf{Z}\}$，集合 $P=\{a,b,c\}\subseteq M$”构造出关于 b 的不等式，求出 P 中最大的元素.

(2)结合第一问的结果，因为 b 是整数，可以求出 b 的最大值，从而确定 P 的个数.

解析：(1)$\because \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}$，且 $a+c=2b$，

$\therefore (a-b)(a+2b)=0$，

$\therefore a=b$(舍)，或 $a=-2b$，$\therefore c=4b$.

令 $-2\ 014\leqslant 4b\leqslant 2\ 014$，得 $-503\leqslant b\leqslant 503$，

$\therefore P$ 中最大元素为 $4b=4\times 503=2\ 012$.

(2)由(1)知 $P=\{-2b,b,4b\}$，且 $-503\leqslant b\leqslant 503$，

$\therefore$“好集”P 的个数为 $2\times 503=1\ 006$.

答案：(1)2 012　(2)1 006

点评：这是一道新定义题，关键是理解好题意，将问题转化为方程(组)或不等式问题，则问题迎刃而解.

规律总结

由上述例题可知，对于集合问题的考查，其命题规律如下：

1. 直接送分型：直接给出具体集合(即给出集合元素的集合)，求其交、并、补集运算，或判断其集合间关系，或求其子集的个数. 由于这类问题比较简单，解答这类问题只需准确把握基本知识和基本方法，即可拿满分，如例 1－1.

2. 具体综合型：求具体集合的交、并、补运算，或判断其集合间关系，或求其子集的个数问题，但在给出具体集合时，不是直接给出，而是用描述法给出，在描述集合元素所具有属性时，往往涉及到不等式，函数与方程等知识，如例 1－2.

3. 抽象集合型：没有给出集合的具体元素，只给出一些性质，如例 1－3.

4. 新定义集合型：给出新定义，结合集合的相应知识进行求解. 如例 1－4.

对策：对于直接送分型问题，准确把握基本知识和方法，注意查漏补缺即可. 作为二轮复习，我们需要重点关注和重点突破的是后面三种类型.

变式训练

【1－1】(**2014·福建卷**)已知集合$\{a,b,c\}=\{0,1,2\}$，且下列三个关系：①$a\neq 2$；②$b=2$；③$c\neq 0$ 有且只有一个正确，则 $100a+10b+c$ 等于__________.

【1－2】(**2015·广东卷**)若集合 $E=\{(p,q,r,s)\mid 0\leqslant p<s\leqslant 4, 0\leqslant q<s\leqslant 4, 0\leqslant r<s\leqslant 4$ 且 $p,q,r,s\in \mathbf{N}\}$，$F=\{(t,u,v,w)\mid 0\leqslant t<u\leqslant 4, 0\leqslant v<w\leqslant 4$ 且 $t,u,v,w\in \mathbf{N}\}$，用 card(X)表示集合 X 中的元素个数，则 card(E)＋card(F)＝　　(　　)

A. 50　　B. 100

C. 150　　D. 200

【1－3】(**2014·余姚模拟**)对于函数$f(x)$，若存在区间 $A=[m,n]$，使得$\{y\mid y=f(x), x\in A\}=A$，则称函数$f(x)$为“和谐函数”，区间 A 为函数$f(x)$的一个“和谐区间”. 给出下列 4 个函数：

①$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$；②$f(x)=2x^2-1$；

③$f(x)=|2^x-1|$；④$f(x)=\ln(x+1)$.

其中存在唯一“和谐区间”的“和谐函数”为　　(　　)

A. ①②③　　B. ②③④

C. ①③　　D. ②③

考点二　常用逻辑用语

考点精析

1. 在判断命题真假时，一方面可以直接写出命题对其进行判断，也可以通过命题之间的等价性进行判断，例如：原命题和逆否命题等价、否命题和逆命题等价.

2. 要熟练掌握全称命题和特称命题的否定的写法. 对于全称命题 p：$\forall x\in M, p(x)$，其否定是 $\neg p$：$\exists x_0\in M, \neg p(x_0)$；而对于特称命题 q：$\exists x_0\in M, p(x_0)$，其否定是 $\neg q$：$\forall x\in M, \neg p(x)$.

3. 充分必要条件的判断是本考点的一个重要考向，在解题中应注意：

(1)问题的设问方式,我们知道:①A 是 B 的充分不必要条件是指:$A\Rightarrow B$ 且 $B\nRightarrow A$;②A 的充分不必要条件是 B 是指:$B\Rightarrow A$ 且 $A\nRightarrow B$.这两种说法在充分必要条件的推理判断中经常出现且容易混淆,在解题中一定要注意问题的设问方法,看清它们的区别,以免判断错误.

(2)要善于举出反例,在充分必要条件的推理判断中经常需要我们对一个命题的正确或错误(尤其是错误)作出判断或证明,而直接从正面论证往往不易进行,这时我们可以通过举出恰当的反例来说明一个命题是错误的,这是一个简单有效的办法.

(3)当所要判断的命题与方程的根、不等式的解以及集合有关,或所描述的对象可以用集合表示时,我们可以借助集合间的包含关系进行充分必要条件的判定.

(4)恰当地进行转化,若 p 是 q 的充分不必要条件,即 $p\Rightarrow q, q\nRightarrow p$,则由原命题与其逆否命题的等价性可知,$\neg q\Rightarrow\neg p,\neg p\nRightarrow\neg q$,所以 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件.

例 2-1 (**2015·浙江卷**)命题“$\forall n\in\mathbf{N}^*, f(n)\in\mathbf{N}^*$,且 $f(n)\leqslant n$”的否定形式是 ( )

A. $\forall n\in\mathbf{N}^*, f(n)\notin\mathbf{N}^*$ 且 $f(n)>n$

B. $\forall n\in\mathbf{N}^*, f(n)\notin\mathbf{N}^*$ 或 $f(n)>n$

C. $\exists n_0\in\mathbf{N}^*, f(n_0)\notin\mathbf{N}^*$ 且 $f(n_0)>n_0$

D. $\exists n_0\in\mathbf{N}^*, f(n_0)\notin\mathbf{N}^*$ 或 $f(n_0)>n_0$

考点:全称命题的否定形式的写法.

分析:直接根据全称命题的否定是特称命题求解.

解析:根据全称命题的否定是特称命题,可知选 D.

答案:D

点评:写全称命题的否定时,要把量词“$\forall$”改为“$\exists$”,并且否定结论,注意把“且”改为“或”.

例 2-2 (**2015·天津卷**)设 $x\in\mathbf{R}$,则“$|x-2|<1$”是“$x^2+x-2>0$”的 ( )

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

考点:绝对值不等式、一元二次不等式的解法以及充分条件、必要条件.

分析:先求出不等式的解集,再根据充分条件、必要条件的判断方法进行判断.

解析:$|x-2|<1\Leftrightarrow -1<x-2<1\Leftrightarrow 1<x<3$,

$x^2+x-2>0\Leftrightarrow x<-2$ 或 $x>1$,

所以“$|x-2|<1$”是“$x^2+x-2>0$”的充分不必要条件,故选 A.

答案:A

点评:本题考查了绝对值不等式、一元二次不等式以及充要条件,属于基础题.

例 2-3 (**2014·长郡**)(1)已知实数集 $A=\{x|a_1x=b_1, a_1b_1\neq 0\}$,$B=\{x|a_2x=b_2, a_2b_2\neq 0\}$,证明:$A=B$ 的充要条件是 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$;

(2)已知实数集 $A=\{x|a_1x^2+b_1x+c_1=0, a_1b_1c_1\neq 0\}$,$B=\{x|a_2x^2+b_2x+c_2=0, a_2b_2c_2\neq 0\}$,问 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ 是 $A=B$ 的什么条件?请给出说明过程.

考点:必要条件、充分条件与充要条件的判断;集合的相等.

分析:(1)根据实数集 $A=\{x|a_1x=b_1, a_1b_1\neq 0\}$,$B=\{x|a_2x=b_2, a_2b_2\neq 0\}$,根据等式的性质,易将 $A=B$ 等价变形,易得 $A=B\Leftrightarrow\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}\Leftrightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$,即 $A=B$ 的充要条件是 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

(2)可以先假定 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$,然后判断 $A=B$ 是否成立,然后再假设 $A=B$ 成立,然后分 A 与 B 是否为空集两种情况进行分类讨论,即可得到结论.

解析:(1)$\because A=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{b_1}{a_1}\right\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{b_2}{a_2}\right\}$,

$\therefore A=B\Leftrightarrow\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}\Leftrightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

$\therefore A=B$ 的充要条件是 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

(2)“$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$”是“$A=B$”的充分不必要条件.

证明:(充分性)

若 $x_0\in A$,即 x_0 是方程 $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ 的解,

则 $a_1x_0^2+b_1x_0+c_1=0$,

而非零实数 a_1, b_1, c_1 和 a_2, b_2, c_2 满足 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$.

设 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=k\neq 0$,

则可得 $k(a_2x_0^2+b_2x_0+c_2)=0$,

所以 $a_2x_0^2+b_2x_0+c_2=0$,

即 x_0 是方程 $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ 的解,

即 $x_0\in B$,

于是 $A\subseteq B$.同理可证 $B\subseteq A$,所以 $A=B$.

必要性不成立,反例:如 $A=B=\varnothing$.

点评:本题考查的知识点是必要条件、充分条件与充要条件的判断,集合的相等等.根据等式的性质,结合集合相等的定义,对集合相等进行等价转化,是解答本题的关键.

规律总结

充要关系的判定问题是本考点的热点问题.一般主要以选择题和填空题的形式进行考查,试题难度不大,但涉及的知识点较多,主要涉及函数、不等式、立体几何、解析几何等内容.预计2016年的高考可能会从以下四个方向进行命题:

(1)以其他知识模块内容为背景,考查充要条件的判断,由于充要条件涉及的知识面比较广,每年的考题背景都会有所变化,多以函数的性质、不等式的性质及其应用、解析几何中的直线与圆、圆锥曲线的位置关系以及空间中的线面关系等为主.

(2)以其他知识模块内容为背景,考查充要条件的探求,尤其要注意逻辑联结词"非"与充要条件相结合的问题.

(3)考查利用条件与结论之间的充要关系求解参数的取值范围.

(4)与新定义问题结合在一起,考查充要条件的判断.

变式训练

【2-1】(**2015·山东潍坊调研**)已知 p:"对任意的 $x\in[2,4]$,有 $\log_2 x-a\geqslant 0$",q:"存在 $x\in\mathbf{R}$,使 $x^2+2ax+2-a=0$".若 p,q 均为命题,而且"p 且 q"是真命题,则实数 a 的取值范围是________.

【2-2】(**2015·无为县模拟**)已知命题 $p:\dfrac{2-x}{2x-1}>1$,命题 $q:x^2+2x+1-m\leqslant 0(m>0)$,若非 p 是非 q 的必要不充分条件,那么实数 m 的取值范围是________.

例 2-4 (**2014·唐山二模**)已知命题 p:函数 $y=e^{|x-1|}$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,q:函数 $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 对称,则下列命题中的真命题为 (　　)

A. $p\wedge q$　　B. $p\wedge\neg q$

C. $\neg p\wedge q$　　D. $\neg p\vee\neg q$

考点:复合命题的真假.

分析:先根据指数函数图象的性质,推断命题 p 的真假,然后根据余弦函数的性质推断命题 q 的真假.

解析:∵函数 $y=e^{|x|}$ 为偶函数,

∴函数 $y=e^{|x|}$ 关于 y 轴对称,

∵函数 $y=e^{|x-1|}$ 的图象由函数 $y=e^{|x|}$ 的图象向右平移一个单位得到.

∴函数 $y=e^{|x-1|}$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,

∴命题 p 为真命题.

令 $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$,

即 $2x+\dfrac{\pi}{6}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

求得 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}$.

当 $k=0$ 时,$x=\dfrac{\pi}{6}$,

∴点 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 为 $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象的对称点,

∴命题 q 为真命题.

∴$p\wedge q$ 为真命题,$p\wedge\neg q$ 为假命题,$\neg p\wedge q$ 为假命题,$\neg p\vee\neg q$ 为假命题.

答案:A

点评:本题主要考查考生对复合命题的理解,关键是正确判断原命题的真假.

例 2-5 (**2013·湖南卷**)设函数 $f(x)=a^x+b^x-c^x$,其中 $c>a>0,c>b>0$.

(1)记集合 $M=\{(a,b,c)\mid a,b,c$ 不能构成一个三角形的三条边长,且 $a=b\}$,则 $(a,b,c)\in M$ 所对应的 $f(x)$ 的零点的取值集合为________.

(2)若 a,b,c 是△ABC 的三条边长,则下列结论正确的是________(写出所有正确结论的序号).

①$\forall x\in(-\infty,1),f(x)>0$;

②$\exists x\in\mathbf{R}$,使 a^x,b^x,c^x 不能构成一个三角形的三条边长;

③若△ABC 为钝角三角形,则 $\exists x\in(1,2)$,使 $f(x)=0$.

考点:命题的真假判断与应用;函数的零点;进行简单的合情推理.

分析:(1)由集合 M 中的元素满足的条件,得到 $c\geqslant a+b=2a$,求得 $\dfrac{c}{a}$ 的范围,解出函数 $f(x)=a^x+b^x-c^x$ 的零点,利用不等式可得零点 x 的取值集合.

(2)对于①,把函数式 $f(x)=a^x+b^x-c^x$ 变形为 $f(x)=a^x+b^x-c^x=c^x\left[\left(\dfrac{a}{c}\right)^x+\left(\dfrac{b}{c}\right)^x-1\right]$,利用指数函数的单调性即可证得结论成立;

对于②,利用取特值法说明命题是正确的;

对于③,由△ABC 为钝角三角形说明 $f(2)<0$,又 $f(1)>0$,由零点的存在性定理可得命题③正确.

解析:(1)因为 $c>a$,且 $c\geqslant a+b=2a$,

所以 $\dfrac{c}{a}\geqslant 2$,则 $\ln\dfrac{c}{a}\geqslant\ln 2>0$.

令 $f(x)=a^x+b^x-c^x=0$,则 $\left(\dfrac{c}{a}\right)^x=2$,

所以 $x=\dfrac{\ln 2}{\ln\dfrac{c}{a}}\leqslant\dfrac{\ln 2}{\ln 2}=1$.

所以 $0<x\leqslant 1$.

(2)①因为 $f(x)=a^x+b^x-c^x=c^x\left[\left(\dfrac{a}{c}\right)^x+\left(\dfrac{b}{c}\right)^x-1\right]$,

又 $\frac{a}{c}<1$，$\frac{b}{c}<1$，

所以对 $\forall x\in(-\infty,1)$，

$\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x-1>\left(\frac{a}{c}\right)^1+\left(\frac{b}{c}\right)^1-1=\frac{a+b-c}{c}>0$.

所以命题①正确.

令 $x=-1$，$a=2$，$b=4$，$c=5$，

则 $a^x=\frac{1}{2}$，$b^x=\frac{1}{4}$，$c^x=\frac{1}{5}$.

由于 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$ 不能构成一个三角形的三条边长，

所以命题②正确.

若三角形为钝角三角形，则 $a^2+b^2-c^2<0$.

因为 $f(1)=a+b-c>0$，$f(2)=a^2+b^2-c^2<0$.

所以 $\exists x\in(1,2)$，使 $f(x)=0$.

所以命题③正确.

答案：(1)$\{x|0<x\leqslant 1\}$　(2)①②③

点评：本题考查了命题真假的判断与应用，考查了函数零点的判断方法，训练了取特值的思想方法. 解答此题的关键是对题意的正确理解，此题是中档题.

规律总结

逻辑联结词和四种命题偶尔出现在高考试题之中，这类问题一般比较简单，只要熟练掌握其基本知识即可顺利过关. 但需要注意的地方是在二轮复习之中，由于强化重点和热点问题，忽视了对这些基本知识的复习，从而形成知识的盲点、造成不必要丢分.

含有一个量词的命题的否定和以量词作语言叙述的工具进行考查是近几年新课标高考的热点之一.

变式训练

【2－3】(2015·全国卷Ⅰ)设命题 p：$\exists n\in\mathbf{N}$，$n^2>2^n$，则 $\neg p$ 为　(　　)

A. $\forall n\in\mathbf{N}$，$n^2>2^n$　　B. $\exists n\in\mathbf{N}$，$n^2\leqslant 2^n$

C. $\forall n\in\mathbf{N}$，$n^2\leqslant 2^n$　　D. $\exists n\in\mathbf{N}$，$n^2=2^n$

【2－4】(2014·辽宁卷)设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是非零向量，已知命题 p：若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$；命题 q：若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$，则下列命题中真命题是　(　　)

A. $p\vee q$　　B. $p\wedge q$

C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D. $p\vee(\neg q)$

误区警示

例 设命题 p：关于 x 的不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集相同；命题 q：$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，则命题 p 是命题 q 的　(　　)

A. 充分但不必要条件

B. 必要但不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

考场错解：因为 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，所以不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 是等价的不等式，解集相同，所以 q 能推出 p；而不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集相同不能得出 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，所以选 B.

专家把脉：因为 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，若 a_1 与 a_2 的符号不同，这时 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集不相同，如 $-x^2+3x-2>0$ 与 $x^2-3x+2>0$，尽管 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=-1$，但它们的解集不相同，所以 q 不能推出 p.

对症下药：因为 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，若 a_1 与 a_2 的符号不同，这时 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集不相同，所以 q 不能推出 p；不等式 $x^2+x+3>0$ 与 $x^2+1>0$ 的解集相同，但 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$，所以 p 不能推出 q，所以选 D.

专家会诊：(1)要理解"充分条件""必要条件"的概念：当"若 p 则 q"形式的命题为真时，就记作 $p\Rightarrow q$，称 p 是 q 的充分条件，同时称 q 是 p 的必要条件，因此判断充分条件或必要条件就归结为判断命题的真假.

(2)要理解"充要条件"的概念，对于符号"$\Leftrightarrow$"要熟悉它的各种同义词语："等价于"，"当且仅当"，"必须且只需"，"……，反之也真"等.

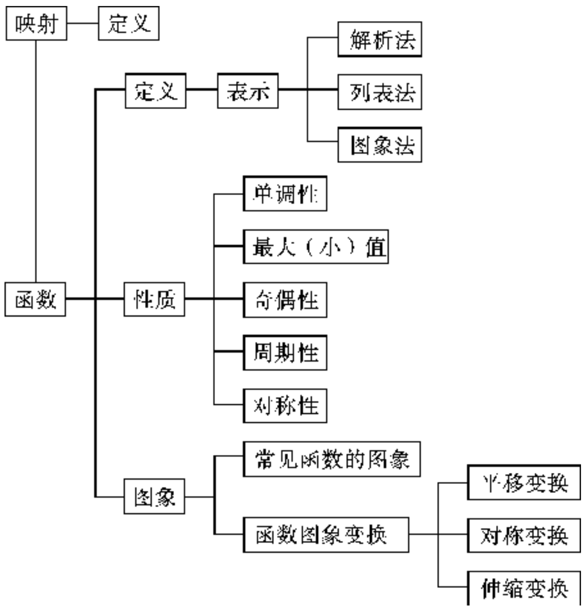
(3)数学概念的定义具有相称性，即数学概念的定义都可以看成是充要条件，既是概念的判断依据，又是概念所具有的性质.

(4)从集合观点看，若 $A\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件；若 $A=B$，则 A、B 互为充要条件.

(5)证明命题条件的充要性时，既要证明原命题成立(即条件的充分性)，又要证明它的逆命题成立(即条件的必要性).

专题二　函数的图象与性质

知能构建



核心自检

1. 函数的三要素：定义域、值域、对应关系

两个函数当且仅当它们的三要素完全相同时才表示__①__函数，定义域和对应关系相同的两个函数是同一函数.

2. 函数的单调性

(1)单调性的定义的等价形式：

设 $x_1,x_2\in[a,b]$，$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0\Leftrightarrow\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是__②__；

$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0\Leftrightarrow\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0\Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是__③__.

(2)若函数 $f(x)$和 $g(x)$都是减函数，则在公共定义域内，$f(x)+g(x)$是__④__；若函数 $f(x)$和 $g(x)$都是__⑤__，则在公共定义域内，$f(x)+g(x)$也是__⑥__；根据__⑦__判断复合函数 $y=f[g(x)]$的单调性.

3. 函数的奇偶性

(1)$f(x)$为__⑧__$\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(-x)+f(x)=0$；$f(x)$为__⑨__$\Leftrightarrow f(x)=f(-x)=f(|x|)\Leftrightarrow f(x)-f(-x)=0$. 只有当定义域关于原点对称时，这个函数才能具有奇偶性.

(2)$f(x)$是偶函数$\Leftrightarrow f(x)$的图象关于__⑩__对称；$f(x)$是奇函数$\Leftrightarrow f(x)$的图象关于__⑪__对称.

(3)奇函数在对称的单调区间内有__⑫__的单调性；偶函数在对称的单调区间内有__⑬__的单调性.

(4)若 $f(x+a)$为奇函数$\Rightarrow f(x)$的图象关于点$(a,0)$中心对称；若 $f(x+a)$为偶函数$\Rightarrow f(x)$的图象关于直线 $x=a$ 对称.

(5)在 $f(x)$，$g(x)$的公共定义域上，奇±奇＝奇，偶±偶＝偶，奇×奇＝偶，偶×偶＝偶，奇×偶＝奇.

4. 函数的周期性

(1)若 $y=f(x)$在 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x+a)=f(x-a)$恒成立，则函数 $f(x)$的周期为 $2|a|$.

(2)若 $y=f(x)$在 $x\in\mathbf{R}$ 时，恒有 $f(x+a)=-f(x)$或 $f(x+a)=\pm\dfrac{1}{f(x)}$，则函数 $y=f(x)$的周期为 $2|a|$.

5. 函数的图象

重点结论：(1)若函数 $y=f(x)$满足 $f(a+x)=f(a-x)$，即 $f(x)=f(2a-x)$，则 $f(x)$的图象关于直线__⑭__对称.

(2)若 $f(x)$满足 $f(a+x)=f(b-x)$，则函数 $f(x)$的图象关于直线__⑮__对称.

(3)若函数 $y=f(x)$满足 $f(x)=2b-f(2a-x)$，则该函数的图象关于点__⑯__成中心对称.

核心考点

考点一 函数及其表示

考点精析

1. 构成函数概念的三要素

(1)三要素是指定义域、对应法则、值域.

(2)三要素中只要有一个不同,两个函数就是不同的函数.

(3)三要素都相同的两个函数是一个函数.

2. 当函数是由解析式给出时,则其定义域是使解析式有意义的自变量的取值集合.也就是:(1)分式的分母不得为零;(2)偶次方根的被开方数不小于零;(3)对数函数的真数必须大于零;(4)指数函数和对数函数的底数必须大于零且不等于1;(5)三角函数中的正切函数 $y=\tan x$, $x\in \mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}$.

例 1-1 (**2015·湖北卷**)函数 $f(x)=\sqrt{4-|x|}+\lg\frac{x^2-5x+6}{x-3}$ 的定义域为 ( )

A. $(2,3)$　　B. $(2,4]$

C. $(2,3)\cup(3,4]$　　D. $(-1,3)\cup(3,6]$

考点:函数定义域的求法.

分析:可以根据选项,用排除法,也可以直接列出使函数解析式有意义的 x 的不等式组,解不等式组即可.

解析:(方法1)当 $x=3$ 和当 $x=5$ 时,函数均没有意义,故可排除选项B、D;当 $x=4$ 时,函数有意义,可排除选项A.故选C.

(方法2)要使函数有意义,则 $\begin{cases}4-|x|\geqslant 0,\\ \frac{x^2-5x+6}{x-3}>0,\\ x\neq 3,\end{cases}$

解得 $2<x\leqslant 4$ 且 $x\neq 3$,所以定义域为 $(2,3)\cup(3,4]$.

答案:C

点评:本题主要考查函数定义域的求法,根据题目及选项特点,可用直接法,也可用排除法,属基础题.

例 1-2 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-3,0)$,则函数 $f(2x-1)$ 的定义域为________.

考点:函数的定义域及其求法.

分析:根据题目给出的函数 $f(x)$ 的定义域,由 $2x-1$ 在函数 $f(x)$ 的定义域内求解 x 的范围得函数 $f(2x-1)$ 的定义域.

解析:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-3,0)$,

则由 $-3<2x-1<0$,

解得 $-1<x<\frac{1}{2}$.

∴函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

答案:$\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

点评:本题考查了复合函数的定义域及其求法,给出函数 $f(x)$ 的定义域 $[a,b]$,求解函数 $f[g(x)]$ 的定义域,只需由 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 求解 x 的取值集合即可,是基础题.

规律总结

函数的概念及其表示是研究函数的基础,因而也是高考重点考查对象.考查时,一般较少直接考查,主要在考查其他知识的同时间接考查;若直接考查,函数的定义域问题则是其热点问题,应重点突破.偶尔也会涉及到函数的概念,甚至映射的概念.因此我们在二轮复习中对本考点内容复习的策略是:重点突破函数的定义域问题,兼顾函数概念乃至映射概念,不要留下知识的盲点,造成不必要的丢分.

变式训练

【1-1】 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,4]$,则函数 $y=f(x+3)+f(x^2)$ 的定义域为 ( )

A. $[-2,1]$　　B. $[1,2]$

C. $[-2,-1]$　　D. $[-1,2]$

【1-2】 若函数 $f(x)=\lg(x+2^x-m)$ 在区间 $[1,2]$ 上有意义,则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,3)$　　B. $(-\infty,6)$

C. $[1,2]$　　D. $(-\infty,3]$

考点二 函数的图象及其应用

考点精析

1. 作图:常用描点法或变换作图法.

2. 识图:从图象与轴的交点及左、右、上、下分布范围、变化趋势、对称性等方面,找准解析式与图象的对应关系.

3. 用图:图象形象地显示了函数的性质,因此,函数的性质的确定与应用及一些方程、不等式的求解常与图象数形结合研究.

例 2-1 (**2014·长郡二模**)如果若干个函数的图象经过平移后能够重合,则称这些函数为"同簇函数".给出下列函数:

①$f(x)=\sin x\cos x$;

②$f(x)=\sqrt{2}\sin 2x+1$;

③$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

④$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

其中"同簇函数"的是 ( )

A. ①②　　　　B. ①④

C. ②③　　　　D. ③④

考点：函数的图象与图象变化.

分析：由于$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，再根据函数图象的平移变换规律，可得它与$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象间的关系. 而其余的两个函数的图象仅经过平移没法重合，还必须经过横坐标（或纵坐标）的伸缩变换，故不是"同簇函数".

解析：由于①$f(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$与②$f(x)=\sqrt{2}\sin 2x+1$的图象仅经过平移没法重合，还必须经过纵坐标的伸缩变换，故不是"同簇函数".

由于①$f(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$与④$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象仅经过平移没法重合，还必须经过横、纵坐标的伸缩变换，故不是"同簇函数".

②$f(x)=\sqrt{2}\sin 2x+1$与③$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象仅经过平移没法重合，还必须经过横、纵坐标的伸缩变换，故不是"同簇函数".

由于④$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

$=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，

故把③$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$，

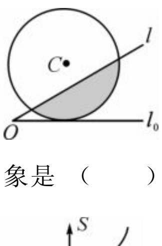
可得$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象，

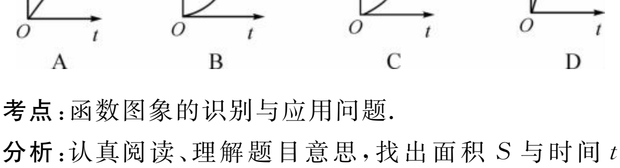
故③和④是"同簇函数".

答案：D

点评：本题主要考查新定义，函数图象的平移变换规律，属于基础题.

例 2－2（**2014 · 武汉调研**）如图，直线l和圆C，当l从l_0开始在平面上绕点O按逆时针方向匀速转动（转动角度不超过90°）时，它扫过的圆内阴影部分的面积S是时间t的函数，这个函数的大致图象是　（　　）





A　　　　B　　　　C　　　　D

考点：函数图象的识别与应用问题.

分析：认真阅读、理解题目意思，找出面积S与时间t的变化关系.

解析：随着时间的增长，直线被圆截得的弦长先慢慢增加到直径，再慢慢减小，所以圆内阴影部分的面积增加速度先越来越快，然后越来越慢，反映在图象上面，则先由平缓变陡，再由陡变平缓，结合图象知，选C.

答案：C

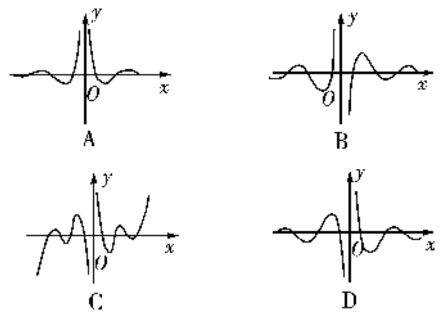
点评：本题考查阅读理解能力和函数图象的识别，根据题意，明确S与t的变化关系，找出其对应的图象，属中档题.

规律总结

函数的图象是函数的一个重要组成部分，是数形结合的桥梁. 因而本考点内容是高考重点考查对象，考查的热点问题是"用图". 这类问题一般处在高考试卷的选择、填空题的压轴位置. 因此需要我们在二轮复习中重点关注和重点突破.

变式训练

【2－1】（**2015 · 山西四校联考**）函数$y=\dfrac{2^x\sin\left(\frac{\pi}{2}+6x\right)}{4^x-1}$的图象大致为　（　　）



【2－2】（**2014 · 太原一模**）已知方程$\dfrac{|\sin x|}{x}=k$在$(0,+\infty)$上有两个不同的解$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$，则下面结论正确的是　（　　）

A. $\sin\alpha=\alpha\cos\beta$　　　　B. $\sin\alpha=-\alpha\cos\beta$

C. $\cos\alpha=\beta\sin\beta$　　　　D. $\sin\beta=-\beta\sin\alpha$

考点三　分段函数

考点精析

对于分段函数应当注意的是分段函数是一个函数，而不是几个函数，其特征在于"分段"，即对应关系在不同的定义区间内各不相同. 在解决有关分段函数问题时既要紧扣"分段"这个特征，又要将各段有机联系使之整体化、系统化. 分段函数的解析式不能写成几个不同的方程，而应写成函数的几种不同的表达式并用一个左大括号括起来，且分别注明各部分的自变量的取值情况.

例 3－1（**2015 · 全国卷Ⅰ**）已知函数$f(x)=\begin{cases}2^{x-1}-2, & x\leqslant 1,\\ -\log_2(x+1), & x>1,\end{cases}$且$f(a)=-3$，则$f(6-a)=$　（　　）

A. $-\frac{7}{4}$　　B. $-\frac{5}{4}$

C. $-\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{1}{4}$

考点:分段函数的正向求值与逆向求值问题.

分析:分类讨论处理条件 $f(a)=-3$,解得 a,再代入函数解析式计算 $f(6-a)$.

解析:当 $a\leqslant 1$ 时,则 $2^{a-1}-2=-3,2^{a-1}=-1,a$ 无解.当 $a>1$ 时,$f(a)=-\log_2(a+1)=-3,a+1=8,a=7$.从而 $f(6-a)=f(-1)=2^{-1-1}-2=-\frac{7}{4}$,故选 A.

答案:A

点评:分段函数的求值问题应根据自变量的值所属区间选定相应的解析式代入求解,即对号入座.

例 3-2 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数,在区间 $[-1,1]$ 上,$f(x)=\begin{cases}ax+1,-1\leqslant x<0,\\ \frac{bx+2}{x+1},0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$ 其中 $a,b\in\mathbf{R}$. 若 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)$,则 $a+3b$ 的值为________.

考点:函数的周期性,分段函数的解析式求法及其图象的作法.

分析:由于 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数,由 $f(x)$ 的表达式可得 $f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}a=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{b+4}{3}$;再由 $f(-1)=f(1)$ 得 $2a+b=0$,解关于 a,b 的方程组可得到 a,b 的值,从而得到答案.

解析:∵ $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数,

$$f(x)=\begin{cases}ax+1,-1\leqslant x<0,\\ \frac{bx+2}{x+1},0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

∴ $f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}a,f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{b+4}{3}$,

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)$,∴ $1-\frac{1}{2}a=\frac{b+4}{3}$.　①

又 $f(-1)=f(1),f(1)=\frac{b+2}{2},f(-1)=1-a$,

∴ $\frac{b+2}{2}=1-a$,即 $2a+b=0$.　②

由①②解得 $a=2,b=-4$. ∴ $a+3b=-10$.

答案:-10

点评:本题考查函数的周期性,考查分段函数的解析式的求法,着重考查方程组思想,得到关于 a,b 的方程组并求得 a,b 的值是关键,属于中档题.

规律总结

新《课程标准》和《考试大纲》对分段函数提出了明确的具体要求(原来的《考试大纲》未明确提出要求):了解简单的分段函数,并能简单的应用. 因此分段函数问题是近几年高考命题的热点之一.

变式训练

【3-1】已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^{x-5},x>6,\\ \left(4-\frac{a}{2}\right)x+4,x\leqslant 6,\end{cases}$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(n)(n\in\mathbf{N}_+)$,且数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列,则实数 a 的取值范围是________.

【3-2】(2014·南充一模)已知函数 $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6},x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ \frac{2x^3}{x+1},x\in\left(\frac{1}{2},1\right],\end{cases}$ 函数 $g(x)=a\cos\frac{\pi x}{2}-2a+\frac{1}{2}(a<0)$,若存在 $x_1,x_2\in[0,1]$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立,则实数 a 的取值范围是________________.

考点四 函数性质的综合运用

考点精析

1. 判断函数单调性的常用方法

(1)能画出图象的一般用数形结合法去观察.

(2)由基本初等函数通过加、减运算或复合而成的函数,常转化为基本初等函数单调性的判断问题.

(3)对于解析式较复杂的一般用导数法.

(4)对于抽象函数一般用定义法.

2. 函数奇偶性的应用

应用函数的奇偶性可先求参数的值,画关于原点对称区间上函数的图象,再求解析式、函数值、判断单调性.

3. 函数周期性

若 T 为 $f(x)$ 的一个周期,则 $f(x+nT)=f(x)(n\in\mathbf{Z})$.

4. 求函数最值(值域)常用的方法

(1)单调性法:适合于已知或能判断单调性的函数;

(2)图象法:适合于已知或易作出图象的函数;

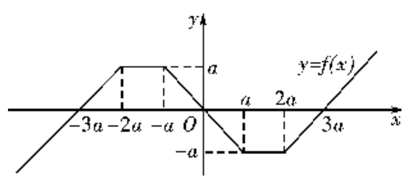
(3)基本不等式法:特别适合于分式结构或二元的函数;

(4)导数法:适合于可求导数的函数.

注意:(1)对于同增(减)的不连续的单调区间不能写成并集,只能分开写.

(2)对于解析式较复杂的函数,可通过换元法转化为熟悉的函数,再求最值(值域).

例 4-1 (2014·湖北卷)如图所示,函数 $y=f(x)$ 的图象由两条射线和三条线段组成. 若 $\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x)>f(x-1)$,则正实数 a 的取值范围是________.



考点:考查函数图象的读图及函数求值问题,考查恒成立问题等知识.

分析:通过分析题意,把问题转化为 x 轴上区间的长度

问题,寻找满足条件的临界值.

解析:(方法1)由题中图象知$f(x)$为奇函数,

当$x\leqslant-2a$或$x\geqslant 2a$时,$f(x)$为增函数,要使$\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x)>f(x-1)$成立.

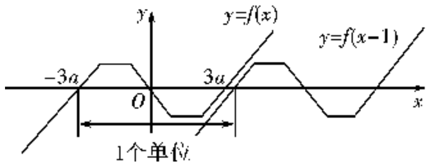
因为$f(4a)=f(-2a)=a$,

故只需$4a-(-2a)<1$,即$a<\frac{1}{6}$.

又a为正实数,故$a\in\left(0,\frac{1}{6}\right)$.

(方法2)"$\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x)>f(x-1)$"等价于"函数$y=f(x)$的图象恒在函数$y=f(x-1)$的图象的上方",函数$y=f(x-1)$的图象是由函数$y=f(x)$的图象向右平移一个单位得到的,如图所示.

因为$a>0$,由图知$6a<1$,所以a的取值范围是$\left(0,\frac{1}{6}\right)$.



答案:$\left(0,\frac{1}{6}\right)$

点评:熟练掌握函数图象的作图、识图、用图,灵活运用数形结合、等价转化的思想方法及正确理解题意是解题的关键.

规律总结

函数性质的综合是高考重点考查对象,主要考查函数的单调性、最值、奇偶性、周期性、图象对称性以及给出新定义性质等.其中函数单调性往往结合导数在一起以解答题形式来考查.

变式训练

【4-1】(2015·全国卷Ⅱ)设函数$f(x)=\ln(1+|x|)-\frac{1}{1+x^2}$,则使得$f(x)>f(2x-1)$成立的$x$的取值范围是　　(　　)

A. $\left(\frac{1}{3},1\right)$

B. $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

C. $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

D. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$

误区警示

例　定义在$\mathbf{R}$上的偶函数$f(x)$满足$f(x)=f(x+2)$,当$x\in[3,4]$时,$f(x)=x-2$,则　　(　　)

A. $f\left(\sin\frac{1}{2}\right)<f\left(\cos\frac{1}{2}\right)$

B. $f\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)>f\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$

C. $f(\sin 1)<f(\cos 1)$

D. $f\left(\sin\frac{3}{2}\right)>f\left(\cos\frac{3}{2}\right)$

考场错解:由$f(x)=f(x+2)$知$T=2$为$f(x)$的一个周期.

设$x\in[-1,0]$,则$x+4\in[3,4]$,

$\therefore f(x)=f(x+4)=x+4-2=x+2$,

$\therefore f(x)$在$[-1,0]$上是增函数.

又$f(x)$为偶函数,

$\therefore f(x)=f(-x)$,

$\therefore x\in[0,1]$时,$f(x)=x+2$,即$f(x)$在$[0,1]$上也是增函数.又$\because \sin\frac{1}{2}<\cos\frac{1}{2}\Rightarrow f\left(\sin\frac{1}{2}\right)<f\left(\cos\frac{1}{2}\right)$.

故选A项.

专家把脉:上面解答错在由$f(x)=f(-x)$得$f(x)=x+2$这一步上,导致错误的原因主要是对偶函数图象不熟悉.

对症下药:由$f(x)=f(x+2)$知$T=2$为$f(x)$的一个周期,设$x\in[-1,0]$,则$x+4\in[3,4]$,

$\therefore f(x)=f(x+4)=x+4-2=x+2$.

$\therefore f(x)$在$[-1,0]$上是增函数.

又$\because f(x)$为偶函数,

$\therefore f(x)$的图象关于y轴对称.

$\therefore f(x)$在$[0,1]$上是减函数.

A:$\sin\frac{1}{2}<\cos\frac{1}{2}\Rightarrow f\left(\sin\frac{1}{2}\right)>f\left(\cos\frac{1}{2}\right)$;

B:$\sin\frac{\pi}{3}>\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow f\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)<f\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$;

C:$\sin 1>\cos 1\Rightarrow f(\sin 1)<f(\cos 1)$;

D:$\sin\frac{3}{2}>\cos\frac{3}{2}\Rightarrow f\left(\sin\frac{3}{2}\right)<f\left(\cos\frac{3}{2}\right)$.

故正确答案为C.