



同济大学申请博士学位论文

同济大学

博士学位论文

大跨度桥梁非线性抖振及其对抗风稳定性影响的研究

张志田

指导教师姓名 葛耀君 教授

申请学位级别 工学博士 专业名称 桥梁与隧道工程

土木工程学院桥梁工程系

2004年5月

声 明

本人郑重声明:本论文是在导师的指导下,独立进行研究工作所取得的成果,撰写成博士学位论文“大跨度桥梁非线性抖振及其对抗风稳定性影响的研究”。除论文中已经注明引用的内容外,对论文的研究做出重要贡献的个人和集体,均已在文中以明确方式标明。本论文中不包含任何未加明确注明的其他个人或集体已经公开发表或未公开发表的成果。

本声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名:

2004年 6月 8日

摘 要

为了精确计算桥梁风致抖振响应，人们普遍关注的只是气动导纳的研究。然而，在影响桥梁抖振响应计算的诸多因素中，气动导纳只是其中的一个方面，抖振计算中还涉及到气动刚度与气动阻尼的计算模型、结构几何非线性和抖振荷载非线性等因素。同样重要的一个问题是抖振响应对桥梁抗风稳定性的影响，包括动力失稳与静力发散。桥梁抖振响应与抗风稳定问题并非是相互独立的两个问题，它们是密切相关的，要实现任一方面的精确分析，二者缺一不可。

本文对大跨度桥梁非线性抖振计算和考虑抖振影响的静风稳定性以及颤振稳定性进行了研究，主要完成了以下几个方面的研究工作：

- 1、从风洞试验入手，分析了现有最小二乘法识别气动导数的不足以及据此进行气动刚度和气动阻尼计算的误差。为此，本文建议采用准定常模型计算气动刚度、采用节段模型试验结果作为阻尼值，经理论计算与试验结果比较，该法具有较高的计算精度。
- 2、采用现有频域线性抖振计算方法，以东海大桥与西堠门大桥为研究背景，对比分析了本文提出的抖振响应计算方法与 Scanlan 颤抖振方法的差异。
- 3、完善了现有时域非线性抖振计算方法，通过与频域计算结果的对比，着重研究了几何非线性因素与静风预张力效应对大跨度桥梁抖振的影响。研究表明，几何非线性与静风预张力效应对抖振振幅的影响可能是导致目前抖振响应计算误差大的主要原因，忽略几何非线性与静风预张力效应将导致抖振振幅明显偏大。
- 4、编制了时域内均匀流场中三维桥梁颤振稳定分析程序，并提出了采用有限范围内搜索的线性最优方法来代替以往对预设初始向量相当敏感的非线性最小二乘法。
- 5、在桥梁静风稳定性分析方面，采用超松弛迭代法分析了静风扭转发散的机理；提出了采用动力有限元法分析考虑脉动风抖振影响的桥梁静风稳定问题。研究表明，脉动风抖振对静风稳定性是有利的。

Nonlinear Buffeting Vibration and It's Effects on Aerostatic and Aerodynamic Stability of Long-Span Bridges

ABSTRACT

Buffeting analysis of long span bridges under wind load is a long-standing problem, in order to calculate wind-induced buffeting response of bridge structures, structure engineers in bridge academic circles have engaged in research of aerodynamic admittance from beginning to end. However, aerodynamic admittance is only one of many factors which determine the precision of buffeting response assessment, therefore, to study wind-induced buffeting response of long span bridges and aerodynamic admittance itself, it is necessary to make systematic and thorough study of all the other key factors. Another important problem of long span bridges is stabilization under wind load, which include aerodynamic instability and aerostatic divergence. It must be point out that the above mentioned two problems are not independent, they are closely correlated and must be studied simultaneously.

This text mainly carried out the following researches:

1. Based on wind tunnel tests, the shortcomings in current method of flutter derivatives identification using least square method are investigated, and the result shows that the identified flutter derivatives do not have explicit physic sense. Therefore, methods for buffeting analysis and aerostatic instability analysis using aerodynamic stiffness based on quasi-steady model and aerodynamic damping based on wind tunnel test are put forward. By comparison, the methods carried in this text have more explicit physic sense and veracity than traditional ones.
2. In the background of the East Sea Bridge engineering and the XiHouMen bridge, the buffeting results carried out by the two above mentioned methods in frequency domain are presented and compared in detail.
3. By the mean of nonlinear time domain wind-induced buffeting analysis of long span bridges, the role of geomeic nonlinearity and the prestress effects of aerostatic forces are discussed thoroughly. The presented result shows that geometric nonlinearity and prestress effects of aerostatic forces are very important in buffeting assessment of long span bridges, and, the methods of frequency domain neglecting these two factors will lead to considerable larger results.
4. The approach of wind-induced aerodynamic instability assessment in time domain is carried out in this text.
5. With the successive over relaxation method and dynamic finite element method, the mechanism of wind-induced aerostatic instability is analyzed, and by mean of using nonlinear finite method the effect of turbulent flow on aerostatic torsional diverging is investigated with the result that turbulent flow can enhance aerostatic stability.

目 录

摘 要	3
ABSTRACT	4
目 录	5
第一章 概述	1
1.1 颤振失稳	1
1.1.1 古典耦合颤振.....	1
1.1.2 分离流颤振.....	2
1.1.3 三维颤振分析.....	3
1.2 驰振	3
1.3 静风失稳	4
1.4 随机抖振	4
1.5 涡激振动	6
1.6 主要研究目的与内容.....	7
第二章 气动刚度与气动阻尼确定.....	8
2.1 非定常模型	8
2.2 准定常模型	10
2.3 气动刚度计算	11
2.4 气动阻尼计算	16
2.5 本章小结	18
第三章 线性抖振频域分析	19
3.1 现有分析方法	19
3.2 基于气动新模型的分析方法.....	20
3.3 抖振频域分析数值比较.....	23
3.3.1 东海大桥抖振响应计算.....	23
3.3.2 西堍门大桥抖振响应计算.....	26
3.4 本章小结	30
第四章 非线性抖振时域分析.....	31
4.1 时域抖振分析基本方程.....	31
4.2 脉动风功率谱密度.....	31
4.3 风谱模拟的谐波合成法.....	32
4.4 抖振时域分析数值比较.....	36
4.5 抖振响应影响因素的探讨.....	40
4.5.1 几何非线性影响.....	40
4.5.2 静风预张力影响.....	41
4.6 本章小结	44
第五章 风致动力稳定分析	45
5.1 自激力时域表达	45
5.2 非线性有限元程序验证.....	48
5.3 非线性颤振时域分析数值比较.....	49
5.3.1 东海大桥颤振分析.....	49



5.3.2	西埃门大桥颤振分析.....	52
5.4	本章小结	54
第六章	风致静力稳定性分析.....	55
6.1	现有静风稳定分析方法.....	55
6.2	不计抖振影响的静风稳定.....	56
6.3	考虑抖振影响的时域分析.....	59
6.4	基于振型叠加的静风稳定频域分析.....	59
6.5	西埃门大桥静风稳定分析.....	61
6.5.1	ANSYS 计算.....	61
6.5.2	动力有限元计算.....	62
6.5.3	基于模态叠加的计算.....	64
6.6	东海大桥静风稳定分析.....	65
6.6.1	ANSYS 计算.....	65
6.6.2	动力有限元计算.....	67
6.6.3	基于模态叠加的计算.....	68
6.7	抖振响应对静力失稳的影响.....	69
6.8	材料非线性的影响.....	71
6.9	静风失稳机理的探讨.....	72
6.10	本章小结	73
第七章	结论与展望	74
7.1	主要研究工作	74
7.2	主要研究结论	74
7.3	今后研究展望	74
参考文献	76
附录	PBRW 程序类文件使用说明	81



第一章 概述

自 1940 年美国塔科马悬索桥风毁事故以来，桥梁的风致响应问题越来越受到世界桥梁界工程师们的重视与关注。我国正处于一个跨海大桥兴建的阶段，跨海大桥有结构跨度大、柔性大、自振频率低、风荷载大的显著特点，因此，风荷载作用下其静动力响应问题尤其突出。目前为止，人们所关心的大跨度桥梁风致响应问题主要有以下五个方面，即颤振失稳、静风发散、随机抖振、涡激振动以及驰振失稳。

1.1 颤振失稳

桥梁颤振是一种空气动力失稳现象。当气流流经桥梁结构断面时，对于刚度小柔度大的大跨度桥梁，空气作用力表现为静力作用与动力作用两方面。风的动力作用激发了桥梁结构的振动，振动的结构又反过来影响空气的流动、改变空气力，从而形成风与结构的相互作用机制。当空气力受结构振动的影响较小时，空气的动力作用可以看作是一种强迫振动荷载；而当空气力受结构振动影响较大从而形成一个具有相互作用反馈机制的动力系统时，气动力表现为一种结构自激力的形式。当振动系统的机械阻尼与气动阻尼之和小于零时，则系统能量将不断增大一直到发散，桥梁结构这种空气动力失稳现象称为颤振失稳。

自 1940 年美国 Tacoma 大桥风毁事故以来，借助于航空的已有成就，各国学者致力于研究桥梁空气动力失稳的机理及防止桥梁颤振发散的气动措施。对于无分离流动的理想流线型断面的颤振，Theodorsen、Bleich、Van der put 等学者的研究已经形成较为完善的古典耦合颤振理论。实际工程中的加劲梁断面在来流作用下，大多会产生气流分离，这种有分离流的钝体断面，其颤振特性目前主要通过风洞试验来解决，理论上的计算也只能依赖于实验得出的气动导数来加以近似分析，即目前桥梁抗风中广泛使用的 Scanlan 自激力模型。随着计算机应用的发展，各国风工程界的学者们开始以计算流体力学 CFD 为基础对桥梁颤振的风场特性以及颤振机理展开研究。

1.1.1 古典耦合颤振

对于理想平板的非定常气动力，Theodorsen 于 1935 年用势流理论得出其表达式，即二维理想平板在均匀水平流中作微小振动所受到的非定常空气升力与升力矩可以表示为 [89][100]：

$$L = -2\pi\rho b v^2 \left\{ C(k) \left[\alpha + \frac{\dot{h}}{v} \right] + [1 + C(k)] \frac{b}{2} \frac{\dot{\alpha}}{v} \right\} \quad (1-1a)$$

$$M = \pi\rho b^2 v^2 \left\{ C(k) \left[\alpha + \frac{\dot{h}}{v} \right] + [1 - C(k)] \frac{b}{2} \frac{\dot{\alpha}}{v} \right\} \quad (1-1b)$$

式中： ρ —空气密度；

b —平板的半宽度；

v —空气流速；

h, α —分别为截面竖向位移与扭转角；

k —折算频率； $k = \omega b / v$ ， ω 为振动的圆频率；

$C(k)$ —Theodorsen 函数，当用 Bessel 函数表示时可写成 $C(k) = F(k) + iG(k)$ 。

$$C(k) = 1 - \frac{0.165}{1 - \frac{0.0455}{k} \cdot i} - \frac{0.335}{1 - \frac{0.3}{k} \cdot i} \quad (1-2)$$

$$F(k) = 1 - \frac{0.165}{1 + \left(\frac{0.0455}{k} \right)^2} - \frac{0.335}{1 + \left(\frac{0.3}{k} \right)^2} \quad (1-3)$$



$$G(k) = -\frac{0.165 \times 0.0455}{1 + \left(\frac{0.0455}{k}\right)^2} - \frac{0.335 \times 0.3}{1 + \left(\frac{0.3}{k}\right)^2} \quad (1-4)$$

实用上 Theodorson 函数可用 R.T.Yones 的近似表达式。

1948 年, Bleich 将 Theodorson 形式的理想平板气动力应用到桁架悬索桥梁的颤振分析中, 并首次建立了悬索桥古典耦合颤振分析方法^[19]。Bleich 认为桁架悬索桥中桥面接近于一块平板, 而空腹桁架上所受的空气力相对较小可忽略不计。此时悬索桥桥面的二维颤振微分方程可写成:

$$m\ddot{h} + m\omega_h^2(1 + ig_h) \cdot h = L \quad (1-5a)$$

$$I\ddot{\alpha} + I\omega_a^2(1 + ig_a) \cdot \alpha = M \quad (1-5b)$$

式中 m 、 I 分别为桥面每延米的质量与质量惯性矩;

ω_h 、 ω_a 分别为悬索桥的弯曲基频与扭转基频;

$g_h = \frac{\theta_h}{\pi} = 2\zeta_h$, $g_a = \frac{\theta_a}{\pi} = 2\zeta_a$ 分别为弯曲及扭转振动的复阻尼系数。

1967 年, Kloppel 和 Thiele 将 Bleich 的悬索桥古典耦合颤振理论的逐次逼近求解过程编制成计算机程序, 引入无量纲参数后分别绘制成不同阻尼比下的诺谟图, 有了诺谟图就可以较为方便地查出根据古典耦合颤振理论求出的颤振临界风速。为了考虑实际桥梁结构断面并非理想薄平板而带来的差异, 他们又通过试验确定出一系列断面形状修正系数对平板颤振临界风速进行修正。1976 年, Van der Put 注意到在影响古典耦合颤振临界风速的各种因素中, 可以偏安全地忽略结构阻尼的影响, 同时临界风速与扭转频率比可近似表示为线性关系, 进而推导出桥梁古典弯扭耦合颤振临界风速的近似计算公式:

$$U_{cr} = \eta \left[1 + (\varepsilon - 0.5) \sqrt{\frac{r}{b} 0.72 \mu} \right] \omega_b b \quad (1-6)$$

式中 ε 为扭转频率比; r 为断面回旋半径; μ 为结构相对空气的质量比 ($\mu = m/(\pi \rho b^2)$); η 为断面形状修正系数; b 为半桥宽。

古典耦合颤振理论只适合于流线型断面桥梁, 该类桥梁气流绕流形态接近平板情况, 能够满足 Theodorson 形式非定常气动力成立的前提条件。

1.1.2 分离流颤振

绝大多数桥梁的断面是非流线型的, 当气流流经振动的非流线型断面时, 在迎风面的棱角处将发生分离, 同时产生旋涡脱落, 此时, 用基于势流原理的 Theodorson 公式不能再正确地描述作用在桥梁断面上的非定常气动力。

为解决非流线型断面的分离流颤振问题, Scanlan 和 Tomko 在 1971 年提出了包含 6 个通过试验测得颤振导数的非定常气动力表达式^{[51][55]}:

$$L_{ae} = \frac{1}{2} \rho U^2 B \left[KH_1^*(K) \frac{\dot{h}}{U} + KH_2^*(K) \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 H_3^*(K) \alpha \right] \quad (1-7)$$

$$M_{ae} = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left[KA_1^*(K) \frac{\dot{h}}{U} + KA_2^*(K) \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 A_3^*(K) \alpha \right] \quad (1-8)$$

式中的 K 为折算频率, $K = B\omega/U$; H_i^* 、 A_i^* 为通过试验测得的气动导数, 为折算频率 K 的函数。

有了通过气动导数表示的自激力模型后, 就可以通过半逆解法求得结构的颤振临界风速与颤振振动频率。Scanlan 所建立的颤振分析方法既可以求解古典弯扭耦合颤振问题, 又可以用于分离流颤振问题, 但其自激力模型成立有两个假设前提, 其一为线性化假定, 即小幅振动假定; 其二为攻角不变假定, 这一假定在一定程度上将气动力定常化。



1.1.3 三维颤振分析

三维颤振分析方法，仍然以 Scanlan 的分离流颤振理论为基础。频域内颤振方程的求解，国内外学者进行了大量的研究，到目前为止，其求解方法大致可分为两类。第一类为基于结构固有模态坐标的分析方法，称为多模态颤振分析方法，Agar 和 Beith 将系统颤振运动方程转化为不对称实矩阵的特征值问题进行颤振分析，分析中必须进行两组参数搜索的迭代求解^{[58][59][9]}。Namini 提出了用于多模态颤振分析的 PK-F 法，特点是求解非线性方程组，能给出结构颤振发生的全过程结果^[7]。陈政清将颤振分析问题转化为复矩阵的广义特征值问题，并提出了多模态单参数的颤振分析方法，该法对于无结构阻尼的情况时不需要迭代，并且指出桥梁结构颤振中高阶模态的参与具有正、负两方面的作用^[88]。Jain 也将颤振运动方程转化为特征值问题，但通过求解其特征多项式的实部和虚部方程进行颤振分析^[8]。这一类方法都采用了 Scanlan 的线性自激力模型，且都需要两参数搜索或迭代过程。

另一类方法是基于结构有限元全模型的物理坐标。这类方法叫做全模态颤振分析方法或颤振全阶分析方法。Miyata 和 Yamada 最早提出直接颤振分析方法，由于该法忽略了结构阻尼对颤振的影响^{[62][61]}，因而颤振分析中不需要进行迭代搜索过程，但计算量大。Dung 进一步发展了该直接颤振分析方法^[42]，求解特征方程时采用模态追踪技术，在一定程度上提高了计算效率，但仍然不能有效地考虑结构阻尼的影响。葛耀君提出了能全面考虑结构阻尼影响的三维颤振全模态分析方法^[78]，该法为双参数搜索分析方法。

基于模态坐标的频域颤抖振分析方法有简单、高效的优点，但不能考虑非线性因素的影响，如气动力非线性、结构非线性以及紊流对颤振的影响等。相比之下，时域的方法尽管有其计算量大的缺点，但能克服频域分析的不足之处，因此，在计算条件允许的情况下，时域分析为桥梁颤抖振分析的有力工具。

Lin 和 Bucher 等用随机稳定的方法研究了紊流对桥梁结构颤振稳定性以及抖振响应的影响，该方法是基于时域分析的方法^{[14][15][46][79][80][82]}。最初，Scanlan 将 Wagner 在航空中提出的经典阶跃函数的概念引入到桥梁中，提出用阶跃函数来描述任意运动作用于桥梁的气动力表达式^[54]。以扭转为例，其最终表达式为：

$$M_{\alpha} = \frac{1}{2} \rho U^2 (2B)^2 \frac{dC_M}{d\alpha} [X_{M\alpha} \dot{\alpha}(s) + \int_0^s \phi_{M0}(s-\tau) \dot{\alpha}(\tau) d\tau] \quad (1-9)$$

式中 $s = Ut / B$ 为无量纲时间；

$dC_M / d\alpha$ 为静力扭转系数对扭转角的导数；

$X_{M\alpha}$ 为待定系数；

$\phi_{M0}(s)$ 为气动力阶跃函数，该函数在航空中可用 Wagner 函数表示。

Scanlan 构造了如下气动力阶跃函数应用于桥梁分析中：

$$\phi_{M0}(s) = 1 + C_1 e^{C_2 s} + C_3 e^{C_4 s} \quad (1-10)$$

式中的 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 为待定系数。

式(1-10)中的待定系数可用实测的颤振导数并用最小二乘法进行拟合得到。由于 Wagner 函数的特点，使得气动力耦合项的阶跃函数表达式的确定比较困难，因而该法应用于桥梁结构颤振分析有一定的局限性。

Y. K. Lin、Bucher 提出了一种以单位脉冲响应函数表示的自激力模型，该模型可以完善地描述三个方向的耦合气动力^{[14][15][46][80]}。其基本表达式如下：

$$L_{se}(t) = \int_{-\infty}^t f_{Lh}(t-\tau) h(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t f_{L\alpha}(t-\tau) \alpha(\tau) d\tau \quad (1-11)$$

$$M_{se}(t) = \int_{-\infty}^t f_{Mh}(t-\tau) h(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t f_{M\alpha}(t-\tau) \alpha(\tau) d\tau \quad (1-12)$$

式中的 $f_{Xy}(t-\tau)$ 表示单位脉冲响应函数。

1.2 驰振

驰振是具有特殊横截面形状的细长结构的不稳定风致振动，这些截面形状如矩形、D 形等，裹冰的电缆或在风雨共同作用下的斜拉桥拉索，由于其原来的圆形截面受到改变而不再保持为圆形截面，因而容易发生驰振现象。此类的细长结构一旦发生驰振现象，在垂直于气



流的方向会表现出大振幅的振动，其振幅可达到 10 倍以上的横截面直径，而振动频率则远低于相同截面的旋涡脱落频率。尽管桥梁的拉索振动问题并不会导致如颤振引起的毁灭性失稳，但其振动对桥梁结构的局部破坏以及疲劳问题起着至关重要的作用。

驰振本质上是一种非线性振动，G. V. Parkinson 对驰振的非线性性质进行了阐述并对驰振模型进行了关键性的讨论。但经验证明，在静态条件下所得到的横截面平均升力系数与阻力系数随攻角的变化，已经足以作为建立对驰振现象满意的解析描述的基础。也就是说，驰振基本上是由准定常力控制的。

驰振现象一般具有二维性质，从三分力对结构运动的影响入手，可得出以下非齐次方程：

$$m[\ddot{y} + 2\zeta\omega_1\dot{y} + \omega_1^2 y] = -\frac{1}{2}\rho U^2 B \left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D \right)_0 \frac{\dot{y}}{U} \quad (1-13)$$

式中 y 为横风向位移， m 为质量， C_L 为阻力系数， C_D 为升力系数， B 为特征尺度， U 为来流速度， ρ 为空气密度， α 为风的有效攻角。

式(1-13)中右边的气动力项可以看作对阻尼的贡献，因此可以把它移到方程左边合并成等效阻尼，合并后的总阻尼为：

$$d = 2m\zeta\omega_1 + \frac{1}{2}\rho UB \left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D \right)_0 \quad (1-14)$$

如果 d 大于零，系统的振动是稳定的；如果 d 小于零，则系统振动是不稳定的，即在初始的微小扰动下其振动是发散的。这就是著名的 Den Hartog 判别依据。

1.3 静风失稳

大跨度桥梁的静风失稳，是指桥梁主梁或主拱在静力风荷载作用下发生弯曲和扭转失稳现象。随着变形的增加，结构的整体刚度将不断改变(如承受巨大轴向压力的斜拉桥加劲梁在侧向弯曲变形作用下，由于偏心距的增大，其刚度将迅速减小)；另一方面，随着结构变形的增加，静风荷载也呈现非线性的增长，即在风速不变的情况下，静风荷载也是结构变形的函数。对于悬索桥或斜拉桥加劲梁来说，静风荷载主要受扭转角的影响。当由于结构变形引起的抗力增量小于外荷载增量时，就会发生结构失稳^{[64][89][97]}。

扭转发散现象最初是和飞机的机翼在超过某一风速时被扭毁的事故密切相关。类似于机翼，桥梁结构在风的作用下会受到阻力、升力和扭转力矩，并且产生一定的变形以反抗这些力的作用。随着风速的增加，扭转力矩进一步增大，于是结构扭转角进一步增加，而结构扭转变形的增大进一步增加了风对结构的有效攻角，从而又使扭转外力矩增大。最后，当达到某一级风速时，外力矩的增加与结构抗力矩的增大形成一种不稳定的状态，结构出现扭转发散。这是一个静力稳定问题，在结构力学上类似于柱的扭曲失稳问题。结构是否发生扭转发散取决于结构的抗力矩与气动力矩随扭转发展的形式，而不取决于结构的极限强度。

桥梁结构的断面形式比较复杂，气动扭矩与结构抗力并不一定服从上述的简单趋势。根据具体的气动力矩与攻角的关系，有时结构可以避免扭转发散的发生^[89]。大多数土木工程的实际问题中，临界发散风速非常高，远远超过设计所考虑的风速范围。然而，对于大跨度桥梁结构而言，由于跨径的不断增长，结构进一步柔性化，如已建的日本明石海湾桥(主跨 1991 米)、设计中的意大利墨西拿海峡桥(主跨 3300 米)以及规划中的直布罗陀海峡桥(主跨 5000 米)，这一类桥梁的静风稳定问题将会显得十分突出，其静力扭转发散的临界风速有可能低于颤振临界风速。

1.4 随机抖振

桥梁结构的抖振现象可大致分为三类^[4]，即有结构物自身尾流引起的抖振、其他结构物特征紊流引起的抖振和自然风中的脉动成份引起的抖振。在这三者之中，大气中脉动风引起的抖振响应占主要地位，因而通常所说的桥梁抖振分析理论主要是针对大气紊流引起的抖振。近四十多年来，国内外学者对大气紊流引起的桥梁结构抖振响应进行了大量的研究，概括起来，主要有三种，即 Y. K. Lin 随机抖振理论、Davenport 抖振理论、Scanlan 颤抖振理论。Y. K. Lin 以随机理论为基础，首先提出了用 Ito 随机微分方程来研究桥梁结构在紊流作用下的随机稳定性问题，继而建立了桥梁抖振的随机分析方法^{[79][82]}。Y. K. Lin 将自激力系数做为时变随机系数考虑，在某些方面是对 Scanlan 理论中自激力为常数的分析方法的修正。



Y. K. Lin 随机抖振理论着重于研究紊流对结构的颤振稳定的影响^{[14][15][46][80]}。1962 年, Davenport 将 Sears 函数和 Liepmann 的机翼抖振理论应用到桥梁结构的抖振响应分析中^[1], 该理论以 Davenport 脉动风谱为基础, 提出了修正静力三分力的气动导纳概念, 建立用气动导纳表示的抖振力功率谱密度。基于随机振动理论, 采用振型分解法求得结构水平、垂直等响应的均方差, 最后用峰值系数建立响应方差与结构最大抖振响应的关系^{[1][3]}。Davenport 抖振理论贡献主要在于提出了气动导纳的概念, 从而使抖振力计算模型更加符合实际情况。对于自激力, 该理论只考虑了气动阻尼的影响而忽略了气动刚度的影响以及气动耦合效应。Scanlan 在颤振导数试验方法与脉动风谱统计方法的基础上, 建立了脉动风作用下悬索桥、斜拉桥抖振响应分析的 Mode-by-Mode 方法^{[51][52]}, 以后又经 Anurag Jain、Nicholas P. Jones、Hiroshi Katsuchi 等将其发展为多振型耦合抖振理论^{[6][8]}, 该理论较全面地考虑了气动阻尼与气动刚度对桥梁抖振响应的影响, 即考虑了自激力对抖振的影响, 因而称为颤抖振理论。Scanlan 没有考虑气动导纳的影响, 后 Hiroshi Katsuchi 对其进行考虑气动导纳影响的修正, 并将其应用到明石海峡桥(AKASHI-KAIKYO)的抖振响应分析中^{[26][30]}。

Davenport 抖振力模型用阻力、升力与升力矩表示如下:

$$D_b(t) = \frac{1}{2} \rho U^2 B \left(2C_D \frac{u(t)}{U} + C'_D \frac{w(t)}{U} \right) \quad (1-15a)$$

$$L_b(t) = \frac{1}{2} \rho U^2 B \left(2C_L \frac{u(t)}{U} + (C'_L + C'_D) \frac{w(t)}{U} \right) \quad (1-15b)$$

$$M_b(t) = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left(2C_M \frac{u(t)}{U} + C'_M \frac{w(t)}{U} \right) \quad (1-15c)$$

式中 ρ 为空气密度; C_L 、 C_D 、 C_M 分别为升力、阻力与升力矩系数; C'_L 、 C'_D 、 C'_M 分别为升力、阻力、升力矩系数对攻角 α 的导数, 这些都可在风洞试验室由测力试验测得; U 为平均风速, u 、 w 分别为水平向及垂直向的脉动风速。

Davenport 抖振力模型的特点是将结构刚性化, 忽略结构与气流之间的相互影响以及特征紊流对结构抖振的影响。此外, 脉动风本身的高阶项部分也被忽略掉。Scanlan 等通过基于试验的自激力模型来修正结构的刚度矩阵与阻尼矩阵, 在 Davenport 抖振模型的基础上进一步考虑了结构与气流之间的相互影响。其自激力表达式如下:

$$D_{ae} = \frac{1}{2} \rho U^2 (2B) \left[KP_1^* \frac{\dot{p}}{U} + KP_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 P_3^* \alpha + K^2 P_4^* \frac{p}{B} + KP_5^* \frac{\dot{h}}{U} + K^2 P_6^* \frac{h}{B} \right] \quad (1-16a)$$

$$L_{ae} = \frac{1}{2} \rho U^2 (2B) \left[KH_1^* \frac{\dot{h}}{U} + KH_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 H_3^* \alpha + K^2 H_4^* \frac{h}{B} + KH_5^* \frac{\dot{p}}{U} + K^2 H_6^* \frac{p}{B} \right] \quad (1-16b)$$

$$M_{ae} = \frac{1}{2} \rho U^2 (2B^2) \left[KA_1^* \frac{\dot{h}}{U} + KA_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 A_3^* \alpha + K^2 A_4^* \frac{h}{B} + KA_5^* \frac{\dot{p}}{U} + K^2 A_6^* \frac{p}{B} \right] \quad (1-16c)$$

式中 ρ 为空气密度; U 为平均风速; $K(K = \omega B/U)$ 为折算频率; H_i^* 、 P_i^* 、 A_i^* ($i=1\sim6$) 为加劲梁断面颤振气动导数, 在各级风速下可由风洞试验室测得。

基于频域内的抖振响应方差具体求解方法有 CQC 法、SRSS^[57]法以及虚拟激励法^{[32][71][83]}三种, 其中 CQC(complete quadratic combination)法考虑模态与模态之间的耦合, 是一种精确的计算方法, 但其计算量相当大, 因此使用 CQC 法求解其于有限元的大型结构抖振响应时, 须付出昂贵的计算代价; SRSS(square root of the sum of squares)法忽略了模态与模态之间的耦合效应, 因而与 CQC 法相比, 其计算量大大减小, 但对于大跨度桥梁结构, 其自振频率密集, 彼此之间相距很近, 此时使用 SRSS 法求解会带来相当大的误差, 因而 SRSS 法的求解效率是以牺牲精度为代价的; 虚拟激励法由林家浩提出, 与 CQC 法及 SRSS 法相比, 其求解效率大大提高, 而精度却是与 CQC 法完全相同的。事实上, 虚拟激励法与 CQC 法相比, 其求解物理意义基本没有什么区别, 其计算量大大减小的原因是虚拟激励法求解的数学



过程是先求和再相乘，而 CQC 法是不求和而展开求各项之积后再相加，因而当参与模态很多且激励不相关时，其计算量相差大约为参与模态数的平方倍^[11]。

Davenport 抖振理论与 Scanlan 颤抖振理论是基于固有模态的频域分析方法，对于线性结构，这些方法都是简单实用而高效的方法，因而长期以来大跨度桥梁结构的抖振响应分析都是在频域内进行的。频域分析方法的局限性在于不能考虑结构的非线性因素以及气动非线性因素。Y. K. Lin 随机稳定理论是一种基于时域的分析方法，近年来，对于桥梁结构抖振响应时域分析，项海帆^[16]、Boonyapinyo V.^[65]、Xinzhong Chen、Masaru Matsumoto、Ahsan Kareem^{[72][73][74][75][76]}以及曹映泓^[90]、刘春华^{[102][103]}等作了系统的尝试与研究。

1.5 涡激振动

早在 1898 年，Strouhal 研究了风竖琴的现象，他通过实验发现当流体绕过圆柱体后，在尾流中将出现交替脱落的漩涡，并且漩涡脱落频率 f ，风速 v 和圆柱体的直径 d 之间有一定的关系：

$$S_i = \frac{fd}{v} \quad (1-17)$$

无量纲数 S_i 称为 Strouhal 数。Strouhal 数并非不变的常数，它随着 Reynold 数的变化而变化。

其他的钝体断面如方形、矩形或各种桥梁断面都有类似的漩涡脱落现象。当钝体断面受均匀流作用时，截面背后的周期性漩涡脱落将产生周期变化的空气作用力—涡激力。其涡激频率为：

$$f_v = S_i \frac{v}{d} \quad (1-18)$$

式中 d 为截面投影到与气流垂直的平面上的特征尺度。当被绕流的物体是一振动体系时，周期性的涡激力将引起结构的涡激振动，并且在漩涡脱落频率与结构的自振频率一致时将产生涡激共振。

漩涡脱落频率与风速呈线性关系，因此涡脱频率与结构某一频率共振的条件只在某一风速下能被满足，然而，一旦涡激共振产生，则结构的振动频率对漩涡的脱落频率有反馈的作用，这种反馈作用使得漩涡脱落的频率在相当长的风速范围内被结构的振动频率所“俘获”，从而产生“锁定”现象。

从涡激共振的表现形式来看，它是一种带有自激性质的强迫振动。涡激共振主要有五个方面的特征：首先它是一种较低风速下发生的有限振幅振动；只在某一风速区间内发生；最大振幅对阻尼有很大的依赖性；涡激响应对断面形状的微小变化很敏感；涡激振动可以激起弯曲振动，也可以激起扭转振动。

工程应用中，除了以上有关涡激共振的性质外，人们更关心的是涡振振幅的计算问题。而解决涡振振幅的关键问题是确定涡激力的解析表达式。至今，涡激力的经典解析表达式主要有以下几种：

简谐力模型—假定涡激力是和升力系数成正比的简谐力，这一模型的主要缺点是不能正确反映涡振振幅随风速的变化关系。

升力振子模型—二十世纪 60 年代，Scruton 提出升力振子模型，升力振子模型将升力系数考虑为随时间变化的函数，具有范德波尔振荡特征，小振幅时阻尼小，大振幅时阻尼大。这一模型的主要缺点是模型参数的确定需要大量的试验，而升力系数随时间的变化规律需要通过测压试验的数据来仔细分析，而测压时结构阻尼特性的影响使得难以得到理想的实验数据。

经验线性模型—Simiu 与 Scanlan 于 1986 年提出一种经验线性模型，这一模型假定一个线性机械振子给予气动激振力、气动阻尼以及气动刚度。该模型通过线性的函数来描述漩涡脱落这种非线性气动现象，带有一定的近似，且与简谐力模型一样不能解释锁定现象。

经验非线性模型—在经验线性模型的基础上，Ehsan 与 Scanlan 于 1990 年通过增加一个非线性的气动阻尼项，把涡激力的描述引入到非线性的范围内，提出了经验非线性模型，这一模型除了增加一个非线性阻尼项外，与经验线性模型没有本质上的区别。

广义经验非线性模型—经验非线性模型的计算结果与风洞试验结果有一定偏差，为了弥



补这种不足, Larsen 于 1995 年在经验非线性模型的基础上, 通过引入一个形状系数, 提出了广义经验非线性模型, 同经验非线性模型相比, 广义经验非线性模型的计算结果更加贴近风洞试验的试验结果。

为了解释锁定区内振动变化规律, 同济大学葛耀君、李永君建立了一种新的二维涡振计算模型^[101]。从锁定现象的机理入手, 该模型认为在锁定区内涡脱频率锁定于结构的自振频率, 不随风速而变化, 但漩涡移动折算频率却随风速的增加而增大, 这两个频率的几何平均值决定的涡激合力与涡激扭矩的作用频率。该模型通过引入“漩涡移动速度”这一重要概念对锁定现象的机理做出了较为合理的解释。

1.6 主要研究目的与内容

通过回顾大跨度桥梁在风荷载作用下静动力稳定及抖振响应的分析方法以及其中存在的问题, 本文试图建立一种物理意义明确的, 引进结构气动刚度与气动阻尼矩阵的方法, 继而将修正后的结构运动方程用于桥梁非线性抖振响应, 并在传统的静风稳定和颤振稳定分析模拟中研究非线性抖振的影响。

第二章详细分析现在桥梁颤抖振分析及静风稳定分析方法中存在的若干问题, 结合具体工程实例进行分析并提出桥梁抖振及静风稳定分析新的刚度修正及阻尼修正方法。

第三章详细阐述了本文所提出的频域抖振响应计算力学模型并将其应用到东海大桥与西堍门大桥的抖振响应计算中。在计算结果上, 与传统抖振计算的方法进行了对比与分析, 并与全桥气弹模型试验结果进行了比较。

第四章介绍了本文时域抖振计算模型, 以工程应用为背景, 详细探讨了大跨度桥梁抖振响应分析方法之间的差异以及频域、时域抖振响应计算结果的对比, 进而找出影响桥梁抖振响应计算精度的主要因素。

第五章提出本文时域自激力表达式中的非线性最优化方法及其在东海大桥与西堍门大桥颤振稳定分析中的应用。

第六章系统地研究了静力非线性迭代法、模态叠加法与动力有限元法三种理论模型在桥梁静风稳定分析中的应用, 并对脉动风引起的非线性抖振对静风稳定的影响进行了分析。

第七章对本文主要研究成果进行总结及对今后须要进一步研究的方向进行了展望。



第二章 气动刚度与气动阻尼确定

长期以来，人们在考虑桥梁风致动力响应以及风致静力响应时，都是把二者独立考虑，所采用的力学计算模型也互不相关。在静风稳定计算中，主要是采用三分力系数，而结构是否会发散的关键因素是三分力系数对结构扭转角度的导数，这个导数可以理解为广义的“气动导数”。在动力响应计算中，如果不考虑结构运动对风场的反馈作用，则 Davenport 抖振力表达式加上平均风荷载能近似表达结构所受风荷载。而考虑结构运动与风场反馈作用引起的附加力时，则采用 Scanlan 自激力表达式加上 Davenport 抖振力以及平均风荷载来描述全部风荷载。Scanlan 自激力表达式是基于试验的最小二乘法拟合结果。只要总的拟合方差足够小，我们可以认为这一表达式可以近似表示某一特定时段内结构所受的由于反馈引起的附加力时程，此时，我们不再关心表达式中某一单个拟合系数(气动导数)的物理意义。尽管在形式上，每个拟合系数(气动导数)都有其物理意义，即位移时程前的拟合系数表现为刚度而速度时程前的拟合系数表现为阻尼，然而在将这些拟合系数(气动导数)用于其它分析研究中如频域抖振响应与静风稳定时，则要求每一系数都能真实反映该运动状态(位移或速度时程)对总附加力(自激力)的单独贡献，否则导致不正确的计算结果。现在问题的关键是，我们根本无法证明每一拟合所得的气动导数在物理意义上的正确性，除非结构所受的自激力能且只能用所选用的运动状态来线性表达，而且无试验误差(此时拟合方差为 0)。正因为如此，基于准定常三分力的扭转发散静力计算模型与 Scanlan 颤抖振动力计算模型必然存在力学上的矛盾。而本章的目的是揭示这一矛盾，并提出一种新的力学模型将其应用到桥梁抖振计算与静风稳定分析中，这就是新的气动刚度计算模型。

2.1 非定常模型

风荷载作用下桥梁结构的运动方程为

$$M\ddot{\alpha} + C(t, \alpha)\dot{\alpha} + K(t, \alpha)\alpha = F(t) \quad (2-1)$$

由于桥梁所受的升力矩是与结构扭转姿态相关连的，因而结构在给定风速下的扭转运动必定带来有效刚度 K 值的变化，其修正量通常与风速的平方成正比。倘若修正方向是朝有效刚度减小的方向发展，则总会存在一个风速 U_{cr} 使得有效刚度矩阵 K 奇异，此时意味着结构完全失去扭转恢复力，在外荷载作用下必然出现发散。平均风效应相当于给结构增加了一个势流场，在重力场与附加势流场共同作用下，结构的刚度特性或者频率特性将随附加势流场的变化而变化，至于是增大还是减小或者是线性还是非线性关系则由实际的三分力特性决定。

同样，在风荷载作用下结构的阻尼也具有非线性时变特性，与刚度的修正相比，阻尼的影响因素更多，如竖向、侧向、扭转的速度以及扭转位移等。因而其修正也显得复杂得多。

要解决桥梁结构在风荷载作用下的静动力响应(颤振、抖振、涡振以及扭转发散等)，首先必须从其所受的风荷载着手进行研究，因此可以将风荷载作用下结构运动方程表达如下：

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F(X, \dot{X}, \ddot{X}, U_T) \quad (2-2)$$



式中 M 为结构质量矩阵, C 为结构阻尼矩阵, K 为结构刚度矩阵, F 为系统所受的风荷载列向量, X 为结构位移列阵, $X = \{x, y, z, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z\}^T$, U_T 为瞬时风速, 通常情况下 $U_T = U_T(x, y, z, t)$, 对于大跨度桥梁结构, 如果只考虑加劲梁竖向 (h)、侧向 (p) 及轴向扭转 (α) 运动对风荷载的影响, 且忽略加速度项的影响, 则式(2-2)可以重写为:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F(h, \dot{h}, p, \dot{p}, \alpha, \dot{\alpha}, U_T) \quad (2-3)$$

倘若式(2-3)右边的气动力可以分解为与结构运动状态无关连以及与结构运动状态有关连的两部分, 并分别用 F_U 与 F_{se} 表示, 则式(2-3)可以重写为:

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F_U(U_T) + F_{se}(h, \dot{h}, p, \dot{p}, \alpha, \dot{\alpha}, U_T) \quad (2-4)$$

不失一般性考虑无风偏角的情况, 风荷载作用下加劲梁上某一点的风荷载可以分解成三个方向的分力, 即阻力、升力与升力矩。

加劲梁上任意一点单位长度与结构运动状态无关的定常部分可以按风轴坐标系改写成如下三分力的形式:

$$D_U = \frac{1}{2} \rho U_T^2 C_D(\alpha_T) B \quad (2-5a)$$

$$L_U = \frac{1}{2} \rho U_T^2 C_L(\alpha_T) B \quad (2-5b)$$

$$M_U = \frac{1}{2} \rho U_T^2 C_M(\alpha_T) B^2 \quad (2-5c)$$

式中 U_T 为风速, ρ 为空气密度, α_T 为风攻角, B 为参考宽度, C_D 为阻力系数, C_L 为升力系数, C_M 为升力矩系数。

式(2-5)三式可以进一步按平均风 U , 顺风向脉动风 $u(t)$ 、竖向脉动风 $w(t)$ 展开为平均风荷载与脉动风荷载两部分, 其推导过程这里不再详述, 省略脉动风荷载部分的高阶项可得 Davenport 抖振力模型如下:

$$D_b(t) = \frac{1}{2} \rho U^2 B \left[2C_D \frac{u(t)}{U} + C_D' \frac{w(t)}{U} \right] \quad (2-6a)$$

$$L_b(t) = \frac{1}{2} \rho U^2 B \left[2C_L \frac{u(t)}{U} + (C_L' + C_D) \frac{w(t)}{U} \right] \quad (2-6b)$$

$$M_b(t) = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left[2C_M \frac{u(t)}{U} + C_M' \frac{w(t)}{U} \right] \quad (2-6c)$$

式中 C_L' 、 C_D' 、 C_M' 分别为升力、阻力、升力矩系数对攻角 α 的导数; U 为平均风速; u 、 w 分别为水平向及垂直向的脉动风速。

平均风荷载部分也同样可用三分力系数表示如下:

$$D_0 = \frac{1}{2} \rho U^2 C_D(\alpha_0) B \quad (2-7a)$$

$$L_0 = \frac{1}{2} \rho U^2 C_L(\alpha_0) B \quad (2-7b)$$

$$M_0 = \frac{1}{2} \rho U^2 C_M(\alpha_0) B^2 \quad (2-7c)$$

式中 α_0 为平均风攻角, 其它符号同前。

对于桥梁断面, 与运动状态相关连的非定常风荷载部分在与运动状态线性相关的假设下, 可用 Scanlan 自激力模型表示如下:

$$D_{ae} = \frac{1}{2} \rho U^2 (2B) \left[KP_1^* \frac{\dot{p}}{U} + KP_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 P_3^* \alpha + K^2 P_4^* \frac{p}{B} + KP_5^* \frac{\dot{h}}{U} + K^2 P_6^* \frac{h}{B} \right] \quad (2-8a)$$



$$L_{ae} = \frac{1}{2} \rho U^2 (2B) \left[KH_1^* \frac{\dot{h}}{U} + KH_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 H_3^* \alpha + K^2 H_4^* \frac{h}{B} + KH_5^* \frac{\dot{p}}{U} + K^2 H_6^* \frac{p}{B} \right] \quad (2-8b)$$

$$M_{ae} = \frac{1}{2} \rho U^2 (2B^2) \left[KA_1^* \frac{\dot{h}}{U} + KA_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 A_3^* \alpha + K^2 A_4^* \frac{h}{B} + KA_5^* \frac{\dot{p}}{U} + K^2 A_6^* \frac{p}{B} \right] \quad (2-8c)$$

式中 U 为平均风速； $K(K = \omega B/U)$ 为折算频率； H_i^* 、 P_i^* 、 A_i^* ($i=1\sim 6$) 为加劲梁断面颤振气动导数，在各级风速下可由风洞试验测得。

经过几个层次的简化与假设，结构在风场中所受荷载最终可以分解为平均风作用于刚体模型上的静风力、脉动风作用于刚体模型上的抖振力以及考虑结构运动状态关连的自激力三项，在给定风场前提下，三部分荷载中所需要的系数都可从风洞试验中得到。既然所受的荷载已确定，我们再回到上节所关心的问题即从运动方程着手研究稳定问题，对于某一模态，其运动可以简化为单自由度方程。以扭转振动为例，考虑到实验室的条件，忽略与侧向有关的气动导数，可得其运动方程如下：

$$I_m \ddot{\alpha} + c \dot{\alpha} + k \alpha = \rho U^2 B^2 \left[KA_1^* \frac{\dot{h}}{U} + KA_2^* \frac{B\dot{\alpha}}{U} + K^2 A_3^* \alpha + K^2 A_4^* \frac{h}{B} \right] + M_0 + M_b \quad (2-9)$$

式中 I_m 为扭转质量惯性矩； M_0 为平均风引起的升力矩； M_b 为脉动风引起的升力矩。其它符号同前，将与扭转运动关连的气动力移到方程的左边，可得：

$$I_m \ddot{\alpha} + (c - \rho U B^3 K A_2^*) \dot{\alpha} + (k - \rho U^2 B^2 K^2 A_3^*) \alpha = \rho U^2 B^2 \left[KA_1^* \frac{\dot{h}}{U} + K^2 A_4^* \frac{h}{B} \right] + M_0 + M_b \quad (2-10)$$

假设来流为均匀流场，且结构竖向运动被完全约束住，而平均风引起的升力矩项为一常数，只会引起初始攻角的变化，不会引起动力响应。因此只要方程右边的气动导数已考虑到平均风引起的攻角的影响(实际上试验测得的系数已经包含了这一影响)，则该项可以从方程右边拿去，于是上式可转化为如下非定常模型振动齐次方程：

$$I_m \ddot{\alpha} + (c - \rho U B^3 K A_2^*) \dot{\alpha} + (k - \rho U^2 B^2 K^2 A_3^*) \alpha = 0 \quad (2-11)$$

由此可得，按非定常模型计算的气动刚度 K_{us} 与气动阻尼 D_{us} 如下：

$$K_{us} = \rho U^2 B^2 K^2 A_3^* \quad (2-12)$$

$$D_{us} = \rho U B^3 K A_2^* \quad (2-13)$$

式中，下标 us 表示 unsteady—非定常。

在初始扰动下，其响应结果有三种情况：

情况一：($c - D_{us}$) > 0，($k - K_{us}$) > 0，此即一般的衰减运动。

情况二：($c - D_{us}$) < 0，($k - K_{us}$) > 0，此时结构呈现负阻尼状态，但并不失去恢复力，因而在扰动下的响应为振幅递增的动力失稳。

情况三：($k - K_{us}$) = 0，此时，不管 ($c - \rho U B^3 K A_2^*$) 是大于 0 还是小于 0，由于结构完全失去恢复力，因而在初始扰动下的响应将是一次性扭转发散，不再有周期性的运动，对应的失稳模式为静力失稳。

对于竖向运动方程及其静动力失稳的条件，完全可以用与扭转相同的方式导出。

2.2 准定常模型

从式(2-11)可以看出，结构是否出现静力扭转发散，完全只与刚度的修正项有关，而对于一特定的桥梁断面，决定刚度修正项的因素只有两个，即风速 U 与扭转静位移 α 。假定考虑结构扭转位移变化的三分力满足准定常假设，即气动力仅与当前结构姿态有关，则运动方程式(2-1)可以表示为：



$$I_m \ddot{\alpha} + c \dot{\alpha} + k \alpha = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 C_M(\alpha_0 + \alpha) + M_b \quad (2-14)$$

为了便于分析，可将升力矩系数展开成泰勒级数并截取线性项如下：

$$C_M(\alpha_0 + \alpha) = K_M(\alpha_0) \cdot \alpha + C_{M0} \quad (2-15)$$

式中， $K_M(\alpha)$ 表示三分力曲线的切线刚度，将式(2-15)代入式(2-14)可得：

$$I_m \ddot{\alpha} + c \dot{\alpha} + k \alpha = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 [K_M(\alpha_0) \cdot \alpha + C_{M0}] + M_b \quad (2-16)$$

对于某一断面形式已知的桥梁， $K_M(\alpha)$ 为确定的函数， C_{M0} 为攻角是 $\alpha_0(x)$ 时的升力矩系数。

将式(2-16)中与运动相关连的项移到左边得到：

$$I_m \ddot{\alpha} + c \dot{\alpha} + [k - \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 K_M(\alpha_0)] \alpha = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 C_{M0} + M_b \quad (2-17)$$

式(2-17)中右边常数项与抖振力项，在进行运动稳定性分析时可以忽略，从而可以得到准定常模型振动齐次方程：

$$I_m \ddot{\alpha} + c \dot{\alpha} + [k - \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 K_M(\alpha_0)] \alpha = 0 \quad (2-18)$$

由此可得按准定常模型计算的气动刚度如下：

$$K_{qs} = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 K_M(\alpha_0) \quad (2-19)$$

式中下标 qs 表示 quasi-steady—准定常。

当 $k - K_{qs} = 0$ 时，结构完全失去恢复力，对应的失稳模式为静力扭转发散。

2.3 气动刚度计算

理论上讲，这两个力学模型除了非定常假定与准定常假定之外，计算所得的结构丧失恢复力临界风速应当基本相同，从工程实用考虑，其计算结果的误差至少必须在一个可以接受的范围之内，否则其中的一个模型必然会有问题。

现以东海大桥主航道桥节段模型试验为例，比较非定常模型与准定常模型的差异。

东海大桥主航道桥是一主跨 420 m 的双塔双索面斜拉桥，主梁采用钢—混凝土结合的箱形断面。在风洞试验中，其节段模型系统总扭转质量为 0.2992Kg·m²，扭转刚度为 241.2768N·m/rad，按两种力学模型计算所得的气动刚度如图 2-1 和表 2-1 所示：

表 2-1 东海大桥气动刚度 (N·m/rad)

风速 (m/s)	2	4	6	8	10	12	14	15	16	17
非定常	-0.196	0.342	2.826	5.985	9.917	14.408	20.719	22.650	25.196	24.556
准定常	0.620	2.481	5.582	9.924	15.507	22.330	30.393	34.890	39.697	44.814
相差 (%)	131.6	86.2	49.4	39.7	36.0	35.4	31.8	35.1	36.5	45.2