高中数学
课本中的数学思想方法

必修1

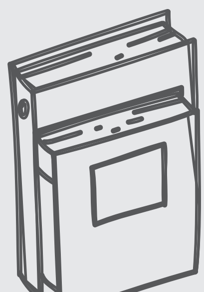
- 基于新课标数学大纲，解读典型例题
- 依据课时内容，归类数学思想方法和解题策略
- 经典训练，助你练出好成绩

主编◎王国江 副主编◎张倬霖

上海社会科学院出版社

高中数学
课本中的数学思想方法

必修
1



主编◎王国江　副主编◎张倬霖

上海社会科学院出版社
SHANGHAI ACADEMY OF SOCIAL SCIENCES PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高中数学课本中的数学思想方法．必修1/王国江主编．—上海：上海社会科学院出版社，2018
ISBN 978－7－5520－2261－2

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①王…　Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第057047号

高中数学课本中的数学思想方法(必修1)

主　　编：王国江
副 主 编：张倬霖
责任编辑：何红燕　陈如江
封面设计：郁心蓝
出版发行：上海社会科学院出版社
上海顺昌路622号　邮编200025
电话总机021－63315900　销售热线021－53063735
http://www.sassp.org.cn　E-mail:sassp@sass.org.cn
照　　排：上海碧悦制版有限公司
印　　刷：上海万卷印刷股份有限公司
开　　本：787毫米×1092毫米　1/16开
印　　张：10.25
字　　数：231千字
版　　次：2018年7月第1版　　2018年7月第1次印刷

ISBN 978－7－5520－2261－2/G·719　　定价：38.00元

前　言

本书向广大读者介绍了高中数学课本中常见的数学思想方法与解题策略，由杨浦区教师进修学院教研员、正高级教师、特级教师王国江老师任主编，上海市行知中学数学教研组组长、首席教师、高级教师张倬霖老师任副主编。本书所设栏目：方法简述、易错解读、经典训练，行之有效地将教科书上的学术形态转化为学生可以理解的学习形态，有助于帮助学生理解、体会、巩固、提高。按课本内容分为必修一至五共五个分册，由区正高级教师、特级教师、首席教师、学科带头人和骨干教师进行编写。

作者按照高中数学的教学内容，根据问题的不同类型分门别类，分章节从理论上阐述了数学的解题方法，对教材内容以典型的实例进行了翔实、细致的分析、解答和点评。依据数学教材的每一节、每一课时内容，按小节雕刻、整章梳理、方法呈现、循序渐进、有机磨合、思想渗透、能力提升，这样，给读者能对照教材、学习阅读带来了方便，更是接“地气”之作，避免了因按传统的大节编写、内容跨度跳跃较大而带来阅读上的麻烦，本书凝聚了作者多年的心血，是作者多年对解题理论研究、探索、实践的结晶。

基于新课标与数学学科核心素养的数学解题研究，近年已引起众多数学教育工作者的关注与重视，“知识”是基础，“方法”是手段，“思想”是深化。运用数学思想方法去解决数学问题，通常要从多角度、多方位去思考，学会举一反三，触类旁通，也是一门理论。对问题探究的不同途径和方法加以甄选，最后得出认知层次较高的、比较完善的结论，更能培养学生的发散思维和探究创新能力，有助于培养学生自主学习、自主探究的科学精神，激发学生的学习热情和兴趣，养成独立思考的良好习惯是本书的又一特色。

本书是对教材的二次开发、再加工、再创造的过程，对提高学生分析问题、解决问题、自主探究能力以及数学创新能力具有积极作用，对提升考生的应试能力具有较好的参考价值。

参与本书编写的人员，他们来自杨浦区王国江数学名师工作室、上海市教委教研室项目组（项目：基于核心素养的“创智课堂”教学实践研究，编号：JX09JC01201605）、宝山区高中数学研究团队。

上海市杨浦教师进修学院高中教研员、特级教师、正高级教师
王国江

目录

第一章　集合与函数概念

第二章　基本初等函数

第三章　函数的应用

第四章　导数及其应用(1)(选学)

第五章　导数及其应用(2)(选学)

第六章　常用逻辑用语(选学)

第一章

集合与函数概念

1.1 集合

1.1.1 集合

集合是一个不能定义的原始概念,如平面几何中的“点”“线”等概念一样,只能加以描述性地解释与说明,构成集合的元素必须满足确定性、无序性和互异性.集合可用列举法、描述法、文氏图法、特定字母等表示法.

方法简述

1. 分类讨论思想

在研究与解决数学问题时,可根据数学对象的本质属性的相同和不同,确定同一划分标准,将数学对象区分为不同种类,然后逐类进行研究与求解,并综合得出答案,从而达到研究与解决问题的目的,这种思想就是分类讨论的思想.

分类讨论思想的实质是一种逻辑划分,这个划分标准应该是科学的、合理的,要求满足互异、无漏、最简的原则,也就是说:(1)对什么“东西”分类,即确定分类对象;(2)按什么分类,即选择分类的标准;(3)分成几类,即确定分类的结果.

例1 确定整数 x,y,使 $\{2x,x+y\}=\{7,4\}$.

点拨 在集合相等的定义基础上,利用集合元素的确定性和互异性进行分类讨论.

解答 由集合相等的定义,可知 $\begin{cases}2x=7,\\x+y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x=4,\\x+y=7.\end{cases}$

由 $\begin{cases}2x=7,\\x+y=4\end{cases}$ 知,$x=\dfrac{7}{2}$(不合题意,舍去).

由 $\begin{cases}2x=4,\\x+y=7\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=5.\end{cases}$

综上所述整数 x,y 分别为 2,5.

反思 本题对于求集合参数的问题,可依据“无序性”进行分类,再利用已知条件进行检验.需要注意的是,集合元素具有确定性、无序性和互异性.

例2 若集合 $A=\{x\mid ax^2+4x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$ 是非空集合,求实数 a 的取值范围.

点拨 集合 A 中的元素是方程 $ax^2+4x+1=0$ 的解,因为 A 为非空集合,所以方程有实根,其解的情形由于 a 的取值不同可将方程化为一次方程、二次方程进行讨论.

解答 若 $a=0$,则 $x=-\dfrac{1}{4}$,

$A=\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$ 是非空集合,故 $a=0$ 满足题意.

若 $a\neq0$,则 $ax^2+4x+1=0$ 有实数解,

$\because\Delta\geqslant0$,即 $16-4a\geqslant0$,

$\therefore a\leqslant4$ 且 $a\neq0$.

综上所述,$a\leqslant4$.

反思　该题将集合 A 是非空集合转换为不同类型方程求解的问题来讨论.这里用到的分类讨论的解题思想也是常用的方法,千万不能认为集合中的方程只是一元二次方程.

2. 反证法

反证法也是数学证明中常用的方法,一般步骤:第一步,假设证明的的结论不成立,即假设结论的反面成立.第二步,从这个假设出发,结合已知条件,经过合理的推理论证,得出矛盾.如果结论的反面只有一种情况,则只需推翻它即可,这种证法就是通常所说的归谬法;如果结论的反面不止一种,则须逐一推翻以达到全部推翻,这种证法就是通常所说的枚举法.第三步,根据推出的矛盾从而判断假设不正确,于是可判定原命题的结论正确.

如证明某一量 $a\geqslant 0$,即 a 不可能为负数,若从正面证明较为困难时,便可使用反证法,即先假设 a 为负数,然后推出矛盾.

例 3　集合 A 满足条件:若 $a\in A,a\neq 1$,则 $\frac{1}{1-a}\in A$,求证:集合 A 不可能为单元素集合.

点拨　首先不妨在证明前,先用取特殊值的方法,弄明白 $a\in A,a\neq 1$,则 $\frac{1}{1-a}\in A$ 的含义.如取 $a=2$,则 $\frac{1}{-1}=-1\in A$,当 $a=3$ 时,则 $\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}\in A$,等等.在明确了题干概念后,证明时可采用反证法.

解答　假设 A 为单元素集合,若 $a\in A,a\neq 1$,则 $\frac{1}{1-a}\in A$ 成立,那么有 $\frac{1}{1-a}=a$.

得 $a^2-a+1=0$ 有实根,但是 $\Delta=(-1)^2-4=-3<0$,可得此方程无实根,两者矛盾.

故 A 不可能是单元素集合.

反思　本题可以进一步的探究,求出一个满足条件的 A 集合.

由 $2\in A,2\neq 1$,则 $\frac{1}{1-2}=-1\in A$ 成立,

而 $\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$.

又由 $\frac{1}{2}\in A,\frac{1}{2}\neq 1,\therefore \frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in A$.

因此,求出的 $A=\left\{2,-1,\frac{1}{2}\right\}$.当然,这样的集合 A 不是唯一的.

3. 语言转化法

集合中的语言有自然语言、符号语言和图形语言.有些集合的语言比较抽象且不易被理解,那就要根据问题的需要将其转化为易于理解的语言来表述该问题,这样有利于问题的解决.

集合中的语言是可以相互转化的,转化的方式如下所示.

$$\text{符号语言}\ \underset{\boxed{\text{抽象化}}}{\overset{\boxed{\text{具体化}}}{\rightleftarrows}}\ \text{自然语言}\ \underset{\boxed{\text{文字化}}}{\overset{\boxed{\text{形象化}}}{\rightleftarrows}}\ \text{图形语言}$$

例 4　已知集合 $A=\left\{m\,\middle|\,y=\frac{12}{m}\in\mathbf{N},m\in\mathbf{N}\right\}$,用列举法表示集合 A.

点拨　根据对于集合元素特征的描述,可以得到 m 和 y 应当都是 12 的因数,从而可以

通过列举的方法得到结果.

解答 $y=1$ 时,$m=12$;$y=2$ 时,$m=6$;

$y=3$ 时,$m=4$;$y=4$ 时,$m=3$;

$y=6$ 时,$m=2$;$y=12$ 时,$m=1$.

所以 $A=\{1,2,3,4,6,12\}$.

反思 准确理解集合描述法中的语言,可以帮助我们准确理解和分析问题.

例 5 用列举法表示下列集合:

$A=\{(x,y)\mid x+y=6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$;

$B=\{x\mid x=|x|,x\in\mathbf{Z}$ 且 $x<5\}$;

$C=\{xy\mid x,y\in\{1,2,3,4\}\}$.

点拨 要善于将集合中抽象的数学语言转化为自然语言,集合 A 中给出的符号语言用自然语言表述就是直线 $x+y=6$ 上自然数点对的坐标构成的集合;集合 B 中的符号语言用自然语言表述就是大于等于 0 且小于 5 的整数构成的集合;集合 C 的符号语言用自然语言表述为两个整数的乘积,其中这两个整数可以在 1,2,3,4 中任取.

解答 (1)点 (x,y) 满足条件 $x+y=6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}$,

则有 $\begin{cases}x=0,\\y=6.\end{cases}\begin{cases}x=1,\\y=5.\end{cases}\begin{cases}x=2,\\y=4.\end{cases}\begin{cases}x=3,\\y=3.\end{cases}\begin{cases}x=4,\\y=2.\end{cases}\begin{cases}x=5,\\y=1.\end{cases}\begin{cases}x=6,\\y=0.\end{cases}$

$\therefore A=\{(0,6),(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(6,0)\}$.

(2)$x=|x|\Rightarrow x\geqslant 0$. $\because x<5,x\in\mathbf{Z},\therefore x=0,1,2,3,4,\therefore B=\{0,1,2,3,4\}$.

(3)

y \ x	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

由集合元素的互异性得:$C=\{1,2,3,4,6,8,9,12,16\}$.

反思 语言之间的转化务必理解准确到位,否则会不利于问题的解决.另外本题较好地考查了对集合中元素及集合“表示法”的理解与领悟,通过语言的转化还提供了多层面理解问题的思维方式.

4. 形式统一法

在判定元素与集合的关系时,很多同学都采用特殊值法来判定,这种做法不仅运算量大、准确度差,而且逻辑性也不强.是否有更简便易行的方法?当然有!一般地,需要将元素的基本形式统一起来,同一题中出现的集合用相同形式表示,判断时就非常方便了.

例 6 集合 $P=\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$,$Q=\{x\mid x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,设 $a\in P,b\in Q$.问 $a+b$ 是否属于 Q,为什么?

点拨 判断元素与集合的关系要注意集合中元素的属性特点,如果判断对象具有这种属

性，则它就属于该集合，否则就不属于.

由 $a\in P$ 的含义可设 $a=3k_1,k_1\in\mathbf{Z}$；由 $b\in Q$ 可设 $b=3k_2+1,k_2\in\mathbf{Z}$. 运算 $a+b$ 是否具备集合 Q 中的特征，即 3 乘以整数加 1.

解答　由上分析得 $a+b=3k_1+3k_2+1=3(k_1+k_2)+1$.

又因为 $k_1\in\mathbf{Z},k_2\in\mathbf{Z}$，所以 $k_1+k_2\in\mathbf{Z}$.

故 $a+b\in Q$.

反思　本例是集合对某种运算是否“封闭”的问题，即形式统一，通常是将运算后得到的结果化为集合中运算特征形式 $3k+1$，加以判断.

例 7　已知集合 $M=\{x\mid x=a+b\sqrt{3},a,b\in\mathbf{Z}\}$.

(1)若 m 是整数，试判断 m 是否为集合 M 的元素；

(2)求证：若 $x_1,x_2\in M$，则 $x_1x_2\in M$.

点拨　要判断元素是否属于集合 M，关键是看元素能否写成集合中元素的形式；反之如果元素属于集合，那么该元素一定能表示成集合中元素的形式，此题主要是看任何整数或 $x_1\cdot x_2$ 能否表示成“$m+n\sqrt{3},m,n\in\mathbf{Z}$”的形式.

解答　(1)$\because m\in\mathbf{Z}$，$\therefore m=m+0\cdot\sqrt{3}$，其中 $m\in\mathbf{Z},0\in\mathbf{Z}$.

$\therefore$整数 $m\in M$.

(2)证明：任意 $x_1,x_2\in M$，$\therefore x_1=m_1+n_1\sqrt{3},x_2=m_2+n_2\sqrt{3}$ 且 $m_1,m_2,n_1,n_2\in\mathbf{Z}$，

$$\begin{aligned}\therefore x_1x_2&=(m_1+n_1\sqrt{3})(m_2+n_2\sqrt{3})\\&=m_1m_2+(m_2n_1+m_1n_2)\sqrt{3}+3n_1n_2\\&=(m_1m_2+3n_1n_2)+(m_2n_1+m_1n_2)\sqrt{3}\end{aligned}$$

又因为 $m_1m_2+3n_1n_2\in\mathbf{Z},m_2n_1+m_1n_2\in\mathbf{Z}$，

$\therefore x_1\cdot x_2\in M$.

反思　此题将元素与集合的关系反复运用，只要把握好关系本身——形式统一，万变不离其宗.

易错解读

易错点 1　“点”集合与“数”集合区别在什么地方，如何辨别？

解析　点集的代表元素是实数点的坐标，而数集的代表元素是数.

如集合 $A=\{x\mid y=4x^2+3,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=4x^2+3,x\in\mathbf{R}\}$，$C=\{(x,y)\mid y=4x^2+3,x\in\mathbf{R}\}$三个集合表示的意义是不同的. A 集合中的元素是 x，它是函数自变量；B 集合中的元素是 $y\geqslant 3$，是函数值的集合；而 C 集合中的元素是二次函数图象的所有点，是点的坐标组成的集合，绝不可混淆.

例 8　方程组 $\begin{cases}x+y=2,\\x-y=-2\end{cases}$ 的解集可用下面集合表示的是________.

①$\{x=0,y=2\}$；　②$\{0,2\}$；　③$\{(0,2)\}$；　④$\{(x,y)\mid x=0$ 或 $y=2\}$；

⑤$\{(x,y)\mid x=0$ 且 $y=2\}$；　⑥$\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}\right\}$.

解答 用集合表示时,首先要看用什么方法来表示集合,其次要看清集合中的元素是什么. 方程组的解 $\begin{cases}x=0,\\y=2\end{cases}$ 是一组数对(0,2),所以可表示为{(0,2)};也可用特征性质描述法表示 $\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}\right\}$. 又因为⑤与③相同,故选③⑤⑥.

反思 本题易出错且难以理解的是④,由于表示集合的代表元素也是数对(x,y),因而该集合表示的是直角坐标系下的点集,但是 $x=0$ 和 $y=2$ 之间用"或"连接,说明它们之间是并列关系,所以该集合表示直线 $x=0$ 与 $y=2$ 上的所有的点的集合.

易错点 2 忽略集合中元素的"三性"——确定性、互异性、无序性.

例 9 已知集合 A,B 都有 3 个元素,集合 $A=\{a,a+d,a+2d\}$ 与 $B=\{a,aq,aq^2\}$ 相同,求实数 q 的值.

某同学给出的解法:由题意得 $a+d=aq$ 且 $a+2d=aq^2$,解方程得 $q=1$. 以上解法是否正确?为什么?

解答 不正确,本题解答未考虑集合的元素具有"无序性",是初学集合时极易犯的错误,而直接错误认为这两个集合相同,即其对应元素相等,解出 q 后亦未检验,此时的元素是否满足"互异性"还不知道.

正确解答:由题意得 $\begin{cases}a+d=aq,\\a+2d=aq^2.\end{cases}$ ① $\begin{cases}a+d=aq^2,\\a+2d=aq.\end{cases}$ ②

由①得 $q=1$,但此时 $aq=aq^2=a$,不满足互异性,故舍去.

由②得 $q=1$(舍)或 $q=-\dfrac{1}{2}$,经检验符合,因此 $q=-\dfrac{1}{2}$.

经典训练

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x+m=0,x\in\mathbf{R}\}$有两个不同的元素,则集合 A 中所有元素的和为________________.

2. 集合 $M=\{3,x,x^2-2x\}$中,x 满足的条件是________.

3. 若集合 $M=\{x|x^2+(m-1)x+n=0\}$ 中仅有一个元素 m,则 $m=$________,$n=$________.

4. 集合$\left\{x\middle|x=\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{|b|}{b}+\dfrac{|c|}{c}+\dfrac{abc}{|abc|},a,b,c\in\mathbf{R},abc\neq0\right\}$中有________个元素.

5. 已知集合 $A=\{a,b,c\}$中的 3 个元素分别是$\triangle ABC$ 的三边长,那么$\triangle ABC$ 一定不是(　　).

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

6. 给出下列五种说法:

①$\{\varnothing\}$是空集;　②$\{0\}$是空集;　③若 $a\in\mathbf{N}$,则$-a\notin\mathbf{N}$;

④$\varnothing\in\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$;　⑤方程组$\begin{cases}x-y=1,\\x+y=1\end{cases}$的解集是$\{1,0\}$.

其中正确的是(　　).

A. ①③⑤　　B. ①②③　　C. ②③④　　D. ④

7. 给定集合 $M=\{x\mid x=3m+1,m\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{y\mid y=3n+2,n\in\mathbf{Z}\}$，若 $x_0\in M$，$y_0\in P$，则可以确定的关系是（　　）.

A. $x_0+y_0\in P$　　B. $x_0-y_0\in M$　　C. $x_0y_0\in P$　　D. $x_0y_0\in M$

8. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中只有一个元素，求 a 的值，并求出这个元素；

(2)若 A 中至少有一个元素，求 a 的取值范围.

9. 当正整数集合 A 满足“若 $x\in A$，则 $10-x\in A$”时，

(1)试写出只有一个元素的集合 A；

(2)试写出只有两个元素的集合 A；

(3)这样的集合 A 至多有多少个元素？

1.1.2 集合之间的关系

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任意一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫作集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$；若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则$A\subsetneqq B$.

方法简述

1. 数形结合思想

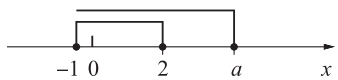
在数学问题的解决过程中，将抽象的数学语言与直观的图形结合起来，使"数"的问题，借助"形"去观察，而"形"的问题，借助"数"去思考，实现抽象思维和形象思维的有机结合，使抽象概念与具体图形相互关联和转化，数形结合思想是解决数学问题的有效途径. 数形结合思想解题的基本思路："形"中觅"数"，即将图形信息部分或全部转换成代数信息，削弱或清除"形"的推理部分，使要解决的问题转化为数量关系的讨论；"数"上构"形"，即依据数的结构特征，构造出与之相适应的几何图形，并直观利用图形的特征和规律，解决数的问题. 通过以数示形，以形示数，数形互助来求解.

例 1 已知集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid x\leqslant a\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

点拨 在数轴上把集合 A 与 B 中的不等式的解表示出来，再紧扣子集定义，那么实数 a 的范围便一目了然.

解答 $\because A\subseteq B$，$\therefore A$ 是 B 的子集.

如图所示，故 $a\geqslant 2$.



例 1 答图

反思 要注意验证实数 a 的值，能否取到集合 A 中的元素，即不等式 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 解的右端点 2 的值，含该端点与否事关重要，否则会前功尽弃.

2. 分类讨论思想

例 2 设集合 $A=\{x\mid x^2-1=0, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x^2-2ax+b=0, x\in\mathbf{R}\}$，若 $B\subseteq A$，且 $B\neq\varnothing$，求 a，b 的值.

点拨 由于 $B\subseteq A$，且 $B\neq\varnothing$，集合 B 可分$\{1\}$；$\{-1\}$；$\{-1,1\}$三种情况进行分类讨论.

解答 由已知得：集合 B 可能是$\{1\}$；$\{-1\}$；$\{-1,1\}$.

当 $B=\{1\}$时，方程 $x^2-2ax+b=0$ 有相等的实根 1.

$\therefore \begin{cases}\Delta=4a^2-4b=0,\\ 1-2a+b=0,\end{cases}$ 解方程组得 $\begin{cases}a=1,\\ b=1.\end{cases}$

当 $B=\{-1\}$时，方程 $x^2-2ax+b=0$ 有相等的实根-1.

$\therefore \begin{cases}\Delta=4a^2-4b=0,\\ (-1)^2+2a+b=0,\end{cases}$ 解方程组得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=1.\end{cases}$

当 $B=\{-1,1\}$时，方程 $x^2-2ax+b=0$ 有两个不相等的实根 1 与-1.

$\therefore \begin{cases}(-1)^2+2a+b=0,\\ 1^2-2a+b=0,\end{cases}$ 解方程组得 $\begin{cases}a=0,\\ b=-1.\end{cases}$

综上所述 a，b 的值分别为 $\begin{cases}a=1,\\ b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1,\\ b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0,\\ b=-1.\end{cases}$

反思 先将集合 A 用列举法表示出来，由于集合 B 是集合 A 的子集，其所有元素都来源

于集合 A,因此,只需要将集合 A 的元素全部求出,再讨论集合 B 的各种可能,再逐一求出适合条件的 a 值即可.

3. **特殊值法**

适当选取符合题目条件的某些特殊值,通过运算、推理或验证,能确定问题的正确答案或否定错误结论,实现简化思维过程、降低推算难度、探索解题思路、寻求解题途径、完善解题过程的目的.特殊值法是探索一般性问题的重要方法之一,在特殊情况下的解答过程中,常常蕴含着一般性问题的解题途径和思路.

例 3 已知集合 $M=\{x\mid x=(2n+1)\pi,n\in\mathbf{Z}\}$ 与集合 $N=\{x\mid x=(4k\pm1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,则(　　).

A. $M=N$　　B. $M\supsetneqq N$　　C. $M\subsetneqq N$　　D. $M\neq N$

点拨 要研究集合 N 与 M 的关系,可以从集合 M,N 中的元素特征入手,取一些特殊整数值,从而不难发现它们的关系.

解答 由 $n,k\in\mathbf{Z},M=\{\cdots,-5\pi,-3\pi,-\pi,\pi,3\pi,5\pi,\cdots\}$,

$N=\{\cdots,-5\pi,-3\pi,-\pi,\pi,3\pi,5\pi,\cdots\}$,故 $M=N$.

反思 通过列举一些满足条件的多个特殊值,就可发现集合中的元素之间所具有的关系,这种以特殊取代一般的方法,在解选择、填空题时,也是最常用的方法之一.

例 4 试确定下列每组两个集合的包含关系或相等关系:

(1)$A=\{n\mid n=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$与 $B=\{m\mid m=2p-1,p\in\mathbf{Z}\}$;

(2)$C=\{n\mid n=2k+1,k\in\mathbf{N}^*\}$与 $D=\{m\mid m=2p-1,p\in\mathbf{N}^*\}$.

点拨 通过对集合 A 与 B,C 与 D 中元素的特征分析,k 取一些特殊的整数值来"比较"集合 A 中元素与集合 B 中元素的"多少",研究集合 A 与 B,C 与 D 的关系.

解答

(1)如果 $n=2k+1\in A$,那么存在 $k\in\mathbf{Z}$,使 $n=2k+1=2(k+1)-1$,

而 $k+1\in\mathbf{Z}$,$\therefore n\in B$,

因此 $A\subseteq B$.

反过来,如果 $m=2p-1\in B$,那么存在 $p\in\mathbf{Z}$,使 $m=2p-1=2(p-1)+1$,

而 $p-1\in\mathbf{Z}$,$\therefore m\in A$,

因此 $B\subseteq A$.

综上所述,$A=B$.

(2)如果 $n=2k+1\in C$,那么存在 $k\in\mathbf{N}^*$,使 $n=2k+1=2(k+1)-1$,

而 $k+1\in\mathbf{N}^*$,$\therefore n\in D$,

因此 $C\subseteq D$.

反过来,$\because 1\in D$ 但 $1\notin C$,$\therefore D$ 不是 C 的子集.

综上所述,$C\subsetneqq D$.

反思 本题关键是集合 A 中的元素 $2k+1$ 是奇数,而集合 B 中的元素也是奇数,所以集合 A 与集合 B 相等;集合 C 中的元素中最小值为 3,而集合 D 中最小值为 1,所以集合 C 与集合 D 不相等.

4. **定义法**

数学中的定理、性质、公式、法则都是由定义和公理推演而得到的，直接运用定义分析来解决问题便是最直接、最基本、最有效的方法之一，也是研究数学问题的重要途径.

定义法的基本思路：分析题设条件与求解目标；研究题目中所包含的数学概念与关系；运用数学有关定义将题设条件向解题目标转化.

例5 若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

点拨 本题应紧扣子集的定义，$A\subseteq B$ 也就是说集合 A 中的每一元素，即集合 A 中的任意元素或说是集合 A 中的所有元素都在 B 中.

解答 任意元素 $a\in A$，由 $A\subseteq B$，则 $a\in B$.

又 $\because B\subseteq C$，$\therefore a\in C$，$\therefore A\subseteq C$.

反思 关键要把握子集定义中"任意"的含义，任意的含义是指集合 A 中不存在那样一个元素不在集合 B 中，或者说集合 A 中的所有元素都在集合 B 中；至于集合 B 中的元素是否在集合 A 中，与解决本题的关系不大，所以可以不予考虑.

例6 试写出满足 $\{1,2\}\subsetneqq X\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 X 的所有形式.

点拨 由子集定义可知，集合 X 中至少含有元素1，2，再由 $X\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，即可求得集合 X.

解答 $\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,2,5\}$，$\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,3,5\}$，$\{1,2,4,5\}$，$\{1,2,3,4,5\}$.

反思 若 $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}\subseteq A\subseteq\{a_1,a_2,\cdots,a_m,a_{m+1},\cdots,a_n\}$（$m,n\in\mathbf{N}$，且 $m\leqslant n$），则集合 A 的个数为 2^{n-m}. 依据子集的概念，判定集合 X 含有元素的可能情况，并一一列举出来，谨防遗漏. 一般含有 n 个元素的集合的子集的个数为 2^n，其真子集为 2^n-1，非空真子集的个数为 2^n-2.

5. **枚举法**

枚举法也称列举法，就是把题目中的条件（元素）或关系，经过归纳、整理后一一列举出来进行分析、研究的方法. 该方法的优点：它可将较抽象、较复杂的问题具体化、直观化、简单化，从而使数学问题得以顺利解决. 例如，集合表示法中的列举法就是将集合中的元素一一列举出来，从而使元素的个数，元素的特征都一目了然，这样使求解与运算更方便.

例7 已知集合 $M=\{0,1,2\}$，$N=\{x\mid x\in M, x\in\mathbf{N}^*\}$，$Q=\{x\mid x\subseteq M\}$，试判断 N 与 Q 的关系.

点拨 从题目所给的条件可知集合 M，N，Q 之间的关系似乎不很明显，如果将集合 N，Q 中的元素，用列举法表示出来，再去研究它们的关系，就非常容易了.

解答 $\because M=\{0,1,2\}$，$N=\{x\mid x\in M, x\in\mathbf{N}^*\}=\{1,2\}$，

$Q=\{x\mid x\subseteq M\}=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$，

$\therefore N\in Q$.

反思 集合的元素被一一列举出来后，还要弄清集合 Q 中元素的构成，它是以"集合"为元素的新的集合，用"$\in$"或"$\notin$"，还是用"$\subsetneqq$""$\subseteq$"或"$=$"就清楚了.

例8 若集合 M 同时满足：①$M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$；②若 $a\in M$，则 $6-a\in M$. 求非空集合 M