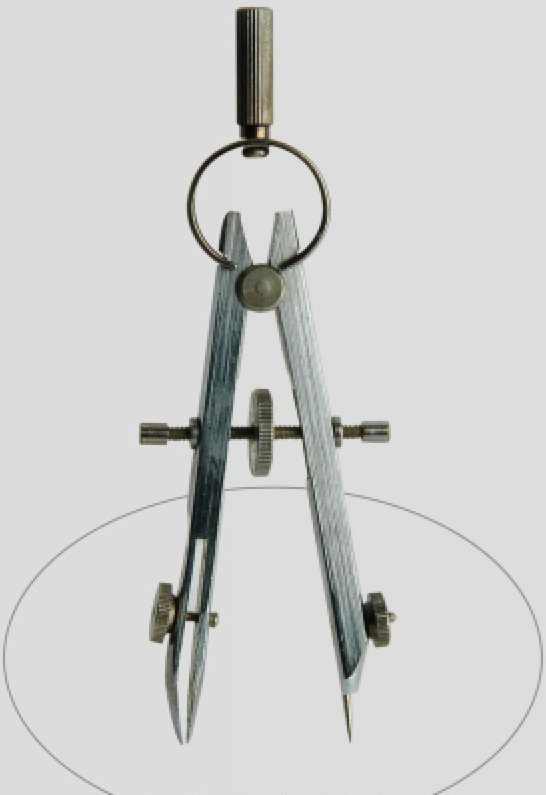
山东省示范校深化教学改革课程建设——校本教材

中等职业学校应用数学

ZHONGDENGZHIYEXUEXIAOYINGYONGSHUXUE

主 编 杨久磊



天津出版传媒集团

天津科学技术出版社

山东省示范校深化教学改革课程建设——校本教材

中等职业学校应用数学

主编　杨久磊

天津出版传媒集团

天津科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

中等职业学校应用数学 / 杨久磊主编. —天津：天津科学技术出版社，2019.9

ISBN 978-7-5576-6840-2

Ⅰ. ①中… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①应用数学-中等专业学校-教材 Ⅳ. ①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 142223 号

中等职业学校应用数学

ZHONGDENG ZHIYE XUEXIAO YINGYONG SHUXUE

责任编辑：石 崑

责任印制：兰 毅

出 版：天津出版传媒集团 / 天津科学技术出版社

地 址：天津市西康路 35 号

邮 编：300051

电 话：(022)23332369(编辑部)

网 址：www.tjkjcbs.com.cn

发 行：新华书店经销

印 刷：莒南县汇源印务有限公司

开本 787×1092 1/16 印张 11.25 字数 200 000

2019 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

定价：40.00 元

编委会

主　任　张波英　严汝合

副主任　薛会友　沈文祝　刘　杰

委　员　陈长亮　刘振飞　孙运启　左振硕　薄福光
　　　　刘祥军　孟祥军　刘晓东　张　斌

主　编　杨久磊

副主编　彭春永　刘　华　赵慧颖　张枫琳

参　编　朱孔军　张守余　徐洪友　王一祥　赵树巧
　　　　徐　伟　王　迪　闫晓荣　程莉棋　朱晓云
　　　　杨海帆　代玉勤

前　言

本套教材是根据教育部确定的中等职业学校专业技能型紧缺人才培养的指导思想编写的,教材以提高学习者的职业实践能力和职业素养为宗旨,倡导以学生为本位的教育培训理念和建立多样性与选择性相统一的教学机制。总通过综合和具体的职业技术实践活动,帮助学生积累实际工作经验,突出职业教育的特色,全面提高学生的职业道德、职业能力和综合素质。

专业技能型紧缺人才培养培训的基本原则是:

1.以培养全面素质为基础,以培养能力为本位。

2.以企业需求为基本依据,以就业为导向。

3.适应企业技术发展,体现教学内容的先进性和前瞻性。

4.以学生为主体,体现教学组织的科学性和灵活性。

根据这一指导思想和基本原则, 我们组织编写了这套汽车运用与维修专业通用教材。

本套教材具有以下特点:

1.采用新标准、新规范、新规定。

2.反映新结构、新材料、新工艺、新知识与新经验。

3.突出实践,理论与实训比例为 1:1 左右。

4.教材内容以够用为主,定位准确,难度适宜。

通过本套教材的学习,可以使学生达到以下要求:

1.能够了解生产过程,具备初步的企业实践经验。

2.能够分析和解决本专业的一般技术问题,具有初步的工作计划、组织、实施和评估能力。

3.能够借助工具书阅读一般的专业外文技术资料。

4.具有良好的人际交流能力、团队合作精神和客户服务意识。

5.具有安全生产、环境保护等法规的相关知识和技能。

学生通过对本套教材的学习,完全能掌握必要的本专业理论知识,同时还能达到相应的技能要求,并能够取得相应的职业资格证书为就业打下良好的基础。

本套教材子啊编写中，能得到很多中职学校、有关工厂企业的关怀和大力支持,再次致以深切谢意。

中等职业学校专业教材编委会

目 录

第一章　集合与函数

【本章提要】

1. 集合的概念:①集合的意义;②集合的表示法;③子集(本章的难点)。

2. 集合的基本运算:①并集及并运算;②交集及交运算;③差集及差运算;全集与补集。

3. 基本初等函数简介;①幂函数的定义、定义域、图像及性质;②指数函数的定义、定义域、图像及性质;③对数的定义,利用计算器求对数,对数函数的定义、定义域、图像及性质。

【学习要求】

1. 理解集合的意义。

2. 理解子集、并集、交集、差集、全集及补集的概念,会进行集合的各种运算。

3. 理解幂函数、指数函数、对数函数的概念,能熟练地画出常见的幂函数、指数函数、对数函数的图像,并能由图像看出它们的性质。

【正文】

集合是现代数学中最基本的概念之一,它不仅自身能成为一门学科,而且集合的概念已广泛地渗透到数学的各个领域。因此,学习集合和初步理论,对进一步学习数学有着重要的意义。本章将介绍集合的一些基本概念、常用符号、集合的表示法及其简单的运算。

第一节　集合的概念

一、集合的意义

在许多经济工作中常常会遇到如下的数学问题:

某百货商店进了两批货,第一批有毛巾、皮鞋、尼龙袜、帽子和肥皂,共计 5 个品种;

第二批有毛巾、皮鞋、座钟和收音机,共计 4 个品种。要计算两批货共进了多少个品种?

显然,这个问题不能简单地用 5 种 +4 种 =9 种进行计算。我们分别考察两批货的品种,发

现把它们合并在一起时,皮鞋、毛巾这两个品种是两批共有的,所以实际进货品种只有七种。

在这个问题中,我们所处理的对象是由毛巾、皮鞋之类所组成的集体,处理的方法采用了“合并”与“共有”的运算方法。

下面再考察几组对象:

(1)所有不大于5的自然数;

(2)与某个角的两边距离相等的所有的点;

(3)所有的直角三角形;

(4)所有的二次三项式;

(5)某地区所有的食品商店。

它们分别是由一些数、一些点、一些图形、一些式子和一些事物组成,每个组里的对象都具有某种特定的性质。

我们把具有某种特定性质的对象的总体叫作集合,简称集。把组成集合的各个对象叫作这个集合的元素。

例如,上面考察的第(1)组就是由所有不大于5的自然数组成的集合,1,2,3,4,5都是它的元素;第(3)组是由所有的直角三角形组成的集合,任何一个直角三角形都是它的元素;第(5)组是由某地区所有的食品商店组成的集合,这个地区内任何一个食品商店都是这个集合的元素。

前面所说百货商店两批进货的品种,也可以分别组成两个集合。第一批货是由毛巾、皮鞋、尼龙袜、帽子、肥皂五个品种组成的集合;第二批是由毛巾、皮鞋、座钟、收音机四个品种组成的集合。

下面再举几个集合的例子:

(6)所有正偶数组成一个集合。正偶数2,4,6,……都是这个集合的元素。

(7)方程 $x^2+1=0$ 的所有实数根组成一个集合。因为这个方程式只有连个实数根1和-1,所以这个集合只有两个元素1和-1。

(8)不等式 $3x-2>0$ 的索玉洁组成一个集合。凡是满足 $x>\dfrac{2}{3}$ 的实数都是这个集合的元素。

(9)平面直角坐标系内所有的点组成一个集合。以一对有序实数 (x,y) 为坐标的任何一个点都是这个集合的元素。

习惯上,我们用大写字母A,B,C……表示集合,用小写字母 a,b,c……表示元素。

如果 a 是集合A的元素,就记作“$a\in A$”,读作 a 属于A;如果 a 不是集合A的元素,就记作

“$a \notin A$”,读作“a 不属于 A”。

例如,上面第(6)组中,设为正偶数所组成的集合,则 $2 \in E$,$100 \in E$,而 $-2 \notin E$,又如,一条已知直线上所有的点组成了集合 L,这时若点 P 在直线上,则 P 在直线上,则 $P \in L$;若点 Q 不在直线上,则 $Q \notin L$。

由数组成的集合叫作数集。常见的数集及其符号如下表所示。

数　集	符　号	数　集	符　号
自然数集	N	有理数集	Q
整数集	Z	实数集	R

若数集中的元素都是正数,就在集合记号的右下角标以“+”号;若数集中的元素都是负数,就在集合记号的右下角或右上角以“-”号,例如,正整数集记作 $Z_+ Z^+$,负实数集记作 R_- 或 R^+ 等。

一个“给定集合”的含义是指这个集合中的元素是确定的。也就是说,根据集合元素所具有的特定性质,可以判断出哪些对象是集合的元素,哪些不是它的元素,不能模棱两可。

例如对于自然数集 N,根据自然数的特定性质不难看出 $2 \in N$,而$\sqrt{2} \notin N$,$\frac{1}{2} \notin N$,等等。

对于一个给定的集合,其中元素是互异的。也就是说,集合中任何两个元素都是不同的,相同的对象归入任何一个集合时,只能算作集合的一个元素。

若一个集合的所有元素为有限多个,这个集合叫作有限集合;若它的所有元素为无线多个,就叫作无限集合。在前面考察的 9 组对象所组成的集合中,第(1),(5),(7)是有限集合,第(2),(3),(4),(6),(8),(9)是无限集合。

只有一个元素的集合叫作单元素集。例如,$\{a\}$,$\{5\}$ 和 $\{0\}$ 都是单元素集;不含任何元素的集合叫作空集,记作 Ø,例如方程 $x^2+4=0$ 的所有实数根组成的集合就是空集,因为方程在实数范围内没有解,说明方程的解集中没有任何元素,是个空集。至少有一个元素的集合叫作非空集。

必须注意,Ø 与 $\{0\}$ 是意义完全不同的两个集合,Ø 是空集,它不含有任何元素;$\{0\}$ 是单元素集,它含有一个元素 0。

另外,$\{a\}$ 与 a 也是意义完全不同的两个概念,$\{a\}$ 是个集合,而 a 是构成这个集合的一个元素。

二、集合的表示法

集合一般有以下两种表示法:列举法和描述法。

1. 列举法

把属于某个集合的元素一一列举出来，写在花括号{}内。每个元素仅写一次，不考虑顺序，这种表示集合的方法叫作列举法。

例如，不大于5的自然数的集合可以表示为$\{1,2,3,4,5\}$，也可表示为$\{2,3,4,5,1\}$，但不能表示为$\{2,3,3,1,4,2,5\}$。

当集合元素很多，不需要或不可能一一列出时，也可只写出几个元素，其他用省略号表示。如小于100的自然数集可表示为$\{1,2,\cdots\cdots,99\}$，正偶数集可表示为$\{2,4,\cdots,2n,\cdots\}$。

例1 用列举法写出本章开始所述百货商店两批进货品种所组成的集合。

解：设第一、二批进货品种的集合分别表示为A_1、A_2，则

$A_1=$\{毛巾，皮鞋，尼龙袜，帽子，肥皂\}；

$A_2=$\{毛巾，皮鞋，座钟，收音机\}。

2. 描述法

把属于某个集合的元素所具有的特定性质描述出来，写在花括号{ }内，这种表示集合的方法叫作描述法。

例如，所有自然数组成的集合可以表示为\{自然数\}。

或表示为$\{x|x\in N\}$其中竖线的左边表示这个集合的元素的一般形式，竖线的右边表示集合的元素所具有的特定性质。

又如，平面直角坐标系内所有位于反比例函数$y=\dfrac{1}{x}$的图像上的点(x,y)组成一个集合，这个集合可表示为

$$\{(x,y|y=\frac{1}{x},x\neq 0)\}$$

例2　用描述法表示以下集合：

(1)方程$x^2-1=0$的所有实数根组成的集合；

(2)不等式$x-5>3$的所有解组成的集合。

解：(1)方程$x^2-1=0$的实数根组成的集合可表示为$\{x|x^2-1=0,x\in R\}$，其中$x\in R$一般可省略不写；

(2)不等式$x-5>3$的解集可表示为$\{x|x-5>3\}$。

例3　用描述法表示以下集合：

(1)数轴上所有坐标不小于0，不大于2的点所组成的集合

(2)在平面直角坐标系内$y=3x+2$，直线上所有点组成的集合；

(3)在平面直角坐标系的第Ⅰ象限内所有点组成的集合。

解：

(1)数轴上所有坐标不小于0,不大于2的点组成的集合是$\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$

(2)在直角坐标系内,直线$y=3x+2$上所有点组成的集合是$\{(x,y)|y=3x+2\}$

(3)在平面直角坐标系的第Ⅰ象限内所有点组成的集合是

$\{(x,y)|x>0,y>0\}$

一般说来,一个集合的表示法,可以采用列举法,也可以采用描述法。例3中的三个集合,由于其中所有点不可能一一列举,所以只能采用描述法表示。

三、集合与集合的关系

1. 集合的包含关系

我们来观察两个集合A、B

$A=\{2,4,6,8,10\}$

$B=\{2,6,8\}$

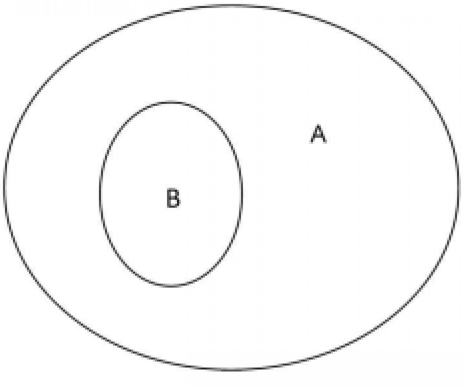
发现集合B中任何一个元素都是集合A的元素。对于集合之间的这种关系,给出以下定义。

定义　设有两个集合A和B,若B的每一个元素都是A的元素,则集合B叫作集合A的子集,记作:$A\supseteq B$或$B\subseteq A$

读作"A包含B"或"B包含于A"。

为了直观起见,今后我们常用圆来表示一个集合,用圆中的点来表示集合中的元素。

图1-2直观地描述了集合A与B的关系:



$A\supseteq B$或$B\subseteq A$

即B是A的子集。

根据子集的定义可知,任何集合 B 都是它本身的子集,即:$B\subseteq B$

我们还规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 B 的子集,即:$\varnothing\subseteq B$

定义 若集合 B 是集合 A 的子集,且集合 A 中至少有一个元素不属于集合 B,则把集合 B 叫作集合 A 的真子集,记作:$A\supset B$ 或 $B\subset A$

例如,自然数集 N 是 N 的子集,但不是真子集;N 是实数集 R 的子集,也是 R 的真子集。显然,空集是任何非空集合的真子集。

例 4 设集合 M 为$\{0,1,2\}$,试写出 M 的所有子集,并支出 M 的真子集。

解:集合 M 有 3 个元素,现按元素个数从少到多依次写出 M 的子集如下

$\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}$

集合 M 的子集共有 8 个,其中除$\{0,1,2\}$外,其余都是 M 的真子集。

2. 集合的相等关系

定义 对于两个集合 A 与 B,如果 $A\supseteq B$,同时 $B\supseteq A$,则称集合 A 与集合 B 是相等的,记作:$A=B$ 两个集合相等就表示这两个集合的元素完全相同。

例如 $\{1,2,3,4\}=\{4,3,2,1\}$

例 5 设集合 $A=\{x|16-x^2=0\}$,集合 $B=\{4,-4\}$,试讨论集合 A 与 B 的关系。

解:方程 $16-x^2=0$ 的所有解是 $x^2=4,x^2=-4$,因此 $A=\{4,-4\}$;而 $B=\{4,-4\}$,由于两个集合的元素完全相同,所以集合 $A=B$

习题 1-1

1. 试写出下列集合的所有元素:

(1)$\{$大于 3 小于 11 的偶数$\}$;

(2)$\{x|x^4=16|\}$;

(3)$\{x|x\leqslant 28,x=4n,n\in Z_+\}$;

(4)$\{$一年中有 31 天的月份$\}$。

2. 用适当的方法表示以下集合:

(1)所有偶数的集合;

(2)所有正奇数的集合;

(3)所有大于 0 小于 4 的实数的集合;

(4)所有周长为 20cm 的三角形的集合。

3. 指出下列集合哪些是空集,哪些是有限集合,哪些是无限集合。

(1)$\{x|x+1=1\}$;

(2) $\{x \mid -2x+3<6\}$；

(3) $\{(x,y) \mid x \notin R, y \notin R\}$；

(4) $\{x \mid x^2+1=0, x \in R\}$；

(5) {小于 100 的正整数的平方数}。

第二节　集合的运算

一、并集

在第一节的例 1 中我们曾指出，百货商店第一批和第二批所进货品种的集合分别为：

A1 = {毛巾，皮鞋，尼龙袜，帽子，肥皂}

A2 = {毛巾，皮鞋，座钟，收音机}

现在把 A_1 中的元素与 A_2 中的元素合并到一起（其中每种元素只出现一次，不得重复），就可得到两次进货全部品种组成的集合

A_3 = {毛巾，皮鞋，尼龙袜，帽子，肥皂，座钟，收音机}

对于这样的集合，给出以下定义。

定义　设 A 和 B 是两个集合，把属于 A 和属于 B 的所有元素合并在一起组成的集合叫作 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$，读作"A 并 B"。即

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$

因此，在上面的例子中有

$A_3 = A_1 \cup A_2$

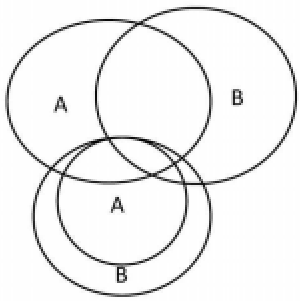
上面定义中的" $x \mid x \in A$ 或 $x \in B$"包含了三中可能的情况：

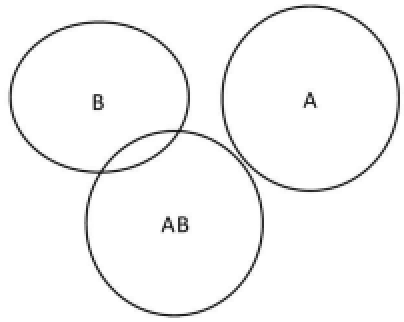
(1) $x \in A$ 但 $x \notin B$

(2) $x \in B$ 但 $x \notin A$

(3) $x \in A$ 且 $x \in B$

在一个具体问题中国，这三种情况不一定都出现，但不管是哪一种情况，$A \cup B$ 中的元素都至少属于 A 或 B 中的一个。图 1－3 中的阴影部分表示 $A \cup B$，图中(1)(2)，(3)分别表示上述三中可能情况。由并集的定义和图 1－3 不难看出，集合 A 和集合 B 都是它们的并集的子集，即 $A \subseteq A \cup B$；$B \subseteq A \cup B$ 此外，对任意的集合 A，显然有 $A \cup A = A$；$A \cup \varnothing = A$　$A \cup B = B \cup A$ 即对 $\cup$ 运算满足交换律。





求集合的并集的运算叫作并运算。

例 1 设 $A=\{2,3\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，$C=\{0,4\}$，求 $A\cup B$ 及 $A\cup B\cup C$

解：$A\cup B=\{2,3\cup\}\{-1,0,1,2\}$

$=\{-1,0,1,2,3\}$

$A\cup B\cup C=\{2,3\}\cup\{-1,0,1,2\}\cup\{0,4\}$

$=\{-1,0,1,2,3,4\}$

例 2　设 A＝{有理数}，B＝{无理数}，求 $A\cup B$。

解：$A\cup B$＝{有理数}∪{无理数}＝{实数}

二、交集

仍考虑第一节的例 1，现在把 A_1 与 A_2 中所有相同的元素选出来，就可得到两批进货相同品种所组成的集合

A_4＝{毛巾，皮鞋}

对于这样的集合，给出以下定义。

定义　设 A 和 B 是两个集合，把属于 A 且属于 B 的所有元素组成的集合叫作 A 与 B 的 交集，记作 $A\cap B$，读作“A 交 B”，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

因此，在上面的例子中有 $A_4=A_1\cap A_2$

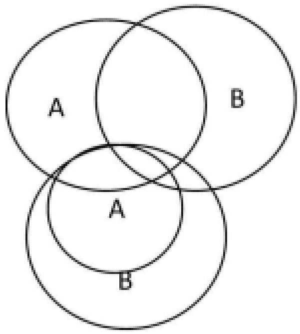
按照集合 A 与集合 B 本身的相互关系，它们的交集有如图 1－4 所示的四中情形，图中的阴影部分表示 $A\cap B$ 由交集的定义和图 1－4 不难看出，$A\cap B$ 既是集合 A 的子集，也是集合 B 的子集，即 $A\cap B\subseteq A$；$A\cap B\subseteq B$

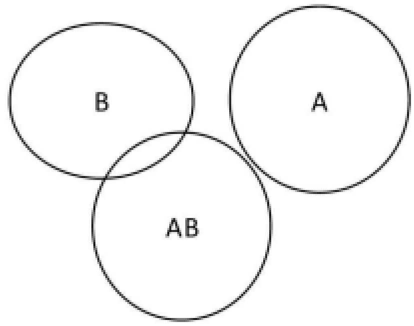
此外，对任意的集合 A，显然有

$A\cap A=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$

即对 $A\cap B=B\cap A$ 运算满足交换律。

求集合的交集的运算叫作交运算。





例 3　设 $A=\{2,4,7\}$,$B=\{-2,0,2,4\}$ 求 $A\cap B$

解:$A\cap B=\{2,4,7,\}\cap\{-2,0,2,4\}=\{2,4\}$

例 4　设 $A=\{$某银行中存款为 1000 元的储户$\}$,

$B=\{$某银行中定期存款的储户$\}$。

求 $A\cap B$

解:$A\cap B=\{$某银行中存款为 1000 元的储户$\}\cup\{$某银行中定期存款的储户$\}$

$=\{$某银行中定期存款为 1000 元的储户$\}$

例 5　设集合 $A=\{0,1,2,\cdots,9\}$,

$B=\{2,4,6,8,10\}$,

$C=\{1,2,3,4\}$,

求 $A\cap B\cup C$

解:$A\cap B\cup C$

$=\{0,1,2,\cdots,9\}\cup\{2,4,6,8,10\}\cup\{1,2,3,4\}$

$=\{2,4,6,8\}\cup\{1,2,3,4\}$

$=\{1,2,3,4,6,8\}$

“$A\cap B$”与“$A\cup B$”有的书上也记作“$A+B$”与“AB”

有限集合的交集与并集的元素个数

设 N_M 表示某个有限集合 M 中的元素个数,由图 1－5 不难看出

$N_A\cup B=N_A+N_B-N_A\cap B$;

$N_A\cap B=N_A+N_B-N_A\cup B$

例 6　为了了解居民的生活状况,就拥有彩电、冰箱、洗衣机的数量调查了某地若干家庭,经统计,有彩电的 92 家,有冰箱的 86 家,有洗衣机的 83 家。

(1)若彩电与冰箱两样都有的共计 45 家,问彩电与冰箱至少有一种的共有多少家?